Entwicklung eines graphen- und heuristikbasierten Verfahrens zur Topologieoptimierung von Profilquerschnitten für Crashlastfälle

Dissertation
zur Erlangung eines Doktorgrades

im
Fachbereich D – Architektur, Bauingenieurwesen, Maschinenbau, Sicherheitstechnik
der
Bergischen Universität Wuppertal

– Abteilung Maschinenbau –

vorgelegt von
Christopher Ortmann
aus Wittenberg

Wuppertal 2015

Tag der mündlichen Prüfung: 20.05.2015

Christopher Ortmann

Entwicklung eines graphen- und heuristikbasierten Verfahrens zur Topologieoptimierung von Profilquerschnitten für Crashlastfälle

Dissertation, Bergische Universität Wuppertal, Fachbereich D – Abteilung Maschinenbau, Lehrstuhl für Optimierung mechanischer Strukturen, Dezember 2014

Kurzfassung:
Die passive Sicherheit gehört zu den dominierenden Auslegungskriterien bei der Entwicklung eines Fahrzeugs. Sie umfasst Sicherheitsmaßnahmen, welche die Folgen eines Unfalls für Fahrzeuginsassen und andere Verkehrsteilnehmer mindern, nachdem ein Unfall unvermeidlich geworden ist. Ein Kernelement ist hierbei die Fahrzeugkarosserie.
Das Werkzeug der Topologieoptimierung könnte hier einen wertvollen Beitrag leisten. Für linear statisch belastete Strukturen existiert eine Reihe von effizienten Methoden für die Topologieoptimierung. Diese können allerdings aufgrund der auftretenden Nichtlinearitäten und der Dynamik nicht bei crashbelasteten Strukturen angewendet werden. Zu den Nichtlinearitäten zählen große Verschiebungen und Rotationen, Kontaktphänomene sowie plastisches und geschwindigkeitsabhängiges Materialverhalten. Weitere in einer Optimierung bei Berücksichtigung von Crashlastfällen auftretende Schwierigkeiten sind Verzweigungspunkte, eine hohe Anzahl von lokalen Optima und die fehlende Möglichkeit, die Sensitivitäten analytisch und damit ohne zusätzliche Funktionsaufrufe zu ermitteln.
In dieser Dissertation wird die *Graphen- und Heuristikbasierte Topologieoptimierung (GHT)* vorgestellt, welche diese Schwierigkeiten adressiert und für die Topologieoptimierung von Profilquerschnitten von crashbelasteten Strukturen verwendet werden kann. In der *GHT* wird das eigentliche Optimierungsproblem in zwei ineinander geschachtelte Optimierungsschleifen aufgeteilt. In der äußeren Optimierungsschleife verändern aus Expertenwissen abgeleitete Heuristiken, basierend auf Simulationsdaten von Crashberechnungen, die Topologie der zu optimierenden Struktur. In der inneren Optimierungsschleife werden herkömmliche, universelle Optimierungsalgorithmen für die Formoptimierung und Dimensionierung der Struktur verwendet. Die Geometrie der zu optimierenden Struktur wird durch einen mathematischen Graphen beschrieben. Dieser ist nach einer speziell hierfür entwickelten Syntax aufgebaut und ermöglicht durch die flexible Geometriebeschreibung auch komplexe geometrische Modifikationen wie Topologieänderungen. Graphenbasierte Algorithmen werden für die Überprüfung von Fertigungsrestriktionen eingesetzt.

Stichworte:
Topologieoptimierung, Crashauslegung, nichtlinear dynamische Probleme, Heuristiken, Expertenwissen, Graphentheorie

Christopher Ortmann

Development of a graph and heuristic based method for the topology optimization of crashworthiness profile structures

PhD thesis, University of Wuppertal, Department D – Division of Mechanical Engineering, Chair for Optimization of Mechanical Structures, December 2014

Abstract:
Passive safety is one of the dominant design criteria in the development of a vehicle. It includes safety measures which mitigate the consequences of an accident for vehicle occupants and other road users after an accident has become inevitable. A core element of the passive safety is the vehicle body.
The tool of the topology optimization could make a valuable contribution here. For linear static loaded structures there exist a number of efficient methods for topology optimization. However, they cannot be used for crashworthiness structures due to the occurring nonlinearities and the dynamics. The nonlinearities are large displacements and rotations, contact phenomena, as well as plastic and rate-dependent material behavior. Further difficulties arising in an optimization with consideration of crash load cases are bifurcation points, a high number of local optima and the impossibility to determine the sensitivities analytically and therefore without additional function calls.
In this work the *Graph and Heuristic Based Topology Optimization* (*GHT*) is presented which addresses these difficulties and can be used for the topology optimization of profile cross sections of crashworthiness structures. In the *GHT* the actual optimization problem is divided into two optimization loops convoluted in each other. In the outer optimization loop heuristics derived from expert knowledge change the topology of the structure to be optimized, based on simulation data from crash simulations. In the inner optimization loop conventional universal optimization algorithms for the shape and sizing optimization of the structure are used. The geometry of the structure to be optimized is described by a mathematical graph. The graph is generated according to a specially for this purpose developed syntax and also allows complex geometric modifications such as topology changes by the flexible description of the geometry. Graph based algorithms are used for the check of manufacturing constraints.

Keywords:
Topology optimization, crashworthiness, nonlinear dynamic problems, heuristics, expert knowledge, graph theory

Vorwort und Danksagung

Die vorliegende Dissertation entstand während meiner Tätigkeit als Wissenschaftlicher Mitarbeiter im *Department Fahrzeugtechnik und Flugzeugbau* an der *Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg* und am *Lehrstuhl für Optimierung mechanischer Strukturen* an der *Bergischen Universität Wuppertal*.
Zum Gelingen dieser Arbeit haben viele Menschen aus meinem Umfeld beigetragen und ich möchte an dieser Stelle die Gelegenheit zum Dank nutzen.

Meinem Doktorvater Prof. Dr. Axel Schumacher möchte ich ganz besonderen Dank aussprechen. Seine Unterstützung war für mich über den gesamten Zeitraum der Promotion sowohl fachlich als auch menschlich von unschätzbarem Wert.
Prof. Dr. Martin Meywerk von der *Helmut-Schmidt-Universität* in Hamburg möchte ich herzlich für die Übernahme des Zweitgutachtens danken. Seine Ideen und Anmerkungen waren für diese Arbeit sehr hilfreich.

Viele Entwicklungen in dieser Arbeit gehen auf die Vorarbeit von Christian Olschinka zurück, wofür ich mich bedanken möchte.
Im Rahmen des Forschungsprojekts *Methodische und softwaretechnische Umsetzung der Topologieoptimierung crash-beanspruchter Fahrzeugstrukturen* haben die zahlreichen Diskussionsrunden und Arbeitskreissitzungen zu der Entstehung dieser Arbeit beigetragen. Danken möchte ich allen Beteiligten. Prof. Dr. Lothar Harzheim, Mathias Brass, Norbert Schulte-Frankenfeld, Dr. Heiner Müllerschön, Alexander Frederic Walser und Dr. Martin Bernreuther haben mich mit Anregungen und Fragen bei der Erstellung dieser Arbeit unterstützt.
Katrin Weider sowie meinen Kollegen Robert Dienemann und Dominik Schneider vom *Lehrstuhl für Optimierung mechanischer Strukturen* danke ich für das Korrekturlesen und für die daraus entstandenen Anregungen.

Dank gilt meiner Mutter, die meine englischsprachigen Veröffentlichungen und Präsentationen korrigiert hat.
Besonders danken möchte ich meiner Ehefrau, Christine Ortmann, die mich in jeder Phase der Promotion unterstützt hat und mich trotz Fachfremdheit bei strategischen Entscheidungen zur weiteren Ausrichtung meiner Forschungen beraten hat.

Wuppertal, im Dezember 2014 Christopher Ortmann

Inhalt

1 Einleitung 1
1.1 Problemstellung und Motivation 1
1.2 Konzept der Optimierungsmethode und Aufbau der Dissertation 2

2 Strukturoptimierung in der Auslegung von crashbelasteten Fahrzeugstrukturen 5
2.1 Auslegung von Crashstrukturen in Fahrzeugen 5
2.1.1 Aufgaben von Crashstrukturen 5
2.1.2 Typische Crashlastfälle und Auswertekriterien 8
2.1.3 Besonderheiten der Crashsimulation 10
2.2 Grundlagen der Strukturoptimierung 14
2.2.1 Begriffsdefinitionen 14
2.2.2 Arten der Strukturoptimierung 16
2.2.3 Mathematische Formulierung eines Optimierungsproblems 18
2.2.4 Einordnung von Optimierungsalgorithmen 18
2.3 Herausforderungen bei der Optimierung crashbelasteter Strukturen 23
2.4 Stand der Technik zur Topologieoptimierung von crashbelasteten Strukturen 25
2.4.1 Ground Structure Approach 28
2.4.2 Hybrid Cellular Automaton 30
2.4.3 Equivalent Static Loads 32

3 Geometriebeschreibung durch mathematische Graphen 35
3.1 Eigenschaften von Graphen 36
3.2 Verwendete Graphensyntax 39
3.3 Algorithmen zur Überprüfung von Fertigungsrestriktionen 44
3.4 Algorithmus zur Bestimmung der Bauraumgrenzen 47
3.5 Softwareumsetzung 48

4 Heuristiken für die Strukturoptimierung von crashbelasteten Strukturen 51
4.1 Heuristiken zur Topologieänderung 52
4.1.1 Heuristik „Entfernen unbelasteter Wände“ 52
4.1.2 Heuristik „Abstützen sich schnell deformierender Wände“ 57

4.1.3 Heuristik „Ausgleichen der Energiedichte“ 64
4.1.4 Heuristiken „Ausnutzen des Deformationsraums Zug / Druck“ 68
4.1.5 Heuristik „Entfernen kleiner Kammern“ 73
4.2 Heuristiken zur Form- und Wanddickenänderung 77
4.2.1 Heuristik „Glätten der Struktur“ 77
4.2.2 Heuristik „Skalieren der Wanddicken“ 78

5 Methode der Graphen- und Heuristikbasierten Topologieoptimierung 81
5.1 Funktionsweise der Optimierungsmethode 81
5.2 Ablauf der äußeren Optimierungsschleife 84
5.3 Ablauf der inneren Optimierungsschleife 87
5.3.1 Generierung von Dimensionierungsvariablen basierend auf Wanddicken 89
5.3.2 Generierung von Formvariablen basierend auf Positionen von Wänden 90
5.3.3 Generierung von Formvariablen basierend auf Krümmungen von Wänden 94
5.3.4 Bestimmung der maximalen Anzahl von Funktionsaufrufen 94
5.4 Möglichkeiten und Grenzen der Optimierungsmethode 95
5.5 Softwareumsetzung 96

6 Darstellung der Effizienz der Methode anhand praktischer Anwendungen 98
6.1 Anwendungsbeispiel 1: Schwellerausschnitt 99
6.1.1 Anwendungsbeispiel 1a: Minimierung der Reaktionskraft 102
6.1.2 Anwendungsbeispiel 1b: Minimierung der Intrusion 109
6.1.3 Anwendungsbeispiel 1c: Minimierung der Masse 113
6.2 Anwendungsbeispiel 2: Rahmenstruktur 118
6.2.1 Anwendungsbeispiel 2a: Minimierung der Verschiebung 120
6.2.2 Anwendungsbeispiel 2b: Minimierung der Verschiebung mit fixer äußerer Kontur 124
6.2.3 Anwendungsbeispiel 2c: Minimierung der Beschleunigung 128
6.3 Anwendungsbeispiel 3: Schweller in einem Gesamtfahrzeug 134

7 Zusammenfassung und Ausblick 143

Literaturverzeichnis 145

Abkürzungs- und Symbolverzeichnis

Abkürzungen

ASCII	*American Standard Code for Information Interchange*
CAD	*Computer Aided Design*
CAE	*Computer Aided Engineering*
ESL	*Equivalent Static Loads*
FE	*Finite Elemente*
FEM	*Finite Elemente Methode*
GHT	*Graphen- und Heuristikbasierte Topologieoptimierung*
GRAMB	*Graph based Mechanics Builder*
HCA	*Hybrid Cellular Automaton*
SIMP	*Solid Isotropic Material with Penalization*
TOC	*Topology Optimizer for Crashworthiness structures*
AbsWän	*Heuristik Abstützen sich schnell deformierender Wände*
AusEne	*Heuristik Ausgleichen der Energiedichte*
DefDru	*Heuristik Ausnutzen des Deformationsraums Druck*
DefZug	*Heuristik Ausnutzen des Deformationsraums Zug*
EntKam	*Heuristik Entfernen kleiner Kammern*
EntWän	*Heuristik Entfernen unbelasteter Wände*

Lateinische Zeichen

$\vec{a}$	Beschleunigungsvektor
c	Schallgeschwindigkeit
d	Verschiebung oder Entfernung
$\vec{d}$	Verschiebungsvektor
$\underline{D}$	Dämpfungsmatrix
E	Elastizitätsmodul
$\vec{f}$	Kraftvektor
F	Kraft
$\underline{K}$	Steifigkeitsmatrix
l	Länge
m	Masse
$\underline{M}$	Massenmatrix
n_e	Index zur Nummerierung von Ecken des Profilquerschnitts der Struktur
N_e	Anzahl der Ecken des Profilquerschnitts der Struktur

n_f	Index zur Nummerierung von *FE-Knoten*
N_{f,n_w,n_l}	Anzahl der *FE-Knoten* von Wand n_w in Lastfall n_l
n_{fps}	Index zur Nummerierung einer nach bestimmten Kriterien sortierten Menge von *FE-Knotenpaaren*
N_{fps}	Anzahl der nach bestimmten Kriterien sortierten *FE-Knotenpaare*
n_h	Index zur Nummerierung von Heuristiken
N_h	Anzahl der Heuristiken
n_i	Index zur Nummerierung von Iterationen
n_{ke}	Index zur Nummerierung von konkurrierenden Entwürfen
N_{ke}	Anzahl der konkurrierenden Entwürfe
n_l	Index zur Nummerierung von Lastfällen
N_l	Anzahl der Lastfälle
n_{pe}	Index zur Nummerierung von potentiellen Endpunkten bei der Heuristik *Abstützen sich schnell deformierender Wände*
N_{pe}	Anzahl der potentiellen Endpunkte bei der Heuristik *Abstützen sich schnell deformierender Wände*
n_s	Index zur Nummerierung von Schnittpunkten bei der Heuristik *Abstützen sich schnell deformierender Wände*
N_s	Anzahl der Schnittpunkte bei der Heuristik *Abstützen sich schnell deformierender Wände*
n_t	Index zur Nummerierung von Zeitschritten
N_{t,n_l}	Anzahl der Zeitschritte mit relevanten Ergebnisdaten in Lastfall n_l
n_w	Index zur Nummerierung von Wänden des Profilquerschnitts der Struktur
N_w	Anzahl der Wände des Profilquerschnitts der Struktur
n_{wps}	Index zur Nummerierung einer nach bestimmten Kriterien sortierten Menge von Wandpaaren des Profilquerschnitts der Struktur
N_{wps}	Anzahl der nach bestimmten Kriterien sortierten Wandpaare des Profilquerschnitts der Struktur
n_{ws}	Index zur Nummerierung einer nach bestimmten Kriterien sortierten Menge von Wänden des Profilquerschnitts der Struktur
N_{ws}	Anzahl der nach bestimmten Kriterien sortierten Wände des Profilquerschnitts der Struktur
$\vec{p}$	Positionsvektor
t	Wanddicke
u	Innere Energiedichte
U	Innere Energie
v	Geschwindigkeit

$\vec{v}$	Geschwindigkeitsvektor
V	Volumen

Griechische Zeichen

α	Deformationsindex
ν	Querkontraktionszahl
ρ	Dichte
ρ_k	Künstliche Dichte
σ	Spannung
σ_f	Fließspannung

Vektoren werden durch einen Pfeil über einem kleinen lateinischen Buchstaben und Matrizen durch eine Unterstreichung bei einem großen lateinischen Buchstaben kenntlich gemacht.

1 Einleitung

1.1 Problemstellung und Motivation

Ein bedeutendes Auslegungskriterium für ein Fahrzeug und seine einzelnen Komponenten ist die Sicherheit der Insassen bei Unfällen, wie z.B. Zusammenstößen mit anderen Fahrzeugen. Eine besondere Rolle kommt dabei der Fahrzeugkarosserie zu, welche durch kontrollierte plastische Deformation die kinetische Energie des Fahrzeugs absorbieren soll. Methoden zur Topologieoptimierung können bei diesem Auslegungsprozess einen wertvollen Beitrag leisten, da bei einer Topologieoptimierung die grundlegenden geometrischen Eigenschaften optimiert werden.

Für linear statisch belastete Strukturen existiert eine Reihe von Methoden zur Topologieoptimierung, welche erfolgreich eingesetzt werden. Ein Crash ist allerdings ein nichtlinear dynamisches Phänomen und die Methoden zur Topologieoptimierung von linear statisch belasteten Strukturen können hier nicht angewendet werden. Es treten unterschiedliche Arten von Nichtlinearitäten auf. Große Verschiebungen und Rotationen sind die Hauptursache für nichtlineare Geometrie. Ein wichtiger Mechanismus zur Übertragung von Kräften bei einem Crash ist der Kontakt von Komponenten mit sich selbst und auch mit anderen Komponenten. Kontakt zählt zu nichtlinearen Randbedingungen. Plastische Deformation von Materialien, geschwindigkeitsabhängiges Materialverhalten und die Verwendung von Versagensmodellen gehören zu nichtlinearem Materialverhalten.
Diese Nichtlinearitäten führen zu weiteren Schwierigkeiten, die bei der Optimierung einer crashbelasteten Struktur berücksichtigt werden müssen. Hierzu zählen Verzweigungspunkte, wie sie z.B. bei geometrischen Instabilitäten (Knicken und Beulen) auftreten und die Existenz einer großen Anzahl von lokalen Optima, welche das Auffinden des globalen Optimums erschwert.

In der Auslegung von crashbelasteten Strukturen werden andere Zielgrößen verwendet als in der Auslegung von linear statisch belasteten Strukturen. Während Letztere oft primär nach Steifigkeiten ausgelegt werden, sind für crashbelastete Strukturen auch Strukturantworten wie Energieabsorption und Beschleunigungen von Interesse. Für die Optimierung einer solchen Struktur muss also eine Methode verwendet werden, welche diese Strukturantworten auch verarbeiten kann.

Die Simulation einer crashbelasteten Struktur findet i.d.R. mit der *Finite Elemente Methode* (*FEM*) und unter Verwendung von *Expliziter Zeitintegration* statt. In einer Optimierung, in welcher meist eine Zielfunktion unter Einhaltung von Restriktionen minimiert werden soll, führt dies zu weiteren Einschränkungen. Im Gegensatz zur linearen Statik können hier die Sensitivitäten, also die Ableitungen der Zielfunktion und der Restriktionen nach den Entwurfsvariablen, nicht mehr analytisch bestimmt werden und für die Ermittlung der Sensitivitäten müssten daher zusätzliche Simulationen durchgeführt werden. Die Entwurfsvariablen sind hierbei die in der Optimierung veränderlichen Eigenschaften der zu optimierenden Struktur. Ohne die Verwendung von Sensitivitäten ist die effiziente Handhabung von einer hohen Anzahl von Entwurfsvariablen, wie sie in der Topologieoptimierung auftritt, eine besondere Herausforderung.

In dieser Dissertation wird die Methode der *Graphen- und Heuristikbasierten Topologieoptimierung (GHT)* vorgestellt, welche für die Topologieoptimierung von crashbelasteten Profilstrukturen entwickelt wurde. Unter einer Profilstruktur wird hierbei eine Struktur verstanden, die einen fest definierten Profilquerschnitt aufweist. Der Begriff „Struktur“ bezeichnet dabei ein Bauteil oder einen Zusammenbau von einzelnen Bauteilen. Das Konzept dieser Optimierungsmethode und der Aufbau dieser Dissertation werden in dem folgenden Unterkapitel beschrieben.

1.2 Konzept der Optimierungsmethode und Aufbau der Dissertation

In der *Graphen- und Heuristikbasierten Topologieoptimierung (GHT)* wird das eigentliche Optimierungsproblem in zwei ineinander geschachtelte Optimierungsschleifen aufgeteilt. In der äußeren Optimierungsschleife verändern aus Expertenwissen abgeleitete Heuristiken, basierend auf Simulationsdaten von Crashsimulationen, die Topologie der zu optimierenden Struktur. In der inneren Optimierungsschleife werden herkömmliche, universelle Optimierungsalgorithmen für Formoptimierung und Dimensionierung der Struktur verwendet. Die Geometrie der zu optimierenden Struktur wird durch einen mathematischen Graphen beschrieben. Dieser ist nach einer speziell hierfür entwickelten Syntax aufgebaut und ermöglicht durch die flexible Geometriebeschreibung auch komplexe geometrische Modifikationen wie Topologieänderungen. Graphenbasierte Algorithmen werden für die Überprüfung von Fertigungsrestriktionen eingesetzt.
Abbildung 1-1 zeigt eine Übersicht des Ablaufs der *GHT*.

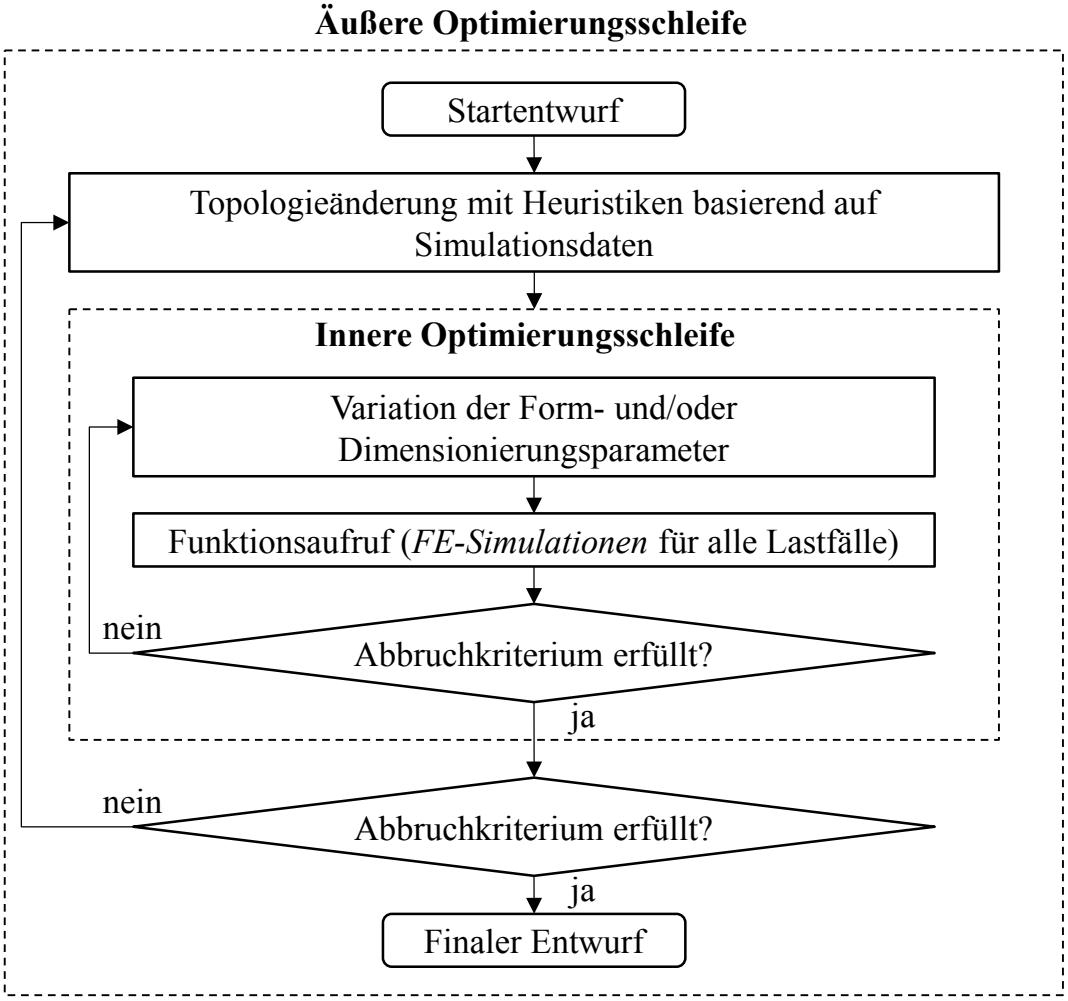


Abbildung 1-1: Übersicht des Ablaufs der GHT

In Kapitel 2 werden Grundlagen der Auslegung von crashbelasteten Strukturen und der Verwendung der Strukturoptimierung beschrieben. Hierzu zählt auch die Einordnung von universellen Optimierungsalgorithmen, welche im Rahmen der inneren Optimierungsschleife der *GHT* eingesetzt werden. Es werden die Schwierigkeiten diskutiert, welche bei der Optimierung von crashbelasteten Strukturen im Allgemeinen und der Topologieoptimierung im Besonderen auftreten. Außerdem erfolgt eine Darstellung des Stands der Technik der Topologieoptimierung von crashbelasteten Strukturen.

Kapitel 3 behandelt die Geometriebeschreibung der zu optimierenden Struktur durch mathematische Graphen. Die hierfür verwendete Graphensyntax wird detailliert beschrieben und die nach dieser Syntax aufgebauten Graphen werden anhand einer Beschreibung von allgemeinen Grapheneigenschaften eingeordnet. Die Möglichkeiten der Nutzung von graphenbasierten Algorithmen zur Überprüfung von Fertigungsrestriktionen werden vorgestellt.

In Kapitel 4 werden die aus Expertenwissen abgeleiteten Heuristiken, welche in der äußeren Optimierungsschleife eingesetzt werden, beschrieben. Im Fokus stehen hierbei die den Heu-

ristiken zugrunde liegenden mechanischen Wirkprinzipien sowie ihre Umsetzung als Algorithmen.

Kapitel 5 thematisiert den Ablauf und die vier grundlegenden Prinzipien der *GHT*: 1) die Verwendung von mathematischen Graphen zur Geometriebeschreibung, 2) die Verwendung von Heuristiken zur Veränderung der Geometrie, 3) die Aufteilung des Optimierungsproblems in zwei ineinander geschachtelte Optimierungsschleifen und 4) die parallele Verfolgung von miteinander konkurrierenden Entwürfen während der Optimierung. Zum Ablauf gehört vor allem die Implementierung der Heuristiken in den Optimierungsablauf sowie die Steuerung und das Zusammenspiel der Heuristiken.

In Kapitel 6 erfolgt die Anwendung der *GHT* auf unterschiedliche Anwendungsbeispiele. Da die *GHT* eine neu entwickelte Methode ist, werden die Optimierungsabläufe detailliert diskutiert und die Effizienz wird bewertet. Sofern möglich, wird der Grad an Optimalität der Optimierungsergebnisse anhand analytischer Abschätzungen ermittelt.

Kapitel 7 fasst die Ergebnisse dieser Dissertation zusammen und gibt einen Ausblick auf mögliche zukünftige Erweiterungen der *GHT*.

2 Strukturoptimierung in der Auslegung von crashbelasteten Fahrzeugstrukturen

2.1 Auslegung von Crashstrukturen in Fahrzeugen

2.1.1 Aufgaben von Crashstrukturen

Die Anforderungen der aktiven und passiven Sicherheit gehören zu den dominierenden Auslegungskriterien in der Entwicklung eines Fahrzeugs. Unter der passiven Sicherheit werden hierbei Sicherheitsmaßnahmen verstanden, welche die Folgen eines Unfalls für Fahrzeuginsassen und andere Verkehrsteilnehmer mindern, nachdem ein Unfall unvermeidlich geworden ist. Die aktive Sicherheit bezeichnet hingegen Sicherheitsmaßnahmen, welche einen Unfall vermeiden sollen. Unter einem Unfall wird in diesem Kontext sowohl eine Kollision des Fahrzeugs mit anderen Fahrzeugen und Objekten, als auch eine Kollision des Fahrzeugs mit nicht-motorisierten Verkehrsteilnehmern wie Fußgängern und Fahrradfahrern verstanden. Fahrzeugstrukturen, zu deren Primäraufgaben die Verbesserung der passiven Sicherheit des Fahrzeugs zählt, werden im Rahmen dieser Dissertation als Crashstrukturen oder crashbelastete Strukturen bezeichnet.
Typische Systeme der aktiven Sicherheit sind das *Anti-Blockier-System* (*ABS*) oder das *Elektronische Stabilitätsprogramm* (*ESP*). Zu typischen Systemen der passiven Sicherheit gehören das Rückhaltesystem der Insassen (Anschnallgurte), Airbags und die Karosserie des Fahrzeugs, welche zwei zentrale Funktionen übernimmt:

(1) Die strukturelle Integrität der Fahrgastzelle, welche die Insassen beherbergt, wird sichergestellt.
(2) Die kinetische Energie des Aufpralls / der Kollision wird durch plastische Deformation absorbiert und in Wärmeenergie umgewandelt.

Diese beiden Aufgaben sind gegenläufig zueinander, da die Erhaltung der strukturellen Integrität steife Strukturen und unter Last geringe Deformationen erfordert, die Energieabsorption hingegen nachgiebigere Strukturen erfordert, welche sich unter Last gezielt und kontrolliert plastisch deformieren. Daher wird die Fahrzeugkarosserie in zwei Bereiche eingeteilt: einerseits in eine steife Fahrgastzelle und andererseits in nachgiebigere Bereiche zur kontrollierten Energieabsorption, sog. „Knautschzonen“. Diese Aufteilung geht auf ein Patent von Béla Bárenyi aus dem Jahre 1952 zurück (Patent Nr. DBP 854 157) und ist bis heute eines der Kernprinzipien der Fahrzeugentwicklung.

Wird eine metallische Struktur durch ein Stoß- oder Aufprallereignis deformiert, wird kinetische Energie U_k in innere Energie U_i umgewandelt. Die Deformation der Struktur lässt sich dabei in zwei unterschiedliche Mechanismen einteilen. Die elastische Deformation ist reversibel und nach dem Erreichen des Zustands der maximalen Deformation kommt es zu einer Rückfederung, bei welcher sich die elastische Deformation zurückbildet. Die plastische Deformation hingegen ist irreversibel und entsteht bei metallischen Strukturen durch ein Wandern von Versetzungen auf atomarer Ebene. Bei diesem Prozess wird die für die plastische Deformation notwendige Energie in Wärmeenergie umgewandelt.
Eine typische Kraft-Weg-Kurve einer sich durch ein Stoß- oder Aufprallereignis deformierenden metallischen Struktur zeigt Abbildung 2-1. Die Kraft F ist hierbei die äußere Deformationskraft und der Weg d ist der in Kraftrichtung gemessene Deformationsweg der Struktur. Das Integral der Kraft-Weg-Kurve ist die innere Energie. Zum Zeitpunkt der maximalen Deformation d_{max} und damit vor der elastischen Rückfederung, ist U_i maximal.

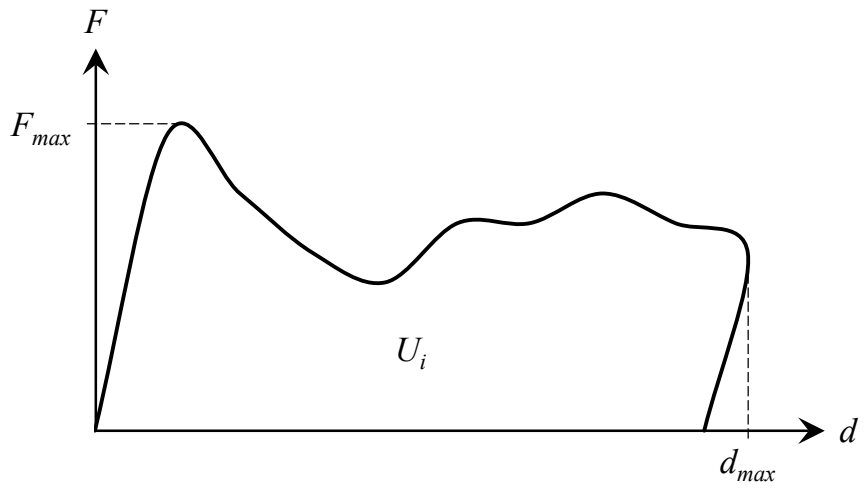


Abbildung 2-1: Kraft-Weg-Kurve einer sich deformierenden metallischen Struktur

Die von einer Crashstruktur durch elastische und plastische Deformation in innere Energie umgewandelte kinetische Energie wird als Energieabsorption bezeichnet. Unter dem Aspekt der maximalen Energieabsorption bei einer nicht zu überschreitenden maximalen Kraft F_{max} und einem maximalen Deformationsweg d_{max} ist ein rechteckiger Kraft-Weg-Verlauf optimal. Die maximale Kraft, welche eine Crashstruktur ertragen kann, wird beispielsweise dadurch begrenzt, dass bei dem Überschreiten einer kritischen Kraft andere Strukturen des Fahrzeugs oder Verbindungstechnik wie Schweißpunkte beschädigt werden. Außerdem stehen Kräfte, welche das Fahrzeug oder Crashstrukturen erleiden, in direktem Zusammenhang zu der Beschleunigung bzw. Verzögerung der Insassen, welche bei einem Unfall prinzipiell so gering wie möglich sein soll. Der maximale Deformationsweg hingegen wird durch den zur Verfügung stehenden Deformationsraum begrenzt.

Viele Kenngrößen eines Aufprallereignisses zwischen Fahrzeugen oder zwischen einem Fahrzeug und einem anderen Objekt lassen sich durch eine Vereinfachung als ideal plastischer Stoß abschätzen. Durch diese Vereinfachung werden zahlreiche Effekte wie z.B. das Kollabieren von Lastpfaden in der Fahrzeugkarosserie nicht berücksichtigt, dennoch lassen sich Aussagen über das globale Verhalten treffen. Dies wird im Folgenden beispielhaft für ein Fahrzeug durchgeführt, welches gerade und zentral mit seiner Front auf eine starre Wand prallt.

Weist das Fahrzeug eine Masse m von 1200 kg auf und fährt mit einer Geschwindigkeit v_0 von 15 m/s (54 km/h) gegen eine starre Wand, ergibt sich die kinetische Energie U_k als:

$$U_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot {v_0}^2 = \frac{1}{2} \cdot 1200\ \text{kg} \cdot \left(15 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = 135\ \text{kNm}\,. \tag{2-1}$$

Durch die Vereinfachung als ideal plastischer Stoß beträgt die Geschwindigkeit des Fahrzeugs am Ende des Aufpralls 0 und daher ist die gesamte kinetische Energie in innere Energie transformiert worden.
Weist das Fahrzeug an seiner Front eine Knautschzone mit einer Länge von 0,7 m auf, welche sich mit einer mittleren Deformationskraft F_m von 240 kN deformiert, ergibt sich der maximale Deformationsweg d_{max} als:

$$d_{max} = \frac{U_i}{F_m} = \frac{135\ \text{kNm}}{240\ \text{kN}} = 0{,}5625\ \text{m}\,. \tag{2-2}$$

Die Länge der Knautschzone ist also ausreichend, um die Energie des Aufpralls zu absorbieren. Die mittlere Verzögerung a_m, welche das Fahrzeug erleidet, kann aus der mittleren Deformationskraft und der Masse des Fahrzeugs berechnet werden:

$$a_m = \frac{F_m}{m} = \frac{240\ \text{kN}}{1200\ \text{kg}} = 200\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\,. \tag{2-3}$$

Die für dieses Beispiel ermittelte mittlere Verzögerung beträgt bereits das ca. 20-fache der Erdbeschleunigung. Der Kraft-Weg-Verlauf bei Belastungen dieser Art weist i.d.R. Kraftspitzen auf, deren Betrag einem Vielfachen der mittleren Kraft entsprechen kann. Die hier auftretenden Verzögerungen sind dann bereits hoch genug, um direkt Verletzungen der Insassen zur Folge zu haben.

2.1.2 Typische Crashlastfälle und Auswertekriterien

Zur Auslegung von einzelnen Crashstrukturen und kompletten Fahrzeugen nach den Aspekten der passiven Sicherheit wird von Automobilherstellern eine Reihe von Lastfällen verwendet. Der Großteil der verwendeten Lastfälle stammt dabei vom Gesetzgeber und von Konsumententests wie z.B. *Euro NCAP* (*European New Car Assessment Programme)*. Im Rahmen der „Homologation“, also der Zulassung eines neu entwickelten Fahrzeugs in einem bestimmten Markt, wird von dem jeweiligen Gesetzgeber die Zulassungseignung des Fahrzeugs u.a. in Form von Crashversuchen untersucht. Konsumententests hingegen haben das Ziel, für potenzielle Käufer die aktive und passive Sicherheit von neuen Fahrzeugen zu bewerten. Dies geschieht ebenfalls größtenteils mit Crashversuchen. Viele der vom Gesetzgeber und von Konsumententests verwendeten Lastfälle sind durch Unfallforschung entstanden und bilden in der Realität häufig auftretende Unfallszenarien nach.
Im Folgenden werden beispielhaft zwei Lastfälle beschrieben, welche vom *Euro NCAP* verwendet werden.

(1) Frontalaufprall: Das Fahrzeug fährt mit einer Geschwindigkeit von 64 km/h gegen eine deformierbare Barriere (siehe Abbildung 2-2). Die Überlappung zwischen Barriere und Fahrzeug beträgt dabei 40 % ohne Berücksichtigung der Seitenspiegel. Dieser Lastfall soll die Kollision zweier sich entgegenkommender Fahrzeuge nachbilden [Euro NCAP 2012].

(2) Pfahlaufprall: Das Fahrzeug trifft mit einer Geschwindigkeit von 29 km/h auf einen unbeweglichen Pfahl aus Metall mit einem Durchmesser von 254 mm (siehe Abbildung 2-3). Das Fahrzeug trifft seitlich auf den Pfahl, da der Lastfall die Kollision des Fahrzeugs mit einem Baum nachbilden soll, nachdem das Fahrzeug ins Schleudern geraten ist und sich die Längsachse des Fahrzeugs senkrecht zu der ursprünglichen Fahrtrichtung befindet. Die Position des Pfahls in Längsrichtung des Fahrzeugs entspricht der des Massenschwerpunkts des Kopfes des Fahrer-Dummys [Euro NCAP 2011].

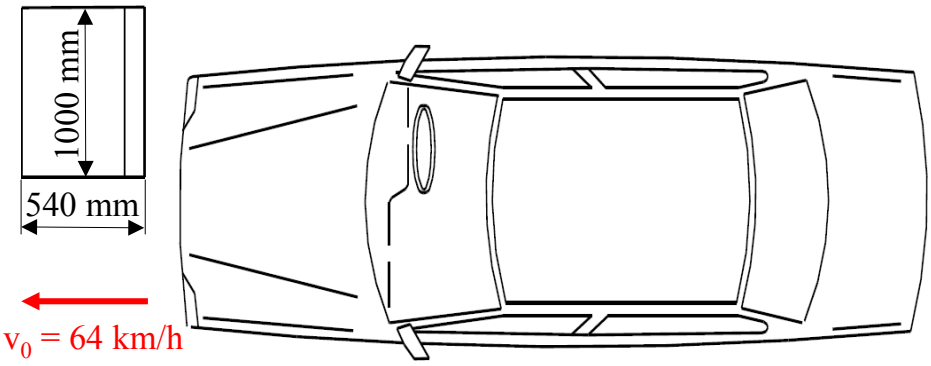


Abbildung 2-2: Aufbau des Euro NCAP Frontalaufpralls, modifiziert aus [Euro NCAP 2012]

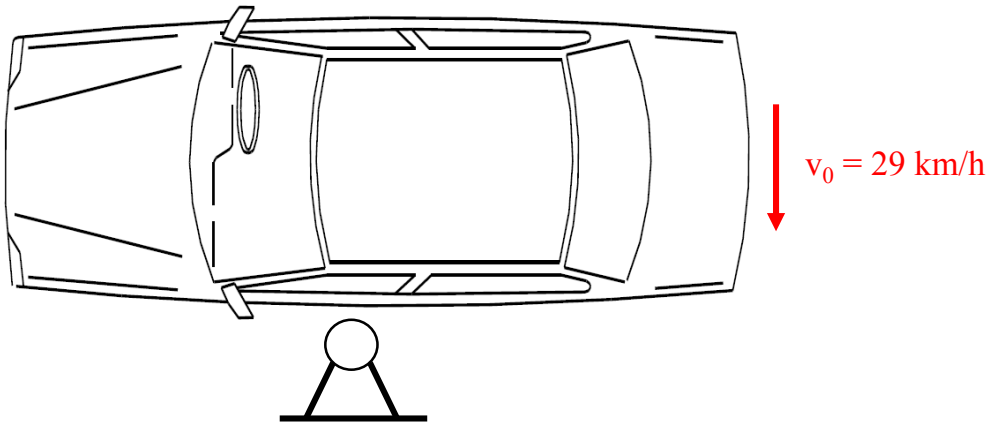


Abbildung 2-3: Aufbau des Euro NCAP Pfahlaufpralls, modifiziert aus [Euro NCAP 2011 und 2012]

Kriterien, um die passive Sicherheit eines Fahrzeugs bei einem Unfall zu bewerten, sind zahlreich. Dazu zählen z.B.:

- die Deformation der Fahrgastzelle,
- die Intrusion von anderen Objekten in das Fahrzeug,
- die Belastung der Fahrzeuginsassen durch auftretende Verzögerungen und in die Fahrgastzelle eindringende Objekte oder Fahrzeugteile wie den Motorblock,
- die Integrität des Fahrzeugs im Sinne von sich lösenden und umherfliegenden Teilen,
- die Entzündungs- oder Explosionsneigung des Fahrzeugs.

Die Hauptwerkzeuge bei der Auslegung von Crashstrukturen und des Gesamtfahrzeugs nach den Aspekten der passiven Sicherheit sind Crashversuche und Crashsimulationen. Im Crashversuch werden die Fahrzeuginsassen durch Dummys abgebildet, welche Sensoren enthalten, um auftretende Verschiebungen, Geschwindigkeiten, Beschleunigungen und Kräfte zu messen. In der Crashsimulation werden die Dummys für gewöhnlich durch *Finite Elemente* diskretisiert und es werden an den Dummy-Modellen ähnliche Auswertegrößen wie in den Crashversuchen gemessen.

Basierend auf diesen Auswertegrößen können Verletzungsindikatoren die Wahrscheinlichkeit des Eintretens und die Schwere von Verletzungen abschätzen. Ein Beispiel hierfür ist das *Head Injury Criterion* (*HIC*), welches im Kopf des Dummys gemessene Beschleunigungen verwendet und die Wahrscheinlichkeit des Eintretens einer schweren Kopfverletzung abschätzt.

Die Zeitpunkte t_2 und t_1, zwischen denen die Kopfbeschleunigung a_k ausgewertet wird, werden dabei so gewählt, dass der folgende Ausdruck maximal wird:

$$HIC = \left[\frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \int_{t_1}^{t_2} a_k(t)\mathrm{d}t\right]^{2,5} \cdot (t_2 - t_1)\,. \tag{2-4}$$

Die Kopfbeschleunigung wird in g, also als Vielfaches der Erdbeschleunigung angegeben. Alle Zeitangaben sind in s und die maximale Zeitdifferenz beträgt für gewöhnlich 0,015 s (HIC_{15}) oder 0,036 s (HIC_{36}). Der *HIC-Wert* wird sowohl von Gesetzgebern als auch von Konsumententests benutzt. Beispielsweise wird im Lastfall *Euro NCAP* Frontalaufprall für die Bewertung der Insassensicherheit als kritischer Grenzwert $HIC_{36} = 1000$ verwendet [Euro NCAP 2013].

2.1.3 Besonderheiten der Crashsimulation

Die Hauptgleichung einer linear statischen *FE-Analyse* wie z.B. einer Festigkeitsanalyse lässt sich charakterisieren durch die Steifigkeitsmatrix $\underline{K}$ der zu berechnenden Struktur, den Vektor der Verschiebungen $\vec{d}$ der *FE-Knoten* und den Kraftvektor $\vec{f}$ der angreifenden Kräfte:

$$\underline{K} \cdot \vec{d} = \vec{f}\,. \tag{2-5}$$

Diese Gleichung lässt sich nach dem Verschiebungsvektor $\vec{d}$ auflösen, indem die Steifigkeitsmatrix $\underline{K}$ invertiert wird.
Unter Crashsimulationen werden in dieser Dissertation nichtlinear dynamische *FE-Simulationen* verstanden. Neben der Berechnung im Zeitbereich liegt der Unterschied zu linear statischen *FE-Simulationen* hauptsächlich in der Existenz von Nichtlinearitäten aus drei unterschiedlichen Quellen, welche im Folgenden beschrieben werden.

- **Nichtlineare Geometrie**: Der Kraftvektor $\vec{f}$ und/oder die Steifigkeitsmatrix $\underline{K}$ sind abhängig von der aktuellen Deformation der Struktur, welche durch den Verschiebungsvektor $\vec{d}$ beschrieben wird. Dies tritt bei großen Verschiebungen und Rotationen auf, kann aber auch schon bei geringen Deformationen auftreten, wenn sich hierdurch das mechanische Verhalten der Struktur verändert.
- **Nichtlineares Material**: Plastisches Materialverhalten und geschwindigkeitsabhängiges Materialverhalten, wie es z.B. bei Dehnratenabhängigkeit auftritt, sorgen für ein nichtlineares Materialverhalten. Auch Materialschädigungsmodelle zählen hierzu.

- **Nichtlineare Randbedingungen**: Bei einem Crashproblem wird ein Großteil der auftretenden Kräfte durch Kontakt übertragen. Dies umfasst sowohl den Kontakt von Komponenten mit sich selbst, als auch mit anderen Komponenten.

Die in der Crashsimulation zu lösende Bewegungsgleichung des Systems lässt sich durch die Massenmatrix $\underline{M}$, die Dämpfungsmatrix $\underline{D}$, die Steifigkeitsmatrix $\underline{K}$ und den Kraftvektor $\vec{f}$ charakterisieren. Die Matrizen $\underline{M}$, $\underline{D}$ und $\underline{K}$ werden im Folgenden als Systemmatrizen bezeichnet. Der Kraftvektor und die Systemmatrizen können theoretisch direkt von den Zustandsgrößen des Systems abhängen: dem Beschleunigungsvektor $\vec{a}$, dem Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}$ und dem Verschiebungsvektor $\vec{d}$. Bei Crashproblemen besteht aufgrund der nichtlinearen Geometrie i.d.R. eine Abhängigkeit von dem Verschiebungsvektor und die Bewegungsgleichung für den Zeitpunkt t lautet:

$$\underline{M}^{(t)}(\vec{d}^{(t)}) \cdot \vec{a}^{(t)} + \underline{D}^{(t)}(\vec{d}^{(t)}) \cdot \vec{v}^{(t)} + \underline{K}^{(t)}(\vec{d}^{(t)}) \cdot \vec{d}^{(t)} = \vec{f}^{(t)}(\vec{d}^{(t)}) \,. \tag{2-6}$$

Aufgrund dieser Abhängigkeiten ist diese Differentialgleichung zweiter Ordnung nichtlinear und muss entweder iterativ mit impliziten Verfahren oder durch eine näherungsweise Zeitintegration mit expliziten Verfahren gelöst werden.

Das explizite Verfahren wird auch als *Explizite Zeitintegration* bezeichnet und basiert auf einer Extrapolation der Zustandsgrößen des Systems ($\vec{d}$, $\vec{v}$ und $\vec{a}$) von einem Zeitpunkt $t = t_n$ auf den nächsten Zeitpunkt $t = t_{n+1}$. Hierbei ist Δt die Zeitschrittweite, also die Zeitdifferenz zwischen zwei Zeitpunkten und der Index n steht für den Zeitschritt.
Der Geschwindigkeitsvektor einen halben Zeitschritt vor (Gleichung (2-7)) und nach (Gleichung (2-8)) dem aktuellen Zeitschritt lässt sich durch eine Differentiation des Verschiebungsvektors unter Verwendung des *Verfahrens der Zentralen Differenzen* näherungsweise bestimmen:

$$\vec{v}^{(t_{n-0,5})} = \frac{\vec{d}^{(t_n)} - \vec{d}^{(t_{n-1})}}{\Delta t}, \tag{2-7}$$

$$\vec{v}^{(t_{n+0,5})} = \frac{\vec{d}^{(t_{n+1})} - \vec{d}^{(t_n)}}{\Delta t}. \tag{2-8}$$

Der Geschwindigkeitsvektor zum aktuellen Zeitpunkt t_n wird unter Annahme eines linearen Verlaufs zwischen den Zeitschritten näherungsweise bestimmt als:

$$\vec{v}^{(t_n)} = \frac{\vec{v}^{(t_{n+0,5})} + \vec{v}^{(t_{n-0,5})}}{2} = \frac{\vec{d}^{(t_{n+1})} - \vec{d}^{(t_{n-1})}}{2 \cdot \Delta t}. \tag{2-9}$$

Der Beschleunigungsvektor wird ebenfalls unter Verwendung von *Zentralen Differenzen* aus dem Geschwindigkeitsvektor einen halben Zeitschritt früher und später approximiert:

$$\vec{a}^{(t_n)} = \frac{\vec{v}^{(t_{n+0,5})} - \vec{v}^{(t_{n-0,5})}}{\Delta t} = \frac{\vec{d}^{(t_{n+1})} - 2 \cdot \vec{d}^{(t_n)} + \vec{d}^{(t_{n-1})}}{\Delta t^2}. \tag{2-10}$$

Wird nun die Bewegungsgleichung (2-6) für den Zeitpunkt t_n aufgestellt, sowie (2-9) und (2-10) eingesetzt, taucht in der Gleichung neben den bekannten Verschiebungen $\vec{d}^{(t_n)}$ und $\vec{d}^{(t_{n-1})}$ die unbekannte Verschiebung $\vec{d}^{(t_{n+1})}$ auf:

$$\underline{M}^{(t_n)} \cdot \frac{\vec{d}^{(t_{n+1})} - 2 \cdot \vec{d}^{(t_n)} + \vec{d}^{(t_{n-1})}}{\Delta t^2} + \underline{D}^{(t_n)} \cdot \frac{\vec{d}^{(t_{n+1})} - \vec{d}^{(t_{n-1})}}{2 \cdot \Delta t} + \underline{K}^{(t_n)} \cdot \vec{d}^{(t_n)} = \vec{f}^{(t_n)}. \tag{2-11}$$

Nach dem unbekannten Verschiebungsvektor $\vec{d}^{(t_{n+1})}$ umgestellt lautet die Gleichung:

$$\left(\frac{\underline{M}^{(t_n)}}{\Delta t^2} + \frac{\underline{D}^{(t_n)}}{2 \cdot \Delta t}\right) \cdot \vec{d}^{(t_{n+1})} = \vec{f}^{(t_n)} + \left(2 \cdot \frac{\underline{M}^{(t_n)}}{\Delta t^2} - \underline{K}^{(t_n)}\right) \cdot \vec{d}^{(t_n)} + \left(\frac{\underline{D}^{(t_n)}}{2 \cdot \Delta t} - \frac{\underline{M}^{(t_n)}}{\Delta t^2}\right) \cdot \vec{d}^{(t_{n-1})}. \tag{2-12}$$

Die Systemmatrizen und der Kraftvektor können vom Verschiebungsvektor abhängen. Für deren Erzeugung wird die bekannte Größe $\vec{d}^{(t_n)}$ des vorherigen Zeitpunkts t_n verwendet. Nach der Bestimmung von $\vec{d}^{(t_{n+1})}$ können der Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}^{(t_n)}$ und Beschleunigungsvektor $\vec{a}^{(t_n)}$ für den Zeitpunkt t_n mit den Gleichungen (2-9) und (2-10) berechnet werden. Somit sind dann für den Zeitpunkt t_n alle Zustandsgrößen und für den Zeitpunkt t_{n+1} der Verschiebungsvektor bekannt. Auf diese Art und Weise kann die Bewegungsgleichung im gesamten Zeitraum sukzessive und näherungsweise gelöst werden.

Da zu den einzelnen Zeitpunkten die Zustandsgrößen nicht zwingend zu einem Gleichgewicht in der Bewegungsgleichung führen, handelt es sich bei der *Expliziten Zeitintegration* um eine Näherungslösung. Der Vorteil gegenüber impliziten Verfahren liegt bei hochgradig nichtlinearen Problemen in der deutlich höheren Effizienz im Sinne des Berechnungsaufwands. Bei impliziten Verfahren muss die Bewegungsgleichung zwar zu weniger Zeitpunkten gelöst werden (die Zeitschrittweite Δt ist größer), aber besonders nichtlineare Randbedingungen (Kontakt) führen dazu, dass die Lösungen nur mit einer hohen Anzahl von Iterationen gefunden werden können. Diese sog. *Gleichgewichtsiterationen* sind notwendig, da die Zustandsgrößen für den Zeitpunkt t_n durch ein Gleichgewicht der Bewegungsgleichung

bestimmt werden und sowohl die Systemmatrizen als auch der Kraftvektor von dem unbekannten Verschiebungsvektor abhängen können.

Für die Bestimmung der maximalen Zeitschrittweite Δt_{max} bei der *Expliziten Zeitintegration*, welche gleichzeitig die für die Stabilität des Verfahrens kritische Zeitschrittweite darstellt, sind die kleinste charakteristische Elementkantenlänge im *FE-Modell* l_{min} und die Schallgeschwindigkeit im verwendeten Material c maßgeblich. Letztere hängt bei einer eindimensionalen Wellenausbreitung vom Elastizitätsmodul E und der Dichte ρ des Materials ab. Die maximale Zeitschrittweite Δt_{max} ist der Zeitraum, den eine bei Stoßphänomenen auftretende Spannungswelle benötigt, um die Entfernung l_{min} zurückzulegen und ergibt sich für eine eindimensionale Wellenausbreitung als:

$$\Delta t_{max} = \frac{l_{min}}{c} = \frac{l_{min}}{\sqrt{\frac{E}{\rho}}}. \tag{2-13}$$

Knicken und Beulen von einzelnen Bereichen einer Struktur führt zu geometrischen Instabilitäten und kann dadurch zu Verzweigungspunkten führen. An Verzweigungspunkten kann aus mechanischer Sicht nicht bestimmt werden, welche Deformation die Struktur im weiteren Verlauf durchführen wird. Ein Beispiel für einen Verzweigungspunkt ist der Zeitpunkt des Knickens eines auf Druck belasteten perfekten Stabes. Der Stab knickt bei Erreichen der kritischen Druckkraft, die Richtung des Ausknickens kann jedoch nicht bestimmt werden. In der Realität existiert kein perfekter Stab und geometrische Imperfektionen treten bereits durch den Herstellungsprozess auf. Ebenso wird in der Realität die Druckkraft nicht exakt parallel zu der Achse des Stabes aufgebracht werden können. Dies führt dazu, dass in der Realität die Knickrichtung des Stabes nicht zufällig ist, auch wenn sie aufgrund von mangelnden Informationen über alle an dem Prozess beteiligten Parameter nicht näher bestimmt werden kann.
In einer Crashsimulation handelt es sich i.d.R. aber um perfekte Strukturen und perfekte Lasteinleitungen und die weitere Deformation nach einem Verzweigungspunkt ist zunächst unbestimmt. Hierdurch kann es geschehen, dass bei der Ausführung einer Crashsimulation auf zwei unterschiedlichen Computern trotz absolut identischer Problemstellung unterschiedliche Ergebnisse entstehen. Dies tritt ein, wenn Rundungsoperationen bei der Lösung der Bewegungsgleichung die weitere Deformation einer Struktur nach einem Verzweigungspunkt bestimmen, weil keine stärkeren Bestimmungsfaktoren vorliegen. Diesem Phänomen kann begegnet werden, indem geometrische Imperfektionen für die zu berechnende Struktur vorgegeben werden. Beispielsweise können Wanddicken in Abhängigkeit von der Position der *Finiten Elemente* im Raum variiert werden. Idealerweise erfolgt dies auf Grundlage von Informationen aus dem Herstellungsprozess der Struktur.

Aufgrund der Existenz von Verzweigungspunkten ist es bei Crashproblemen besonders wichtig, Robustheitsuntersuchungen anzustellen. Unter Robustheit wird hier die Resistenz des mechanischen Verhaltens der Struktur gegenüber Streuungen von Parametern wie Materialwerten oder geometrischen Eigenschaften verstanden. Eine Robustheitsanalyse kann z.B. mit der *Monte Carlo Methode* durchgeführt werden. Hierbei werden für im Vorfeld definierte Parameter des zu untersuchenden Systems, wie z.B. geometrische Eigenschaften der Struktur, Streuungen definiert und die Parameter werden dann entsprechend zufällig variiert. Hierdurch kann der Einfluss der Streuungen auf relevante Zielgrößen ermittelt werden. Das bedeutet einen enormen Berechnungsaufwand, da für jede Parametervariation eine Crashsimulation durchgeführt werden muss.

Bei der Optimierung von crashbelasteten Strukturen ist die Berücksichtigung von Robustheit aufgrund des damit einhergehenden wesentlich höheren Berechnungsaufwands problematisch und ein Feld der aktuellen Forschung wie z.B. in [Schumacher und Olschinka 2008].

2.2 Grundlagen der Strukturoptimierung

2.2.1 Begriffsdefinitionen

Unter dem Begriff „Optimum“ wird in dieser Dissertation das beste erreichbare Resultat im Sinne einer bestimmten Funktion, eines Werts oder einer Eigenschaft verstanden. Eine Optimierung ist die Suche nach dem Optimum mit mathematischen Verfahren, Heuristiken oder anderen algorithmierbaren Methoden in einem automatisierten Prozess. Im Gegensatz hierzu ist ein manuell ausgeführtes Verbessern durch Ausprobieren keine Optimierung.
Der Begriff der Strukturoptimierung wird in dieser Dissertation für die Optimierung einer mechanischen Struktur hinsichtlich ihrer mechanischen Eigenschaften verwendet. Weitere wichtige Begrifflichkeiten der Optimierung sind im Folgenden definiert.

Strukturantwort	Mathematische Beschreibung einer Eigenschaft, eines Parameters oder einer Funktion der zu optimierenden Struktur, wie z.B. der Masse.
Zielfunktion	Mathematische Beschreibung des Ziels der Optimierung, also des Parameters, der Eigenschaft oder der Funktion, die optimiert (minimiert oder maximiert) werden soll. Hierfür wird eine Strukturantwort oder ein mathematischer Ausdruck aus mehreren Strukturantworten verwendet.

Restriktion	Mathematische Beschreibung einer Einschränkung, die während der Optimierung berücksichtigt werden muss. Hierfür werden wie bei der Definition der Zielfunktion Strukturantworten verwendet.
Entwurfsvariable	Veränderlicher Parameter der zu optimierenden Struktur, beispielsweise die Wanddicke einer Blechstruktur. Die Werte aller Entwurfsvariablen werden in dem Entwurfsvariablenvektor zusammengefasst.
Analysemodell	Ein Modell, mit welchem die Auswirkungen der Veränderung der Entwurfsvariablen auf die Strukturantworten der Struktur während der Optimierung ermittelt werden können. In der Strukturoptimierung sind Analysemodelle häufig *FE-Modelle* (*Finite Elemente Modelle*).
Funktionsaufruf	Der Aufruf aller Analysemodelle zur Bestimmung der Strukturantworten nach einer Änderung der Entwurfsvariablen. In der Strukturoptimierung kann ein Funktionsaufruf z.B. die Simulation aller Lastfälle mit *FE-Modellen* sein.
Optimierungsproblem	Zusammenfassung der Zielfunktion, Restriktionen und Entwurfsvariablen in einer geschlossenen Problembeschreibung. Ein Beispiel hierfür ist die Minimierung der Masse einer Struktur unter Einhaltung von Steifigkeitsrestriktionen und unter Verwendung der Wanddicken der Struktur als Entwurfsvariablen.
Optimierungsalgorithmus	Mathematische Handlungsvorschrift zur Lösung eines Optimierungsproblems, also zur Minimierung oder Maximierung der Zielfunktion mit oder ohne Berücksichtigung der Restriktionen durch eine sukzessive Veränderung des Entwurfsvariablenvektors.
Optimierungsstrategie	Vereinfachung und Reduzierung von komplexen Aufgabenstellungen, die nicht direkt mit einem Optimierungsalgorithmus gelöst werden können.
Optimierungsmethode	Kombination von Optimierungsstrategien und Optimierungsalgorithmen, um das Werkzeug der Strukturoptimierung auf reale mechanische Fragestellungen anwenden zu können.

Den typischen Ablauf einer Optimierung zeigt Abbildung 2-4.

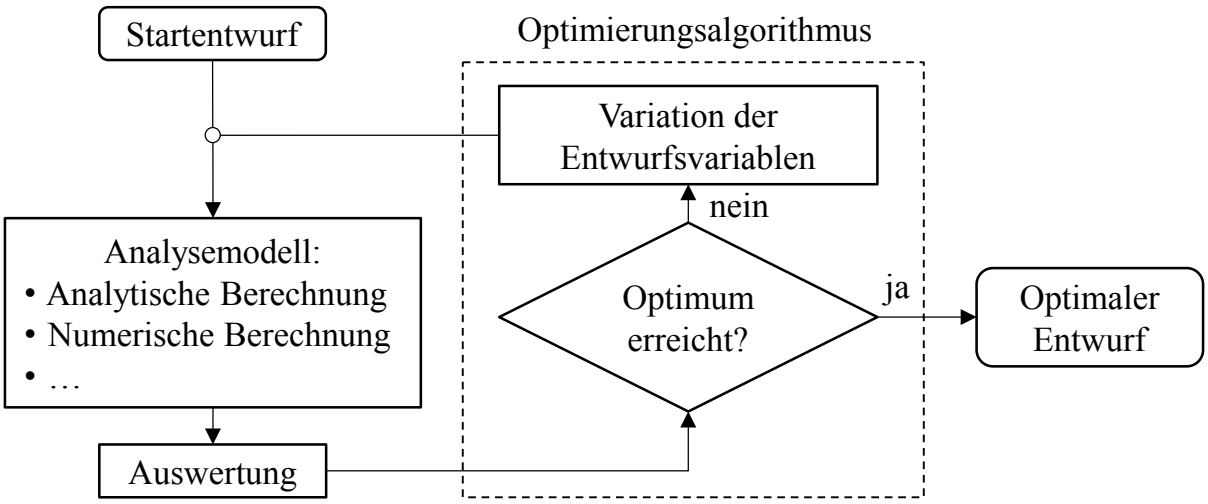


Abbildung 2-4: Ablauf einer Optimierung, modifiziert aus [Schumacher 2013a]

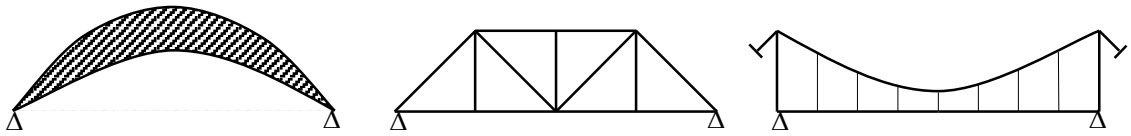
2.2.2 Arten der Strukturoptimierung

Anhand der Art der verwendeten Entwurfsvariablen lässt sich eine Strukturoptimierung in unterschiedliche Kategorien einordnen. Eine gebräuchliche Klassifikation nach Schmit und Mallet [1963] zeigt Abbildung 2-5 und lässt sich wie folgt zusammenfassen:

- Wahl der Bauweise: Die Festlegung der Art der mechanischen Struktur, beispielsweise die Unterscheidung zwischen einem Fachwerk und einer Schalenstruktur.
- Wahl der Materialeigenschaften: Die Auswahl eines oder mehrerer Konstruktionsmaterialien für die Struktur, z.B. Aluminium für einen bestimmten Teil der Struktur und Stahl für einen anderen Teil.
- Topologieoptimierung: Die Optimierung der Topologie der Struktur, wobei die Topologie die Lage und die Anordnung von Strukturelementen im Raum beschreibt. Diese Eigenschaften gehen durch ein Dehnen, Stauchen, Biegen, Verdrillen oder Verzerren der Struktur nicht verloren. Eine klassische Anschauung: Eine Tasse mit einem geschlossenen Henkel und ein Donut gehören beide trotz der vollkommen unterschiedlichen Gestalt der gleichen Topologieklasse an, sie sind topologisch äquivalent (beide weisen einen Durchbruch auf). In einer Fachwerkstruktur könnten die Entwurfsvariablen in einer Topologieoptimierung beispielsweise die Anzahl und die Anordnung der Stäbe definieren.
- Formoptimierung: Die Optimierung der Form der Struktur ohne die Veränderung der Topologieklasse. Beispielsweise könnten in einer Fachwerkstruktur die Entwurfsvariablen die Positionen der Stäbe und der Verbindungspunkte der Stäbe beschreiben.

- Dimensionierung: Die Optimierung von Wanddicken und Querschnittsgrößen der Struktur ohne eine Veränderung der Topologieklasse und der Form der Struktur. In einer Fachwerkstruktur, bestehend aus Rohren, könnten die Entwurfsvariablen z.B. die Wanddicken definieren.

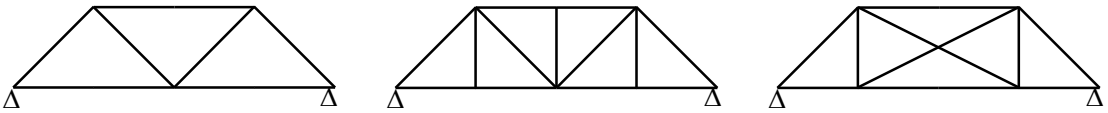
Wahl der Bauweise:



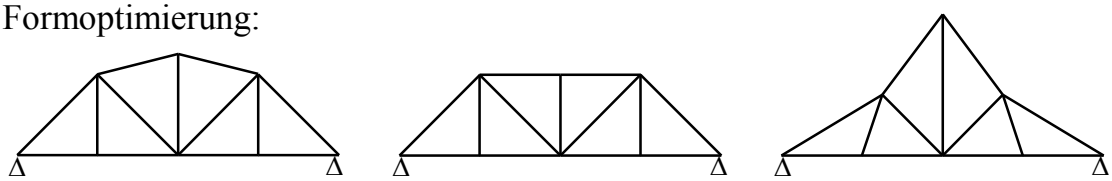
Wahl der Materialeigenschaften:

- Aluminium - Stahl - Verbundwerkstoffe

Topologieoptimierung:



Formoptimierung:



Dimensionierung:

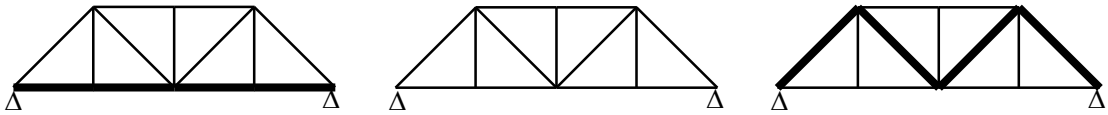


Abbildung 2-5: Klassifikation von Strukturoptimierungsproblemen anhand der Art der verwendeten Entwurfsvariablen, modifiziert aus [Schumacher 2013a]

Die alleinige Optimierung der mathematischen Topologieklasse einer mechanischen Struktur ist i.d.R. nicht zielführend und der Begriff der Topologieoptimierung wird daher meist für eine kombinierte Topologie- und Formoptimierung oder eine kombinierte Topologieoptimierung, Formoptimierung und Dimensionierung verwendet.

2.2.3 Mathematische Formulierung eines Optimierungsproblems

Eine Optimierung lässt sich ausdrücken als die Minimierung der von dem Vektor der Entwurfsvariablen $\vec{x}$ abhängenden Zielfunktion $f(\vec{x})$:

$$f^* = f(\vec{x}^*) = \min_{\vec{x}}[f(\vec{x})]\,. \tag{2-14}$$

Eine Maximierung der Zielfunktion kann umformuliert werden als:

$$f^{*max} = f(\vec{x}^{*max}) = -\min_{\vec{x}}[-f(\vec{x})]\,. \tag{2-15}$$

Je nach Definition des Optimierungsproblems müssen hierbei Restriktionen eingehalten werden, welche den zulässigen Entwurfsraum beschränken können. In dem zulässigen Entwurfsraum liegen alle potentiell möglichen Entwurfsvariablenvektoren, für welche die Restriktionen erfüllt sind. Die Restriktionen in Abhängigkeit des Vektors der Entwurfsvariablen $\vec{x}$ lassen sich dabei in drei Kategorien einordnen [Schumacher 2013a] und ausdrücken als:

Ungleichheitsrestriktion	$g_j(\vec{x}) \leq 0$	mit $j = 1, \dots, J$,	(2-16)
Gleichheitsrestriktion	$h_k(\vec{x}) = 0$	mit $k = 1, \dots, K$,	(2-17)
Explizite Restriktion	$x_i^l \leq x_i \leq x_i^u$	mit $i = 1, \dots, I$.	(2-18)

Eine Restriktion gilt als aktiv, wenn sich der aktuelle Entwurf mit seinem Entwurfsvariablenvektor exakt auf einer durch die Restriktion definierten Grenze befindet. Eine Gleichheitsrestriktion ist immer aktiv. Wenn sich beispielsweise durch eine Optimierung die Masse der Struktur nicht verändern darf, wäre dies eine Gleichheitsrestriktion. Eine Ungleichheitsrestriktion gilt dann als aktiv, wenn sie den Wert 0 annimmt. Ein Beispiel für eine Ungleichheitsrestriktion ist die Definition einer maximalen Masse, welche die Struktur nicht überschreiten darf. Explizite Restriktionen sind direkte Grenzen für einzelne Entwurfsvariablen, z.B. eine minimale und maximale Wanddicke für eine Entwurfsvariable, welche die Wanddicke eines Bleches beschreibt.

2.2.4 Einordnung von Optimierungsalgorithmen

Die Anzahl der heute verfügbaren Optimierungsalgorithmen ist groß, da unterschiedlichste Optimierungsalgorithmen sowohl in kommerziellen Softwareumsetzungen implementiert als auch frei zugänglich im Internet zu finden sind. Ebenso vielfältig wie die Optimierungsalgorithmen an sich sind die Klassifizierungsmöglichkeiten, da sich die Optimierungsalgorithmen in ihrer Struktur und Arbeitsweise stark voneinander unterscheiden können. Hybride Optimierungsalgorithmen machen eine Einordnung in vorgegebene Klassen jedoch

schwierig und daher wird an dieser Stelle auf den Versuch einer starren Klassifizierung verzichtet und es werden stattdessen wesentliche Unterscheidungsmerkmale diskutiert.

Verwendung von Sensitivitäten versus stochastische Kriterien

Sensitivitäten sind die partiellen Ableitungen der Zielfunktion und der Restriktionen nach den Entwurfsvariablen. Hierdurch ist der Einfluss der Entwurfsvariablen auf die Zielfunktion und die Restriktionen bei einem bestimmten Entwurf bekannt und der neue Entwurfsvariablenvektor kann effizient bestimmt werden. Bei der Verwendung von linear statischen *FE-Simulationen* kann beispielsweise die Sensitivität für den Verschiebungsvektor $\vec{d}$ in Abhängigkeit einer kontinuierlichen Entwurfsvariablen x_n durch die Differentiation der Hauptgleichung der *FE-Methode* (siehe Gleichung (2-5)) ermittelt werden. Mit der Produktregel ergibt sich zunächst:

$$\underline{K} \cdot \frac{\partial \vec{d}}{\partial x_n} + \frac{\partial \underline{K}}{\partial x_n} \cdot \vec{d} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_n}. \tag{2-19}$$

Die gesuchte Sensitivität $\partial \vec{d} / \partial x_n$ kann wie folgt mit geringem Aufwand berechnet werden, da die Invertierung der Steifigkeitsmatrix $\underline{K}$ bereits bei der Lösung der Hauptgleichung durchgeführt wurde:

$$\frac{\partial \vec{d}}{\partial x_n} = \underline{K}^{-1} \cdot \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_n} - \underline{K}^{-1} \cdot \frac{\partial \underline{K}}{\partial x_n} \cdot \vec{d}\,. \tag{2-20}$$

Die Ableitungen $\partial \vec{f} / \partial x_n$ und $\partial \underline{K} / \partial x_n$ können durch numerische Differentiation wie z.B. das *Vorwärtsdifferenzenverfahren* ermittelt werden. In diesem Fall wird die Ermittlung der Sensitivitäten dann als „semianalytisch“ bezeichnet. Für viele Anwendungen kann die Bestimmung der Sensitivitäten aber vollkommen analytisch erfolgen. Beide Vorgehensweisen werden im Folgenden als „analytische Bestimmung der Sensitivitäten“ bezeichnet, da hier keine zusätzlichen Funktionsaufrufe (Hauptarbeit: Invertierung der Steifigkeitsmatrix) durchgeführt werden müssen. Aufgrund der Verwendung von *Expliziter Zeitintegration* (siehe Abschnitt 2.1.3) können bei Crashsimulationen die Sensitivitäten nicht mehr auf die beschriebene Vorgehensweise ermittelt werden. Sie können durch numerische Differentiation bestimmt werden, wobei dann aber für jede Entwurfsvariable mindestens ein zusätzlicher Funktionsaufruf durchgeführt werden muss.

Oftmals sind Optimierungsalgorithmen für die Dimensionierung einer Struktur direkt in den *FE-Solver* integriert (z.B. in *MSC Nastran*®). Ein Beispiel für einen auf Sensitivitäten basierenden Optimierungsalgorithmus ist die *Methode des steilsten Abstiegs*. Hierbei wird der

neue Entwurfsvariablenvektor so bestimmt, dass er in Richtung des negativen Gradienten und somit in Richtung des steilsten Abstiegs der Zielfunktion liegt.
Optimierungsalgorithmen, die keine Sensitivitäten verwenden, nutzen meist stochastische Kriterien für die Bestimmung des neuen Entwurfsvariablenvektors. Ein Beispiel hierfür sind *Genetische Algorithmen*. Hierbei wird ein evolutionärer Prozess mit der Vererbung von Eigenschaften (Werte der Entwurfsvariablen) simuliert. Die sog. *Fitness* von verschiedenen Entwürfen wird bestimmt, indem für die Entwürfe Funktionsaufrufe durchgeführt und die Werte der Zielfunktion und der Restriktionen ermittelt werden. Entwürfe mit einer hohen *Fitness* dürfen sich untereinander „fortpflanzen“ und ihre Eigenschaften zur Erzeugung neuer Entwürfe miteinander kombinieren.

Können die Sensitivitäten analytisch bereitgestellt werden, sind auf Sensitivitäten basierende Optimierungsalgorithmen im Sinne benötigter Funktionsaufrufe deutlich effizienter als auf stochastischen Kriterien basierende Optimierungsalgorithmen. Dieser Effekt wird mit zunehmender Anzahl von Entwurfsvariablen noch verstärkt.

Verwendung von Approximationen
Viele Optimierungsalgorithmen verwenden Approximationen der Zielfunktion und der Restriktionen im Entwurfsraum, um das Optimierungsproblem zu lösen. Hierbei kann zwischen lokalen und globalen Approximationen unterschieden werden.
Eine globale Approximation versucht, den gesamten Entwurfsraum mit einem Meta-Modell zu beschreiben. Hierbei kann es sich um einfache Ansätze wie Polynome, aber auch um komplexere Herangehensweisen wie beispielsweise *Kriging* [Krige 1951] handeln. Ist eine globale Approximation aufgebaut, können Zusammenhänge zwischen den Entwurfsvariablen und deren Einfluss auf die Zielfunktion und die Restriktionen einfacher analysiert und dargestellt werden. Die Suche nach dem Optimum kann dann auf dem Meta-Modell erfolgen und die dafür notwendigen Funktionsaufrufe sind hierbei keine *FE-Simulationen* mehr, sondern lediglich analytische Berechnungen der Ausgabewerte des Meta-Modells. Der gravierendste Nachteil einer globalen Approximation ist, dass die Abbildung des Entwurfsraums durch das Meta-Modell für die Nutzung der beschriebenen Vorteile exakt genug sein muss.
Zur Bestimmung der Punkte im Entwurfsraum, deren Strukturantworten mit Funktionsaufrufen ermittelt und die für den Aufbau einer globalen Approximation verwendet werden, können Versuchspläne benutzt werden. Diese Punkte im Entwurfsraum werden als Stützstellen bezeichnet. Die Versuchspläne sind so gestaltet, dass die Abtastung des Entwurfsraums mit einer begrenzten Anzahl von Funktionsaufrufen zu einer möglichst hohen Qualität der globalen Approximation führen soll. Ein Beispiel hierfür ist der Versuchsplan *3-level Full Factorial*. Hierbei werden für jede Entwurfsvariable drei Variationsstufen durchgeführt, bei denen sich die Werte aller Entwurfsvariablen ändern. Dieses Prinzip veranschau-

licht Abbildung 2-6 anhand der Verteilung der Stützstellen für zwei Entwurfsvariablen. Insgesamt werden für die Durchführung dieses Versuchsplans 3^n Funktionsaufrufe benötigt, wobei n der Anzahl der Entwurfsvariablen entspricht. Dies macht deutlich, dass der Einsatz von globalen Approximationen bereits bei einer moderaten Anzahl von Entwurfsvariablen problematisch ist. Bei 10 Entwurfsvariablen werden hier bereits $3^{10} = 59049$ Funktionsaufrufe benötigt.

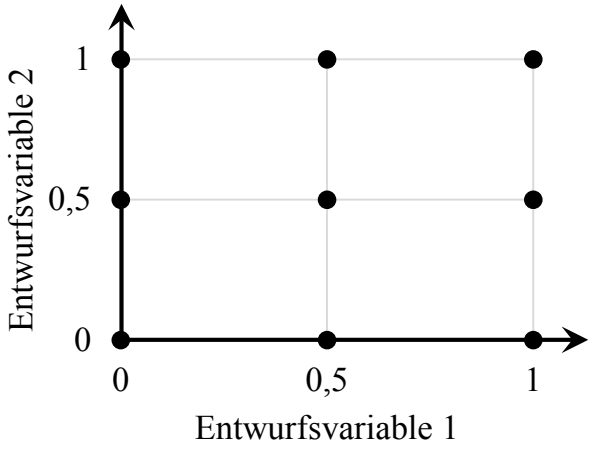


Abbildung 2-6: Verteilung der Stützstellen des Versuchsplans „3-level Full Factorial“ bei zwei Entwurfsvariablen

Lokale Approximationen haben nicht den Anspruch den gesamten Entwurfsraum abzubilden, sondern nur einen begrenzten Bereich um einen bestimmten Entwurfsvariablenvektor herum. Das Ziel hierbei ist die Unterstützung des Optimierungsalgorithmus bei der Suche nach dem neuen Entwurfsvariablenvektor. Grundlage für die Erstellung einer lokalen Approximation sind meist analytisch bestimmte Sensitivitäten.
Ein Beispiel für einen Optimierungsalgorithmus, der Approximationen des Entwurfsraums verwendet, ist *SRSM (Successive Response Surface Method)* [Stander and Craig 2002]. Hierbei wird ein einfaches Polynom, z.B. erster Ordnung, als Meta-Modell verwendet, um eine Suchregion zu approximieren. In der ersten Iteration entspricht diese Suchregion dem gesamten Entwurfsraum, wird aber im Laufe der Optimierung immer weiter verkleinert. Neben einer Verkleinerung kann die Suchregion auch im Entwurfsraum verschoben werden. Sowohl das Verschieben, als auch das Verkleinern der Suchregion geschehen immer in Richtung des vermuteten Optimums auf dem Meta-Modell. Durch die sukzessive Verkleinerung der Suchregion wird die Approximation der Suchregion im Laufe der Optimierung immer genauer.

Lokale versus globale Abtastung des Entwurfsraums
Die Funktionsverläufe der Zielfunktion und der Restriktionen haben Einfluss darauf, wie schwierig es einem Optimierungsalgorithmus fällt, das Optimum des Optimierungsproblems

zu finden. Besonders entscheidend ist die Eigenschaft der Konvexität. Als konvex gilt eine Funktion, wenn ihr Graph unterhalb aller Verbindungsstrecken zweier beliebiger Punkte der Funktion liegt. Abbildung 2-7 zeigt die Graphen zweier Funktionen, die von der Variable x abhängen. Die im rechten Teil der Abbildung dargestellte Funktion ist nicht-konvex, da der Graph der Funktion nicht unterhalb der Verbindungsstrecke zwischen den Punkten A und B liegt.

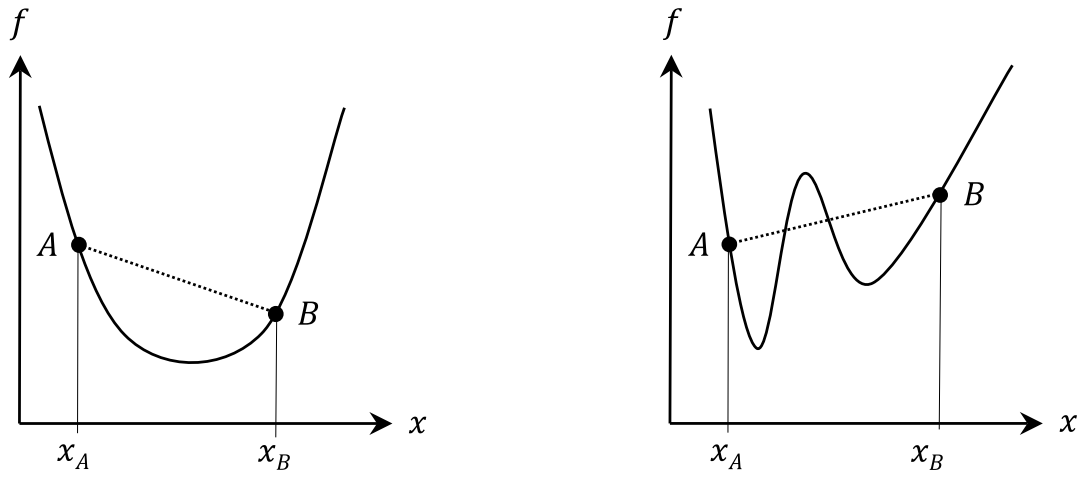


Abbildung 2-7: Beispiel einer konvexen (li.) und nicht-konvexen (re.) Funktion, modifiziert aus [Schumacher 2013a]

Ist die Zielfunktion nicht konvex, kann sie z.B. mehrere nicht gleichwertige Minima aufweisen. Das Minimum mit dem niedrigsten Zielfunktionswert ist dann das globale Minimum, während die anderen lokale Minima sind. Bei der Existenz solcher lokaler Minima besteht die Gefahr, dass der Optimierungsalgorithmus in einem lokalen Minimum endet und nicht das globale Minimum findet.

Auch nicht-konvexe Restriktionsfunktionen können eine Optimierung erschweren. Ist für den Startentwurf einer Optimierung beispielsweise eine Restriktion nicht erfüllt und der Startentwurf befindet sich an einem lokalen Minimum der Restriktionsfunktion, dann führt jede geringe Veränderung der Entwurfsvariablen dazu, dass diese Restriktion noch stärker verletzt wird.

Ein weiteres Unterscheidungsmerkmal von Optimierungsalgorithmen ist daher die Art der Abtastung des Entwurfsraums, wobei hier zwischen einer lokalen und einer globalen Abtastung des Entwurfsraums unterschieden werden kann.

Auf Sensitivitäten basierende Optimierungsalgorithmen weisen i.d.R. eine lokale Abtastung des Entwurfsraums auf. Von dem Startentwurf aus untersuchen sie mit Hilfe der Sensitivitäten den Entwurfsraum. Solche Optimierungsalgorithmen können das globale Optimum nur zuverlässig finden, wenn das Optimierungsproblem konvex ist, also die Zielfunktion und alle Restriktionsfunktionen konvex sind.

Eine globale Abtastung des Entwurfsraums versucht, den prinzipiellen Verlauf der Zielfunktion und der Restriktionen im Entwurfsraum zu erfassen und bietet daher die Möglichkeit, auch bei einem nicht-konvexen Optimierungsproblem das globale Optimum zu finden. Eine globale Abtastung des Entwurfsraums ist im Sinne der hierfür notwendigen Funktionsaufrufe immer deutlich aufwändiger als eine lokale Abtastung. Auf stochastischen Kriterien basierende Optimierungsalgorithmen wie z.B. *Genetische Algorithmen* und Optimierungsalgorithmen, die eine globale Approximation des Entwurfsraums verwenden, weisen eine globale Abtastung des Entwurfsraums auf.

2.3 Herausforderungen bei der Optimierung crashbelasteter Strukturen

Die Optimierung einer crashbelasteten Struktur ist für einen Optimierungsalgorithmus deutlich schwieriger als die Optimierung einer Struktur, welche nur einer linear statischen Belastung unterliegt. Hierfür existiert eine Reihe von Gründen, welche im Folgenden diskutiert wird.

Die bei Crashproblemen auftretenden Nichtlinearitäten sorgen dafür, dass auch die Strukturantworten hochgradig nichtlinear sind (siehe Abschnitt 2.1.3). In einer von Ortmann und Schumacher [2014b] vorgestellten Studie zum Einsatz von Metamodellen bei Optimierungen von Crashstrukturen wurde der Einfluss einer einzelnen Entwurfsvariable auf die Zielfunktion untersucht. Die Entwurfsvariable steuert die Position zweier Wände des Profilquerschnitts eines Aluminium-Rahmens und die Zielfunktion ist die Reaktionskraft der starren Wand, welche in den Rahmen einschlägt. Eine Zusammenfassung der Ergebnisse zeigt Abbildung 2-8. Im linken Teil der Abbildung sind der Rahmen und die starre Wand dargestellt, welche sich mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 auf den Rahmen zubewegt. Der rechte Teil der Abbildung zeigt die Strukturantwort „maximale Reaktionskraft“ der starren Wand in Abhängigkeit von der Position der inneren Wände des Rahmens, welche hier als Entwurfsvariable verwendet wird. Da keine analytische Beschreibung dieser Strukturantwort existiert, wird der Verlauf punktweise mit 500 Crashsimulationen ermittelt. Der Verlauf ist hochgradig nichtlinear und weist neben dem globalen Minimum drei stark ausgeprägte lokale Minima auf. Weitere lokale Minima entstehen durch den nicht-glatten Verlauf der Strukturantwort, für welchen sowohl die hohe Sensitivität der Strukturantwort auf geringfügige Änderungen der Entwurfsvariable verantwortlich ist, als auch in der Crashsimulation auftretende numerische Phänomene.

Crashsimulationen benötigen prinzipiell mehr Rechenressourcen als linear statische *FE-Simulationen*, da im Zeitbereich gerechnet wird und das Ermitteln und Lösen von Kontakten aufwändig ist. Daher stehen bei einer Optimierung einer Crashstruktur wesentlich weniger

Funktionsaufrufe zur Verfügung als bei einer Optimierung einer linear statisch belasteten Struktur. Bereits bei einer geringen Anzahl von Entwurfsvariablen ist die Anzahl der verwendbaren Funktionsaufrufe i.d.R. nicht groß genug, um eine zuverlässige globale Approximation des Entwurfsraums herzustellen (siehe Abschnitt 2.2.4). Die Anwendung von einem auf einer globalen Approximation basierenden Optimierungsalgorithmus ist daher schwierig.

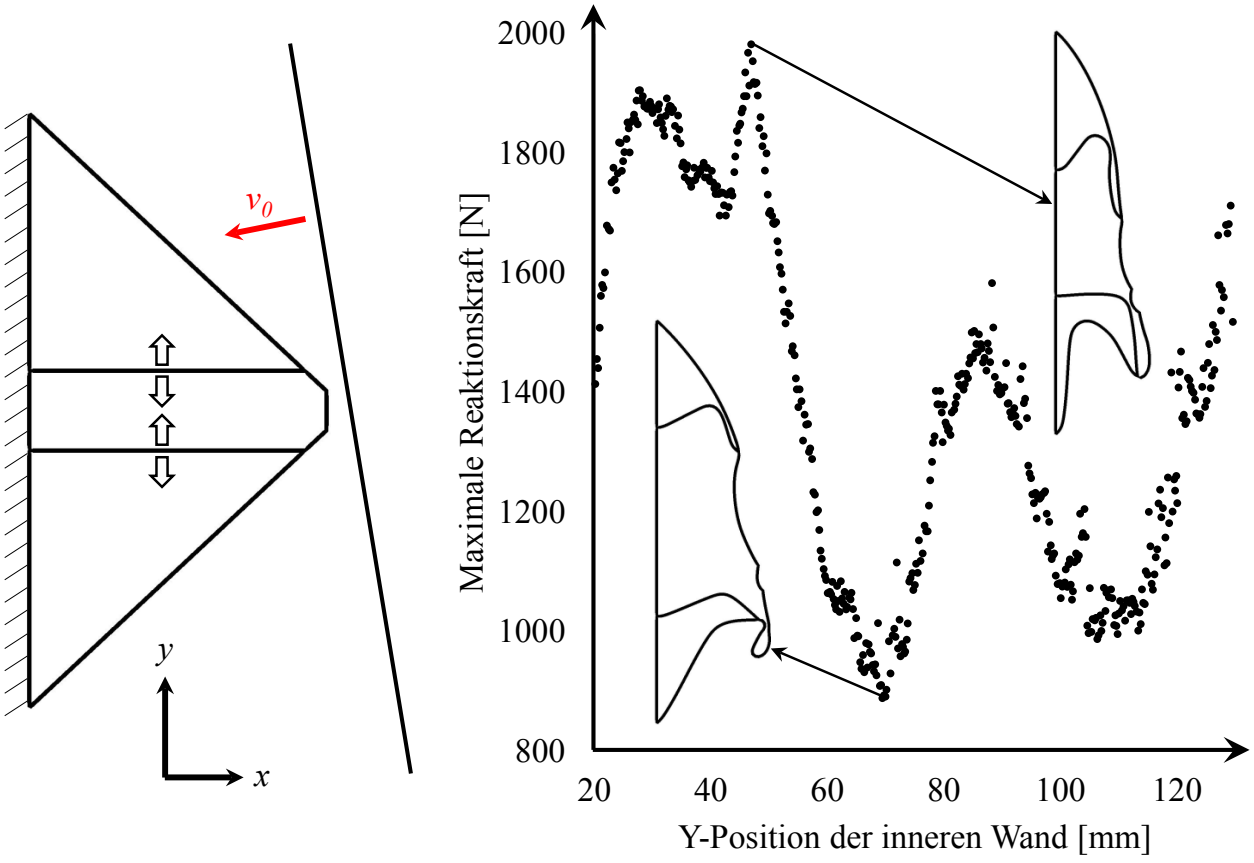


Abbildung 2-8: Strukturantwort einer Crashstruktur in Abhängigkeit einer Entwurfsvariable, modifiziert aus [Ortmann und Schumacher 2014a]

Durch die Verwendung der *Expliziten Zeitintegration* in den Crashsimulationen können die Sensitivitäten nicht mehr wie in Abschnitt 2.2.4 analytisch ermittelt werden. Wenn die Sensitivitäten z.B. mit dem *Vorwärtsdifferenzenverfahren* numerisch bestimmt werden, muss für jede Entwurfsvariable ein zusätzlicher Funktionsaufruf durchgeführt werden. Aufgrund des Ressourcenbedarfs jeder einzelnen Crashsimulation führt dies zu einem enormen Rechenaufwand. Selbst bei einer solchen numerischen Ermittlung der Sensitivitäten können diese jedoch nur eingeschränkt verwendet werden, da der Verlauf der Strukturantworten nicht-glatt ist und außerdem das Optimierungsproblem nicht-konvex sein kann. Auf Sensitivitäten basierende Optimierungsalgorithmen (siehe Abschnitt 2.2.4) finden daher bei der Optimierung von Crashstrukturen meist keine Anwendung.

In dem Kontext der Auswahl eines Optimierungsalgorithmus für eine Formoptimierung und/oder Dimensionierung einer crashbelasteten Struktur sind daher die folgenden Eignungsvoraussetzungen wesentlich:

(1) Bestimmung des neuen Vektors der Entwurfsvariablen, basierend auf stochastischen Kriterien oder über die Nutzung von Approximationen, nicht jedoch durch Sensitivitäten.
(2) Eine globale Abtastung des Entwurfsraums aufgrund der Existenz von lokalen Optima im Entwurfsraum und der nicht-glatten Strukturantworten.
(3) Die Fähigkeit mit einer geringen Anzahl von Funktionsaufrufen zu einer Lösung zu kommen.

Die in diesem Abschnitt beschriebenen Herausforderungen bei der Optimierung von crashbelasteten Strukturen sind dafür verantwortlich, dass das Finden des globalen Optimums bei solchen Optimierungsproblemen selbst bei einer hohen Anzahl von Funktionsaufrufen nicht garantiert ist.

2.4 Stand der Technik zur Topologieoptimierung von crashbelasteten Strukturen

Das Werkzeug der Topologieoptimierung wird in vielen industriellen Bereichen erfolgreich eingesetzt und für die Topologieoptimierung mit linear statischen Lasten existiert eine Reihe von effizienten Methoden, welche auch in unterschiedlichen kommerziellen Softwarelösungen implementiert sind.
Bendsøe und Kikuchi [1988] haben die *Homogenisierungsmethode* vorgestellt, bei welcher sich viele mikroskopisch kleine Hohlräume im Bauraum befinden. Die geometrischen Eigenschaften dieser Hohlräume werden als Entwurfsvariablen verwendet und haben durch eine Homogenisierung der Materialeigenschaften direkten Einfluss auf die Dichte (Masse) und die Steifigkeit der *Finiten Elemente*. Die Sensitivitäten werden analytisch bestimmt und ein Optimierungsalgorithmus, der diese Sensitivitäten zur Bestimmung des neuen Vektors der Entwurfsvariablen benutzt (siehe Abschnitt 2.2.4), wird für die Lösung des Optimierungsproblems eingesetzt. Der Zusammenhang zwischen der Dichte eines *Finiten Elements* und der Größe eines Hohlraums ist linear, der Zusammenhang ist bei der Steifigkeit jedoch nichtlinear. *Finite Elemente* mit einer mittleren Dichte haben in Relation zu ihrer Masse eine geringere Steifigkeit als *Finite Elemente* mit einer geringen oder einer hohen Dichte. Hierdurch haben die *Finiten Elemente* die Tendenz, entweder eine Dichte nahe 0 anzunehmen (kein Material) oder nahe 1 (Vollmaterial).

In der *SIMP-Methode* (*Solid Isotropic Material with Penalization*) wird auf den Zwischenschritt der Homogenisierung verzichtet und für jedes *Finite Element* des Bauraums wird eine Entwurfsvariable, die sog. *Künstliche Dichte* ρ_k, eingeführt, welche direkt die Dichte und den Elastizitätsmodul des *Finiten Elements* steuert. Die *künstliche Dichte* kann dabei Werte zwischen 0 (kein Material) und 1 (Vollmaterial) annehmen. Zwischendichten werden „bestraft“, indem ein nichtlinearer Zusammenhang zwischen der *künstlichen Dichte* und dem Elastizitätsmodul verwendet wird, der Zusammenhang zwischen der *künstlichen Dichte* und der Masse des *Finiten Elements* jedoch linear ist. Der nichtlineare Zusammenhang wird durch den sog. *Bestrafungsparameter* p gesteuert, wobei E_0 der Elastizitätsmodul des verwendeten Materials ist:

$$E = \rho_k^p \cdot E_0 \,. \tag{2-21}$$

Die Grundidee für diese populäre Methode zur Topologieoptimierung geht auf Bendsøe [1989] zurück, wobei der Begriff *SIMP* zuerst von Rozvany et al. [1992] erwähnt wird. Gegenüber der *Homogenisierungsmethode* hat die *SIMP-Methode* den Vorteil, dass sie weniger Entwurfsvariablen verwendet und leichter zu algorithmieren ist, jedoch geht auch die direkte physikalische Interpretierbarkeit verloren.
In Abbildung 2-9 sind zwei einfache Anwendungen der *SIMP-Methode* dargestellt. Der zweidimensionale Bauraum ist durch einen Rahmen verdeutlicht. Beide Strukturen sind durch zwei Festlager gelagert und werden mit Einzellasten beaufschlagt. Optimierungsziel ist die Minimierung der mittleren Nachgiebigkeit, was einer Maximierung der Steifigkeit entspricht, wobei maximal 30 % des Bauraums mit Material gefüllt werden dürfen. Die Ergebnisse wurden erzeugt mit einem webbasierten Programm zur Topologieoptimierung auf der Internetpräsenz der *TopOpt-Gruppe* der *Technical University of Denmark* [Tcherniak und Sigmund 2001].

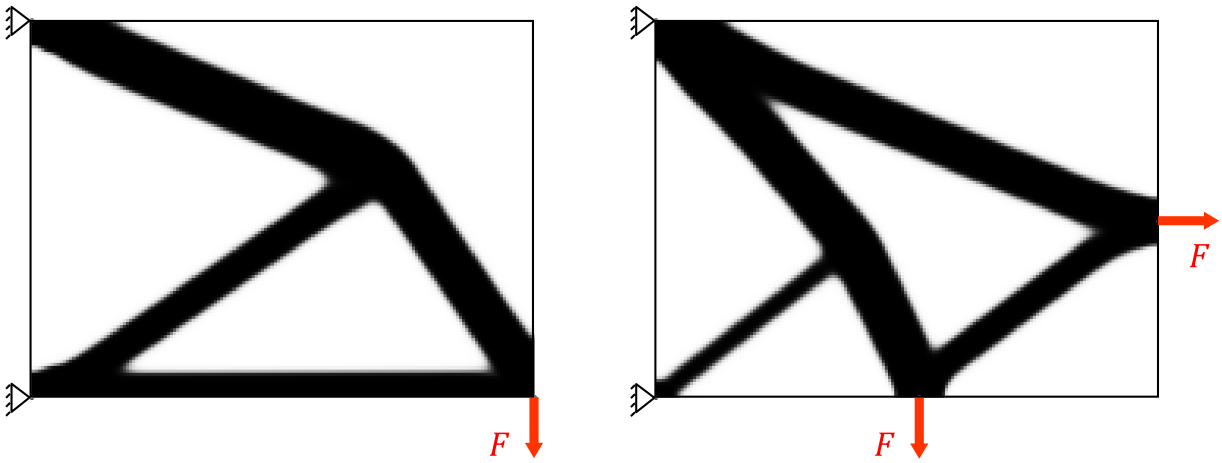


Abbildung 2-9: Einfache Anwendungen der SIMP-Methode

Neben der *Homogenisierungs*- und der *SIMP-Methode* wurde eine Reihe von anderen Methoden zur Topologieoptimierung von linear statisch belasteten Strukturen entwickelt. Beispiele hierfür sind die *Bubble-Methode* [Eschenauer et al. 1994] [Schumacher 2013a], die *Level-Set-Methode* [Sethian und Wiegman 2000] [Allaire et al. 2004] [Norato et al. 2007] oder das *SKO-Verfahren* (*Soft Kill Option*) [Baumgartner et al 1992].

Aufgrund der in Abschnitt 2.3 beschriebenen Herausforderungen bei der Optimierung von Crashstrukturen können die Methoden zur linear statischen Topologieoptimierung hier nicht eingesetzt werden. Besonders erschwerend ist die Tatsache, dass die Sensitivitäten aufgrund der expliziten Zeitintegration innerhalb einer Crashsimulation nicht mehr analytisch bestimmt werden können. In Topologieoptimierungsproblemen wird i.d.R. eine hohe Anzahl von Entwurfsvariablen verwendet und ohne die Hilfe von Sensitivitäten können diese nur schwierig verarbeitet werden.

Eine der ersten Veröffentlichungen auf dem Gebiet der Topologieoptimierung von crashbelasteten Strukturen stammt von Mayer et al. [1996]. Die dort vorgeschlagene Optimierungsmethode basiert auf der *Homogenisierungsmethode*. Die Homogenisierung der Materialwerte wird nicht nur für die Dichte und den Elastizitätsmodul, sondern auch für die Fließgrenze und den Verfestigungsmodul im plastischen Bereich des Materials durchgeführt. Die Aktualisierung des Entwurfsvariablenvektors während der Optimierung findet nicht wie in der *Homogenisierungsmethode* durch die Nutzung von Sensitivitäten statt, sondern durch eine Heuristik, welche die Entwurfsvariablen in Abhängigkeit der inneren Energien der *Finiten Elemente* verändert. Das der Heuristik zugrunde liegende Optimalitätskriterium sieht vor, dass die Struktur dann optimal ist, wenn die Verteilung der inneren Energiedichte in der Struktur homogenisiert ist. Die Heuristik hat das Ziel, die Energieaufnahme der Struktur zu vorgegebenen, gewichteten Zeitpunkten durch diese Homogenisierung zu maximieren. *Finite Elemente*, deren Volumen aufgrund der Größe ihres Hohlraums einen Schwellenwert unterschreitet, werden aus der Struktur entfernt und können nicht in die Struktur zurückkehren.
Die von Soto [2004] vorgestellte Optimierungsmethode verwendet eine ähnliche Materialparametrisierung, wie sie auch in der *SIMP-Methode* verwendet wird. Jedem *Finiten Element* wird eine Entwurfsvariable zugeordnet, welche Werte zwischen 0 und 1 annehmen kann. Ein Wert von 0 entspricht einem Material mit einer niedrigen Fließgrenze und einer hohen maximalen plastischen Dehnung. Ein Wert von 1 hingegen führt zu einem Material mit einer hohen Fließgrenze und einer niedrigen maximalen plastischen Dehnung. Die Materialwerte für Zwischenwerte der Entwurfsvariablen werden zwischen diesen beiden Materialzuständen interpoliert. Für die Veränderung des Entwurfsvariablenvektors von einer Iteration zur nächsten wird eine Heuristik verwendet, die auf dem sog. *Prescribed Plastic Strain/Stress Criterion* (*PPSS*) basiert. Hierbei wird ein Zielwert für die Spannungen oder

Dehnungen in der Struktur vorgegeben. Unterschreitet ein *Finites Element* diesen Zielwert, wird der Wert seiner Entwurfsvariablen verringert. Bei einer Überschreitung wird der Wert erhöht. In dieser Optimierungsmethode werden keine *Finiten Elemente* aus dem Bauraum gelöscht. In einem Anwendungsbeispiel in [Soto 2004] werden *Finite Elemente* mit einem Entwurfsvariablen-Wert nahe 0 als mit Schaum gefüllte Bereiche interpretiert.
Forsberg und Nilsson (2007) schlugen eine Optimierungsmethode vor, welche ebenfalls auf der *SIMP-Methode* basiert und auch eine Heuristik für die Veränderung des Entwurfsvariablenvektors von einer Iteration zur nächsten verwendet. Wie bei dem Ansatz von Mayer et al. [1996] hat diese Heuristik das Ziel, die Verteilung der inneren Energiedichte innerhalb der Struktur zu homogenisieren. Als Entwurfsvariablen werden die Wanddicken von *FE-Schalenelementen* verwendet, mit welchen der Bauraum diskretisiert ist. Die Wanddicken der Schalenelemente werden entsprechend des Werts der inneren Energiedichte des jeweiligen *Finiten Elements* angepasst. Ist die innere Energiedichte geringer als der vorgegebene Zielwert, wird die Wanddicke verringert, ist sie höher, wird die Wanddicke hingegen erhöht. *Finite Elemente*, deren innere Energiedichte einen Schwellenwert unterschreitet, werden aus der Struktur gelöscht und können nicht zurückkehren.

Alle bisher in diesem Unterkapitel vorgestellten Ansätze haben gemeinsam, dass sie aufgrund der fehlenden Sensitivitäten eine Heuristik verwenden, welche versucht, Spannungen, Dehnungen oder innere Energiedichten in der Struktur zu homogenisieren. Viele der bisher vorgestellten Verfahren zur Topologieoptimierung verwenden eine Art Grundstrukturansatz: Der gesamte Bauraum wird mit *Finiten Elementen* gefüllt und die *Finiten Elemente* können über die Materialeigenschaften oder Dimensionierungsparameter kontinuierlich zwischen den beiden Zuständen „Vollmaterial“ und „kein Material“ wechseln. Diese Vorgehensweise hat aber besonders im Bereich nichtlinearer Belastungen und dem Vorhandensein von Kontaktphänomenen Nachteile, da *Finite Elemente* in Zuständen zwischen „Vollmaterial“ und „kein Material“ das Ausbilden von Kontaktbereichen verhindern.
In den folgenden Abschnitten werden drei Optimierungsmethoden, welche über die bisher vorgestellten, direkten Ansätze hinausgehen oder diesen noch weitere Ergänzungen hinzufügen, detaillierter beschrieben und ihre Einsatzmöglichkeiten werden diskutiert.

2.4.1 Ground Structure Approach

Bei der von Pedersen [2002 und 2004] entwickelten Methode wird der zur Verfügung stehende Bauraum unabhängig von der Art der zu optimierenden Struktur mit Balkenelementen in einer Art Grundstruktur diskretisiert. Für diese wird die sog. *co-rotational-Formulierung* verwendet, bei welcher dehnungsproduzierende Deformationen durch lokale Koordinatensysteme von Starrkörpertranslationen und Starrkörperrotationen getrennt werden, wodurch die Balkenelemente beliebige Starrkörperbewegungen vollführen können.

In der Optimierungsmethode werden nur geometrische Nichtlineariäten und Plastizität berücksichtigt. Kontakt zwischen den Balkenelementen wird komplett vernachlässigt und weitere Formen von Materialnichtlinearitäten werden ebenfalls nicht berücksichtigt. Durch diese Vereinfachung und die Verwendung von globaler numerischer Dämpfung kann die Crashsimulation der Struktur mit *impliziter Zeitintegration* erfolgen und hierdurch können die Sensitivitäten analytisch ermittelt werden.
Als Entwurfsvariablen werden die Querschnittseigenschaften der Balkenelemente verwendet und das Optimierungsziel ist die Anpassung des tatsächlichen Beschleunigung-Zeit-Verlaufs oder Beschleunigung-Verschiebung-Verlaufs an einen vorgegebenen Verlauf. Hierfür werden an festgelegten Punkten die Differenzen zwischen dem tatsächlichen und dem gewünschten Verlauf ermittelt und die Fehler Δa in der Optimierung minimiert. Diesen Prozess veranschaulicht Abbildung 2-10, wobei die Punkte durch Kreise hervorgehoben sind.

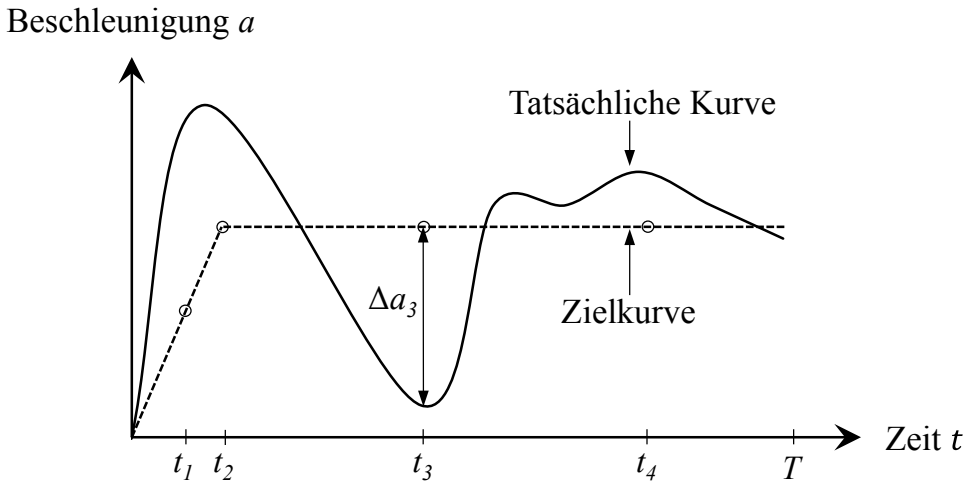


Abbildung 2-10: Optimierung des Beschleunigung-Zeit-Verlaufs, modifiziert aus [Pedersen 2004]

Zu den Stärken dieser Optimierungsmethode zählt, dass das Analysemodell aufgrund der Verwendung von Balkenelementen nur geringe Rechenressourcen benötigt und dass durch die analytisch ermittelbaren Sensitivitäten potenziell eine exakte Anpassung des tatsächlichen Beschleunigung-Zeit-Verlaufs an einen gewünschten Verlauf mit einer begrenzten Anzahl von Funktionsaufrufen möglich ist. Durch das Vernachlässigen des Kontakts wird allerdings die Anwendbarkeit dieser Optimierungsmethode bei crashbelasteten Strukturen stark eingeschränkt, da bei Crash-Problemen i.d.R. der Kontakt zwischen einzelnen Bereichen der Struktur der wichtigste Mechanismus zur Kraftübertragung ist. Aufgrund der ausschließlichen Verwendung von Balkenelementen können außerdem nur Fachwerkstrukturen mit dieser Optimierungsmethode optimiert werden, da die Balkenelemente das mechanische Verhalten von z.B. Schalen nicht wiedergeben können.

2.4.2 Hybrid Cellular Automaton

Die *HCA-Methode* (*Hybrid Cellular Automaton*) [Patel 2007] [Patel et al. 2009] basiert auf einer aus dem Wachstum von Knochen abgeleiteten Heuristik und hat ihren Ursprung in der linear statischen Topologieoptimierung [Tovar et al. 2005]. Diese Heuristik versucht, die Verteilung der inneren Energiedichte in der zu optimierenden Struktur zu homogenisieren, also z.B. die absorbierte kinetische Energie eines Fahrzeugcrashs möglichst gleichmäßig in der gesamten Struktur zu verteilen. Hierdurch werden keine Sensitivitäten für eine Aktualisierung des Entwurfsvariablenvektors von einer Iteration zur nächsten benötigt.
Namensgebend für diese Optimierungsmethode ist die Verwendung eines Gitters, des sog. *Zellulären Automaten*, welches aus einer endlichen Anzahl von Zellen besteht. Jedes *Finite Element* des *FE-Modells* der zu optimierenden Struktur entspricht dabei im einfachsten Fall einer Zelle des Gitters. Der für die Optimierung zur Verfügung stehende Bauraum wird dabei vollständig mit *Finiten Elementen* gefüllt. Jeder Zelle des Gitters ist eine Entwurfsvariable zugeordnet, die künstliche Dichte ρ_k. Diese kann analog zu der *SIMP-Methode* Werte zwischen 0 und 1 annehmen, wobei 0 dem Zustand „kein Material“ entspricht und 1 dem Zustand „Vollmaterial“.
Die Materialeigenschaften der *Finiten Elemente* in Zelle i ergeben sich aus den Materialeigenschaften des Materials der zu optimierenden Struktur und der künstlichen Dichte ρ_{k_i}. Diese hat Einfluss auf den Elastizitätsmodul E_i, den Verfestigungsmodul E_{h_i}, die Fließspannung σ_{f_i} und die Dichte ρ_i. Beispielsweise gilt für E_i in Abhängigkeit von ρ_{k_i} und dem Elastizitätsmodul des Materials der zu optimierenden Struktur E_0:

$$E_i = \rho_{k_i} \cdot E_0 \,. \tag{2-22}$$

In jeder Iteration n der *HCA-Methode* wird ein Zielpunkt $u^{*(n)}$ für die inneren Energiedichten der Zellen generiert. Die Änderung der künstlichen Dichte $\Delta\rho_{k_i}^{(n)}$ kann für jede Zelle, basierend auf der Differenz dieses Zielpunkts und der effektiven inneren Energiedichte der Zelle $\bar{u}_i^{(n)}$, berechnet werden. Letztere berücksichtigt nicht nur die innere Energiedichte der Zelle i, sondern auch die der Nachbarzellen. Um die Optimierung zu stabilisieren, wird ein Skalierungsparameter s verwendet und die maximale Änderung der künstlichen Dichte einer Zelle pro Iteration beträgt 0,1:

$$\Delta\rho_{k_i}^{(n)} = s \cdot \left(\bar{u}_i^{(n)} - u^{*(n)}\right). \tag{2-23}$$

Durch dieses Schema wird die künstliche Dichte einer Zelle verringert, wenn $\bar{u}_i^{(n)} < u^{*(n)}$ und sie wird erhöht, wenn $\bar{u}_i^{(n)} > u^{*(n)}$. *Finite Elemente*, welche zu Zellen mit einer künstli-

chen Dichte von $\rho_{k_i}^{(n)} < 0{,}05$ gehören, werden aus dem *FE-Modell* entfernt. Allerdings verbleiben die Zellen in dem *Zellulären Automaten*, sodass die *Finiten Elemente* wieder in das *FE-Modell* zurückkehren können, wenn die innere Energiedichte in den Nachbarzellen ansteigt.

Der Zielpunkt für die innere Energiedichte $u^{*(n)}$ wird für jede Iteration basierend auf der Zielmasse der Struktur ermittelt. Ist die aktuelle Masse der Struktur geringer als die Zielmasse, wird der Zielpunkt im Vergleich zu der letzten Iteration erhöht, ist die aktuelle Masse hingegen höher, wird der Zielpunkt verringert. Eine Kraft- oder Verschiebungsrestriktion kann nur indirekt über eine adaptive Massenrestriktion berücksichtigt werden, dem Ansatz folgend, dass bei zu hohen Verschiebungen die Masse erhöht und bei zu hohen Kräften die Masse verringert werden muss. Die Verwendung von mehr als einer Restriktion, bzw. einer Restriktion und einer Zielmasse führt dazu, dass diese untereinander interagieren und sich u.U. behindern.

Der Ablauf der *HCA-Methode* ist in Abbildung 2-11 dargestellt.

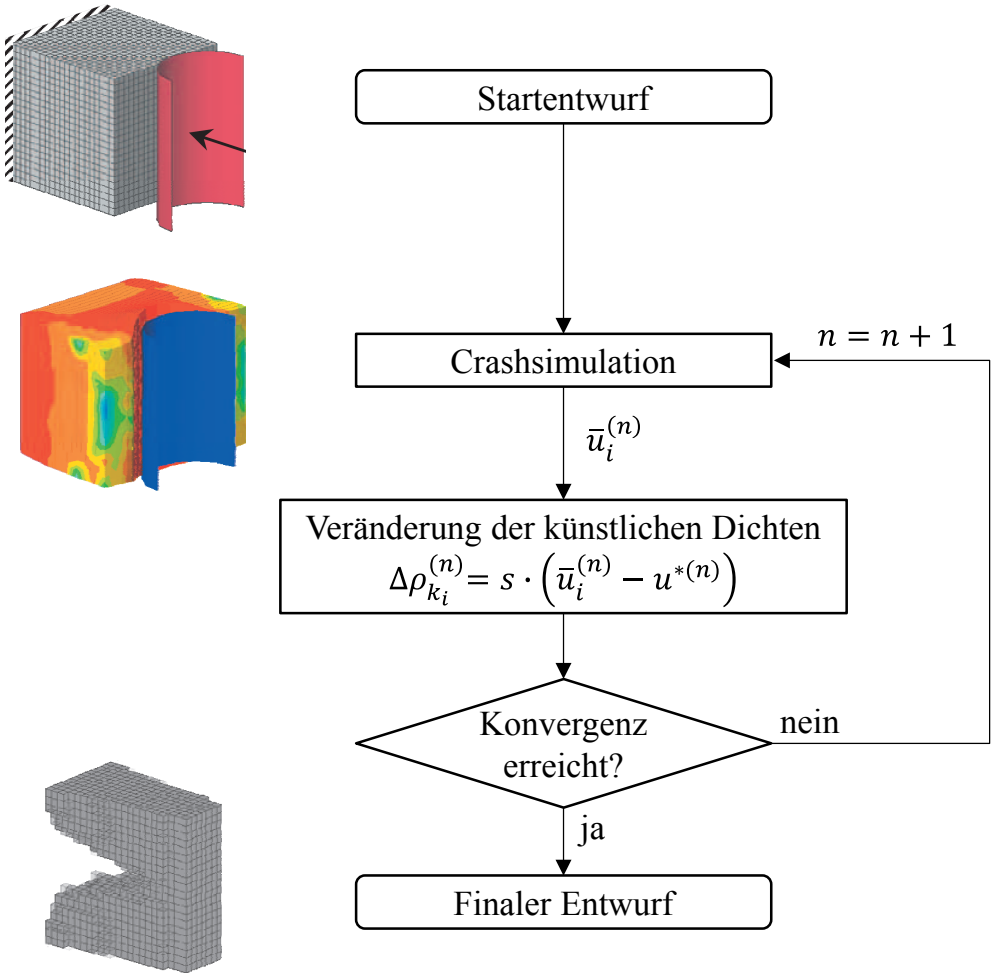


Abbildung 2-11: Prinzipieller Ablauf der HCA-Methode, modifiziert aus [Patel et al. 2009]

Eine Anpassung der *HCA-Methode* für dünnwandige Profilstrukturen wurde von Hunkeler [2013] vorgestellt. In der *HCATWS-Methode* (*Hybrid Cellular Automata for Thin Walled Structures*) wird der Bauraum nicht mit Volumenelementen, sondern mit einer Gitterstruktur aus Schalenelementen vernetzt und die beschriebene Vorgehensweise wird auf diese Schalenelemente angewendet. Allerdings werden die inneren Energien der *Finiten Elemente* über einzelne Wände des Profilquerschnitts aufsummiert und die inneren Energiedichten der Wände untereinander sollen angeglichen werden.

Eine Stärke der *HCA-Methode* ist die hohe Effizienz in Bezug auf die notwendige Anzahl von Funktionsaufrufen, da in jeder Iteration nur ein einzelner Funktionsaufruf notwendig ist. Durch die Diskretisierung des kompletten Bauraums mit Volumenelementen kann die Rechenzeit des Analysemodells aber deutlich zunehmen, da je nach Bauraumgröße hierdurch eine große Anzahl von *Finiten Elementen* dem Analysemodell hinzugefügt wird.
Die in der *HCA-Methode* verwendete Heuristik hat das Ziel, die Verteilung der inneren Energiedichte in der Struktur zu homogenisieren. Ob dieses Optimalitätskriterium allerdings tatsächlich zu optimalen Crashstrukturen führt, ist fraglich, da viele effiziente Mechanismen der Energieabsorption zu einer inhomogen verteilten inneren Energiedichte führen. Ein Beispiel hierfür ist das Faltenbeulen bei axial belasteten Strukturen, bei welchem der Großteil der Energie in den Ecken des Profilquerschnitts der Struktur absorbiert wird.
Die Umsetzung einer Kraft- oder Verschiebungsrestriktion als adaptive Massenrestriktion kann problematisch sein. Wenn beispielsweise die Kraft in der Struktur zu hoch ist, würde die Heuristik der *HCA-Methode* die Masse der Struktur reduzieren. Wenn allerdings die hohe Kraft nicht auf eine zu steife, sondern auf eine zu nachgiebige Struktur und daraus resultierende Instabilitätsphänomene zurückzuführen ist, würde die Verringerung der Masse zu einer weiteren Verschlechterung der Struktur führen.

Die *HCA-Methode* ist kommerziell umgesetzt in der Programmkombination *LS-TASC*® und *LS-DYNA*®.

2.4.3 Equivalent Static Loads

In der *ESL-Methode* (*Equivalent Static Loads*) [Choi und Park 2002] [Park und Park 2005] [Park 2010, 2011] wird eine nichtlinear dynamische Analyseebene und eine linear statische Optimierungsebene verwendet. Diese Methode ist sowohl für Topologieoptimierungen, als auch für Formoptimierungen und Dimensionierungen geeignet. Alle Ausführungen in diesem Abschnitt beziehen sich auf die Topologieoptimierung.
Eine Iteration dieser Optimierungsmethode besteht aus einer Crashsimulation (nichtlinear dynamische Analyseebene), gefolgt von einer Topologieoptimierung mit äquivalent statischen Ersatzlasten (linear statische Optimierungsebene). Diese namensgebenden äquivalent

statischen Ersatzlasten werden derart ermittelt, dass bei dem Startentwurf der linear statischen Optimierungsebene eine ausgewählte Strukturantwort, für gewöhnlich die Verschiebungen der Struktur, identisch ist mit der Strukturantwort in der nichtlinear dynamischen Analyseebene zu einem vorgegebenen Zeitpunkt. Mehrere Zeitpunkte können berücksichtigt werden, indem die äquivalent statischen Ersatzlasten zu mehreren Zeitpunkten in der nichtlinear dynamischen Analyseebene ermittelt werden und diese dann in der linear statischen Optimierungsebene für eine Optimierung mit mehreren Lastfällen verwendet werden. Das Konzept der *ESL-Methode* ist in Abbildung 2-12 veranschaulicht.

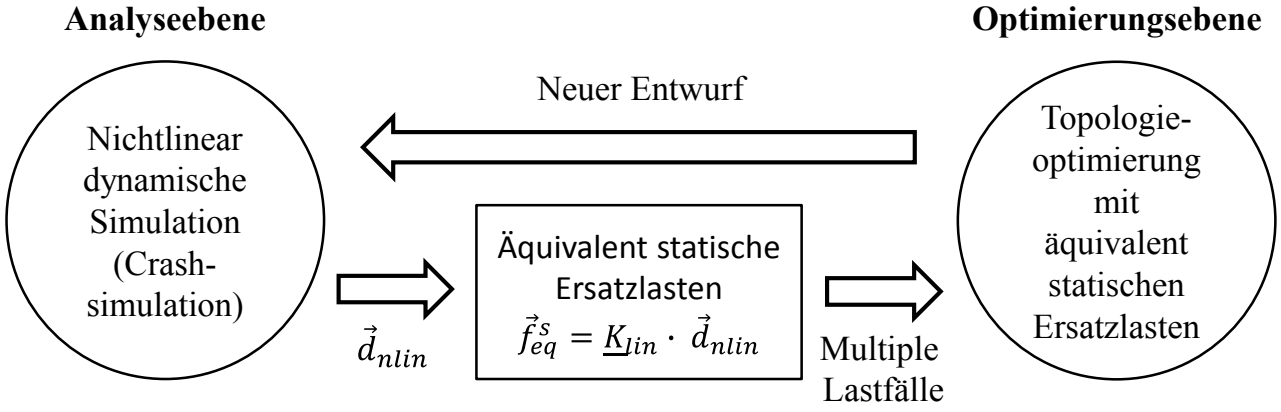


Abbildung 2-12: Konzept der ESL-Methode, modifiziert aus [Park 2010]

Für die Erzeugung der äquivalent statischen Ersatzlasten können prinzipiell alle Strukturantworten verwendet werden, die in der linearen Statik abgefragt werden können. Die äquivalent statischen Ersatzlasten $\vec{f}_{eq}$ für die Strukturantwort Verschiebung $\vec{d}_{nlin}$ aus der nichtlinear dynamischen Analyseebene zum Zeitpunkt n_t können, basierend auf der Steifigkeitsmatrix $\underline{K}_{lin}$ des Startentwurfs der linear statischen Optimierungsebene, berechnet werden als:

$$\vec{f}_{eq}^{s} = \underline{K}_{lin} \cdot \vec{d}_{nlin} \,. \tag{2-24}$$

In jeder Iteration der *ESL-Methode* wird das Optimum in der linear statischen Optimierungsebene ermittelt und dient als Startentwurf für die nächste Iteration. Pro Iteration wird nur ein Funktionsaufruf in der nichtlinear dynamischen Analyseebene durchgeführt. In der linear statischen Optimierungsebene werden zwar auch Funktionsaufrufe verwendet, bei diesen linear statischen *FE-Simulationen* ist der Berechnungsaufwand allerdings wesentlich geringer als bei nichtlinear dynamischen *FE-Simulationen*. Daher ist die *ESL-Methode* in Bezug auf den Berechnungsaufwand insgesamt als effizient einzustufen.

Für die Definition der Zielfunktion und der Restriktionen können nur Strukturantworten der Struktur verwendet werden, die auch in einer linear statischen *FE-Simulation* berechnet werden können. In der Auslegung von Crashstrukturen wichtige Zielgrößen wie Energieabsorption oder Beschleunigungen können daher nicht direkt berücksichtigt werden.
Die Kopplung der nichtlinear dynamischen Analyseebene und der linear statischen Optimierungsebene wird durch die äquivalent statischen Ersatzlasten nur für eine einzige Strukturantwort zu einem bestimmten Zeitpunkt und auch nur für den Startentwurf der linear statischen Optimierungsebene durchgeführt. Alle anderen Strukturantworten werden i.d.R. abweichen, was die Nutzung von unterschiedlichen Strukturantworten für die Definition der Zielfunktion und der Restriktionen erschwert.
Während der linear statischen Topologieoptimierung werden die äquivalent statischen Ersatzlasten nicht aktualisiert. Daher wird sich die ausgewählte Strukturantwort (z.B. die Verschiebungen) am Ende dieser linear statischen Topologieoptimierung deutlich von der Strukturantwort in der nichtlinear dynamischen Analyseebene unterscheiden. Hierdurch ist nicht sichergestellt, dass die linear statische Topologieoptimierung die Struktur im Sinne einer Verringerung der Zielfunktion überhaupt verbessert.

Bei der plastischen Deformation einer Struktur entstehen Fließgelenke, welche die notwendigen Kräfte für eine weitere Deformation der Struktur deutlich verringern. Hierdurch können große Verschiebungen und Rotationen mit relativ geringem Kraftaufwand entstehen. Die äquivalent statischen Ersatzlasten, die notwendig sind, um in dem *FE-Modell* in der linear statischen Optimierungsebene identische Verschiebungen zu erzeugen wie in der nichtlinear dynamischen Analyseebene, können groß werden und zu numerischen Problemen führen, da diese Effekte hier nicht berücksichtigt werden.
Die äquivalent statischen Ersatzlasten können vollkommen anders geartet sein als die reale physikalische Belastung, wie sie in der nichtlinear dynamischen Analyseebene modelliert ist. Beispielsweise kann ein Stab durch Kräfte in Längsrichtung zum Knicken gebracht werden. Um diese Verschiebungen aber in der linear statischen Optimierungsebene darzustellen, sind äquivalent statische Ersatzlasten senkrecht zu der Längsrichtung des Stabes notwendig. Aufgrund dieser Trennung der Lasten in der linear statischen Optimierungsebene von der realen physikalischen Belastung ist nicht garantiert, dass in den linear statischen Topologieoptimierungen aus mechanischer Sicht sinnvolle Ergebnisse entstehen.

Die *ESL-Methode* ist in mehreren Programmsystemen implementiert, dazu gehören die Kombinationen *Altair Radioss*® und *Altair OptiStruct*® sowie *LS-DYNA*® und *GENESIS*®.

3 Geometriebeschreibung durch mathematische Graphen

Ein Kernaspekt der Definition eines Optimierungsproblems ist die Definition der Entwurfsvariablen. Bei der Optimierung von mechanischen Strukturen werden die mechanischen Eigenschaften einer Struktur modifiziert und als Entwurfsvariablen werden Geometrieparameter und/oder Materialparameter verwendet.
Hierfür bedarf es einer Form der geometrischen Beschreibung der zu optimierenden Struktur. Bei Formoptimierungsproblemen werden parametrisierte *CAD-Modelle* (*Computer Aided Design*) oder parametrisierte *FE-Modelle* verwendet. Bei Ersterem dienen z.B. Konstruktionsparameter wie Winkel zwischen Flächen als Entwurfsvariablen und bei letzterem z.B. die Koordinaten von *FE-Knoten*, dies wird auch als *Morphing* bezeichnet. Bei Topologieoptimierungen finden gravierende Modifikationen der Geometrie der zu optimierenden Struktur statt und i.d.R. kann keiner der beiden Ansätze verwendet werden, da die Parametrisierung nicht flexibel und umfassend genug ist. Etablierte Methoden zur Topologieoptimierung mit linear statischen Lasten wie z.B. die *SIMP-Methode* (siehe Abschnitt 2.4) nutzen daher eine Art Grundstrukturansatz: Der gesamte Bauraum wird mit *Finiten Elementen* gefüllt und die *Finiten Elemente* können über die Materialeigenschaften kontinuierlich zwischen den beiden Zuständen „Vollmaterial“ und „kein Material“ wechseln. In Abschnitt 2.4 ist auf die Nachteile des Grundstrukturansatzes eingegangen worden.

Für die Methode der *Graphen- und Heuristikbasierten Topologieoptimierung* (*GHT*) wird ein anderer Ansatz verfolgt: Die Geometrie der Struktur wird durch einen mathematischen Graphen beschrieben. Durch eigens hierfür entwickelte Software werden vollautomatisiert aus diesem Graphen rechenfähige *FE-Modelle* für die durchzuführenden Simulationen generiert. Diese Vorgehensweise weist mehrere Vorteile auf:

(1) Komplexe Modifikationen der Struktur wie Topologieänderungen können an dem mathematischen Graphen der Struktur aufgrund der abstrahierten Darstellung mit geringem Aufwand durchgeführt werden.
(2) Es können aus der mathematischen Graphentheorie stammende Algorithmen und Verfahren benutzt werden.
(3) Die *FE-Modelle* der Struktur werden für jeden Entwurf neu generiert und weisen daher keine verzerrten *Finiten Elemente* auf, wie dies bei der Verwendung von parametrisierten *FE-Modellen* der Fall ist.

Mathematische Graphen werden in vielen Bereichen eingesetzt, um komplexe Problemstellungen, Phänomene oder Systeme zu beschreiben. Ein prominentes Beispiel hierfür sind Verkehrspläne des öffentlichen Nahverkehrs wie U-Bahn-Pläne.
Haq und Rudolph [2004] verwenden mathematische Graphen in einer Entwurfssprache zur Beschreibung der Geometrie von Fahrzeugentwürfen. Olschinka und Schumacher [2008] benutzen mathematische Graphen für die geometrische Beschreibung von Fluggastsitzen. Auf ihren Vorarbeiten basiert die in diesem Kapitel vorgestellte Graphen-Syntax und Softwareumsetzung.

Dieses Kapitel ist in fünf Abschnitte aufgeteilt. Zunächst werden die für die Beschreibung von mechanischen Strukturen notwendigen Grundlagen der Graphentheorie erläutert. Da diese ein umfangreiches und eigenständiges Teilgebiet der Mathematik sind, werden nur die für die *GHT* relevanten Themen behandelt. Eine vertiefte Darstellung der Grundlagen der Graphentheorie findet sich in [Diestel 2010].
In Abschnitt 3.2 wird die Syntax vorgestellt, nach welcher Graphen aufgebaut sind, die für die Beschreibung der Geometrie von mechanischen Strukturen eingesetzt werden können. Die Abschnitte 3.3 und 3.4 skizzieren Algorithmen, welche durch die Nutzung von Graphen komplexe geometrische Operationen durchführen können. Abschließend wird die für die praktische Durchführung notwendige Software-Umsetzung vorgestellt.

3.1 Eigenschaften von Graphen

Ein Graph setzt sich zusammen aus einer Menge von Knoten (auch als Ecken, Punkte oder Vertices bezeichnet) und einer Menge von Kanten, welche die Knoten paarweise miteinander verbinden.
Ein Graph lässt sich anschaulich darstellen durch eine Zeichnung in einer Ebene. Hierbei existieren für jeden Graphen allerdings unendlich viele Darstellungsformen, da die Positionen der Knoten innerhalb der Darstellung nicht definiert sind. Abbildung 3-1 zeigt zwei Darstellungsformen des Graphen mit der folgenden Menge von Knoten V und Menge von Kanten E:

$V = \{1,2,3,4\}$,
$E = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,1)\}$.

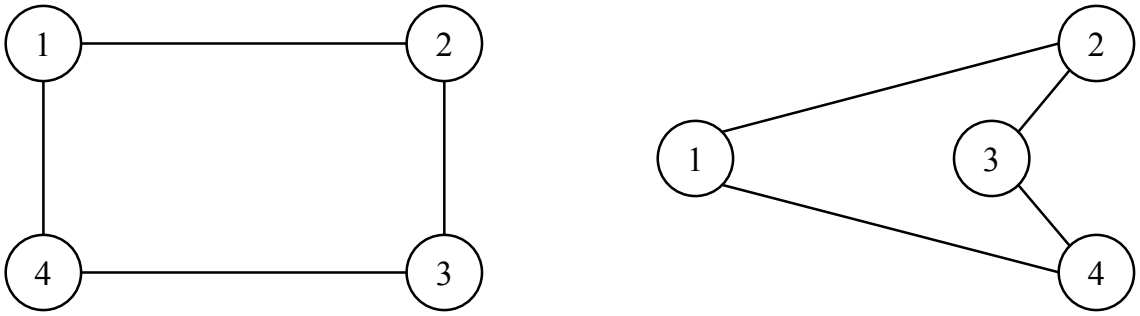


Abbildung 3-1: Unterschiedliche Darstellungsformen des identischen Graphen

Ist die Reihenfolge der Knoten innerhalb der Knotenpaare der Menge der Kanten beliebig, handelt es sich um einen ungerichteten Graphen. Bei gerichteten Graphen wird eine feste Reihenfolge der Knoten verwendet, um den Kanten eine Orientierung zuzuweisen. Dies wird in Darstellungen des Graphen oftmals durch Pfeile an einem Ende der Kanten angedeutet.

Existieren zwischen zwei Knoten mehrere Kanten, werden diese als Mehrfachkanten oder Multikanten bezeichnet. Sind die beiden Knoten des Knotenpaares einer Kante identisch, gilt diese Kante als Schleife (auch als Schlinge bezeichnet). Ein Graph, der weder Mehrfachkanten noch Schleifen aufweist, ist ein schlichter (oder einfacher) Graph. Der Graph in Abbildung 3-2 besitzt sowohl Schleifen als auch Mehrfachkanten und kann daher nicht zu den schlichten Graphen gezählt werden.

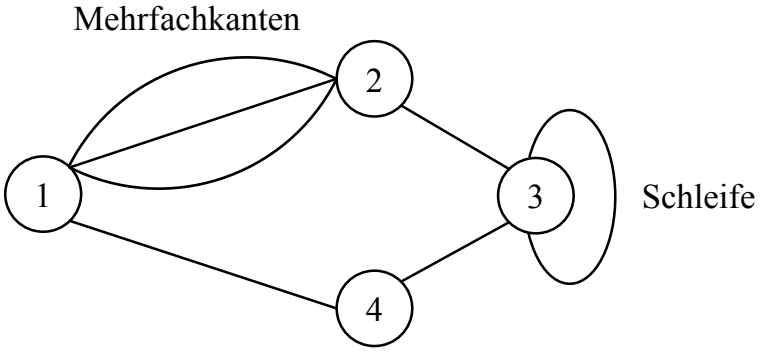


Abbildung 3-2: Nicht-schlichter Graph mit Schleife und Mehrfachkanten

Zwei Knoten sind benachbart (oder adjazent), wenn diese durch mindestens eine Kante verbunden sind. Der Grad eines Knotens ist die Anzahl der mit ihm verbundenen Kanten. Bei einem schlichten Graphen ist der Grad eines Knotens identisch mit der Anzahl der mit ihm benachbarten Knoten.

Eine zusammenhängende Folge von Kanten ist ein Kantenzug. Taucht in diesem Kantenzug keine Kante mehrfach auf, so wird er als Weg bezeichnet. Sind zusätzlich der erste und der letzte Knoten des Wegs identisch, handelt es sich um einen geschlossenen Weg (oder

Kreis). Ein solcher ist in Abbildung 3-3 durch gestrichelte Kanten dargestellt und besteht dort aus den Kanten (2,3), (3,4), (4,9) und (9,2).

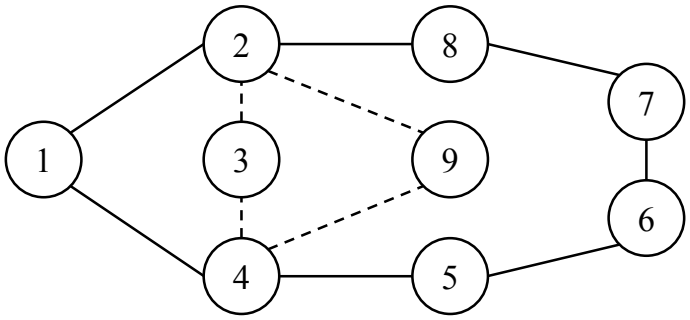


Abbildung 3-3: Geschlossener Weg in einem Graphen

Wenn für jedes Paar von Knoten aus der Knotenmenge des Graphen ein Weg zwischen dem Knotenpaar existiert, ist der Graph zusammenhängend. Die nicht miteinander verbundenen Subgraphen eines Graphen werden Zusammenhangskomponenten genannt.
Ein Graph gilt als planar (oder plättbar), wenn es zumindest eine Darstellungsform gibt, ihn in der Ebene kreuzungsfrei, also ohne eine Überschneidung der Kanten, zu zeichnen. Ein Beispiel für einen nicht-planaren Graphen ist der *Petersen Graph*. Bei diesem Graphen weist jeder der zehn Knoten einen Grad von drei auf. Die Menge der Knoten V und die Menge der Kanten E dieses Graphen kann wie folgt aussehen:

$V = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$,
$E = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,1), (1,6), (2,7), (3,8), (4,9), (5,10), (6,8),$
$(8,10), (10,7), (7,9), (9,6)\}$.

Abbildung 3-4 zeigt eine Darstellungsform des *Petersen Graphen*.

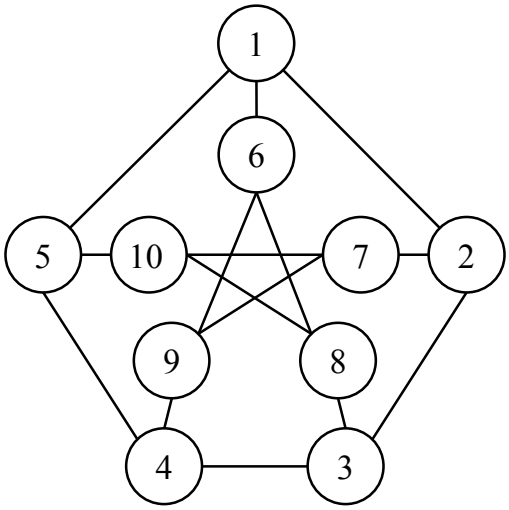


Abbildung 3-4: Nicht-planarer Graph, hier der Petersen Graph

3.2 Verwendete Graphensyntax

In diesem Unterkapitel wird eine Graphensyntax vorgestellt, mit welcher mechanische Profilstrukturen durch mathematische Graphen beschrieben werden können. Mit Profilstrukturen sind hierbei Bauteile gemeint, die einen entlang einer beliebigen Kurve extrudierten Profilquerschnitt aufweisen. Der Profilquerschnitt muss dabei prinzipiell über die Bauteillänge topologisch konstant sein, allerdings können auch lokale Störungen wie Aussparungen vorhanden sein. Typische Beispiele hierfür aus der Automobilindustrie sind Strangpressprofile in Rohkarosserien, welche u. a. Verwendung als Schweller oder Längsträger finden können.

Die in dieser Graphensyntax verwendeten Knotentypen lassen sich in zwei Kategorien einordnen. Strukturelle Knoten repräsentieren Subkomponenten der zu beschreibenden Struktur. Logische Knoten besitzen hingegen kein direktes geometrisches Pendant und speichern abstraktere Informationen.
Die Kombination aus strukturellen und logischen Knoten ermöglicht die Beschreibung des Profilquerschnitts einer Struktur. Abbildung 3-5 zeigt eine Übersicht der Knotentypen. Auf der linken Seite ist ein mathematischer Graph dargestellt und auf der rechten Seite die durch den Graphen abstrahierte mechanische Struktur.
Einzelne Wände des Profilquerschnitts werden durch eine Kombination von drei unterschiedlichen Knoten dargestellt, die untereinander mit Kanten verbunden sind. Der *BEAMG-Knoten* enthält Informationen über die Dicke der Wand und ihre Krümmung. Der *BEAM1-* und der *BEAM2-Knoten* dienen der Definition der Orientierung der Wand. Die Kombination dieser drei Knotentypen wird im Folgenden als *Graphen-Balkenelement* bezeichnet.
Verbindungen zwischen Wänden des Profilquerschnitts und somit zwischen den *Graphen-Balkenelementen*, werden durch *LINK-Knoten* beschrieben, welche mit den *BEAM1-* oder *BEAM2-Knoten* der *Graphen-Balkenelemente* über Kanten verbunden sind. Die *LINK-Knoten* speichern Informationen über die Art der Verbindung der Wände des Profilquerschnitts untereinander und die kartesischen Koordinaten der End- oder Verbindungspunkte der Wände innerhalb des Profilquerschnitts. Zwischen den Wänden können gerade Verbindungen, Rundungsradien und Fasen definiert werden.
Der letzte Knotentyp in dieser Graphensyntax ist der *PARAM-Knoten*, der allgemeine Informationen über die Struktur speichert. Hierzu zählen neben einer Bezeichnung für die Struktur auch die Bauteillänge und die Dichte des verwendeten Materials der Struktur.

Ein durch diese Graphensyntax aufgebauter Graph wird in der Ebene stets so gezeichnet, dass er einer schematischen Darstellung des Profilquerschnitts entspricht, welcher durch den Graphen beschrieben wird.

Ein solcher Graph ist ungerichtet, schlicht und planar. Außerdem ist er mit Ausnahme des *PARAM-Knotens* zusammenhängend.

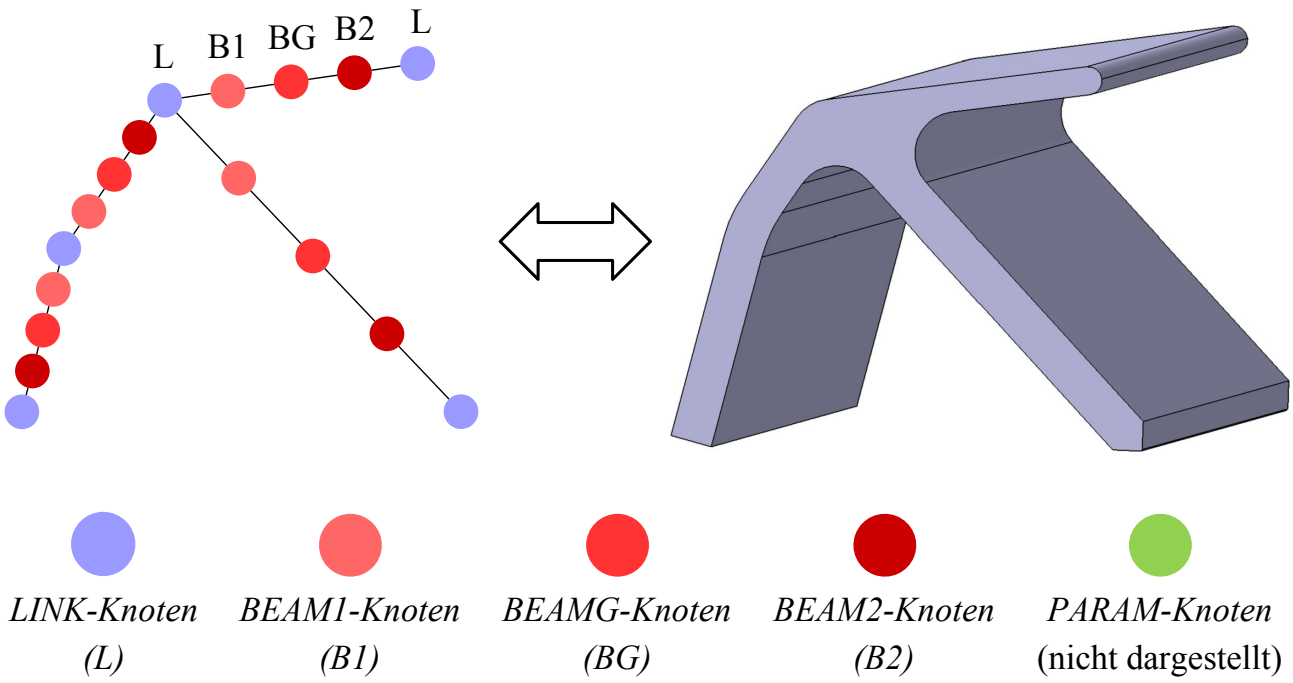


Abbildung 3-5: Übersicht der Knotentypen der Graphensyntax

Ein durch diese Graphensyntax aufgebauter Graph wird in einem *ASCII-Format* (*American Standard Code for Information Interchange*) gespeichert. Die folgende Auflistung beschreibt die exakte Syntax der unterschiedlichen Knotentypen und der Kanten, beginnend mit den logischen Knotentypen, gefolgt von den strukturellen Knotentypen sowie den Kanten. In der Graphensyntax werden die Datentypen Ganzzahl (Integer), Fließkommazahl mit doppelter Präzision (Double) und Zeichenkette (String) verwendet.

***PARAM-Knoten* – Logischer Knoten**

VERTEX, LOGIC, PARAM, <*ID*>, NAME, <*n*>, LENGTH, <l_e>, DENSITY, <ρ>

ID	Integer	Identifikationsnummer des Knotens
n	String	Bezeichnung der Struktur
l_e	Double	Extrusionslänge der Struktur
ρ	Double	Dichte des Materials der Struktur

***LINK-Knoten* – Struktureller Knoten**

VERTEX, STRUCT, LINK, <*ID*>, <*x*>, <y>, <*v*>, <*p*>

ID	Integer	Identifikationsnummer des Knotens
x	Double	X-Koordinate des End- oder Verbindungspunkts im Profilquerschnitt
y	Double	Y- Koordinate des End- oder Verbindungspunkts im Profilquerschnitt
v	String	Verbindungstyp, mögliche Typen: *TRIM*: eckige Verbindung, *RADIUS*: Verbindung mit Verrundung, *CHAMFER*: Verbindung mit Fase
p	Double	Vom Verbindungtyp abhängiger Parameter: Typ *TRIM*: entfällt, Typ *RADIUS*: Verrundungsradius, Typ *CHAMFER*: Länge der Fase

***BEAMG-*, *BEAM1-* und *BEAM2-Knoten* – Strukturelle Knoten**

VERTEX, STRUCT, BEAMG, <ID_1>, <t_o>, <t_u>, <*c*>

VERTEX, STRUCT, BEAM1, <ID_2>

VERTEX, STRUCT, BEAM2, <ID_3>

ID_1, ID_2, ID_3	Integer	Identifikationsnummern der Knoten
t_o	Double	Wanddicke der Wand an seiner Oberseite
t_u	Double	Wanddicke der Wand an seiner Unterseite
c	Double (optional)	Normierte Krümmung der Wand

Der *BEAMG-Knoten* eines Graphen-Balkenelements liegt zwischen dem *BEAM1-* und dem *BEAM2-Knoten* (Abbildung 3-6). Die Orientierung des *Graphen-Balkenelements* verläuft von dem *BEAM1-* zu dem *BEAM2-Knoten*. Die Oberseite ist definiert als die Seite, auf der ein Kreisbogen liegen würde, der im mathematisch negativen Drehsinn (positiver Uhrzeigersinn) von dem *BEAM1-* zu dem *BEAM2-Knoten* gezogen werden würde.

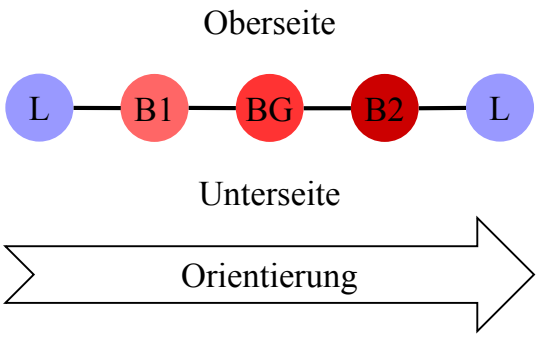


Abbildung 3-6: Definition der Orientierung von Graphen-Balkenelementen

Der Zusammenhang zwischen dem Radius r des Kreisbogens, welcher einem gekrümmten *Graphen-Balkenelement* zugrunde liegt, dem Abstand der Koordinaten der *LINK-Knoten* l und der normierten Krümmung c des *Graphen-Balkenelements* lautet:

$$r = \frac{l}{2 \cdot |c|}. \tag{3-1}$$

Nimmt der Betrag der Krümmung den Wert 1 an, entspricht der Radius dem halben Wert des Abstands der Koordinaten der *LINK-Knoten* des Graphen-Balkenelements und die durch das *Graphen-Balkenelement* beschriebene Wand bildet somit einen Halbkreis.

Mithilfe der Koordinaten der *LINK-Knoten* am Anfang und am Ende eines nicht-gekrümmten *Graphen-Balkenelements* kann die Geradengleichung der Strecke bestimmt werden, welche die Mittelfläche der durch das *Graphen-Balkenelement* beschriebenen Wand im Profilquerschnitt bildet. Analog hierzu kann die Kreisgleichung für gekrümmte *Graphen-Balkenelemente* durch die Koordinaten der *LINK-Knoten* und den in Gleichung (3-1) bestimmten Radius ermittelt werden.

Kante

EDGE, <ID_1>, <ID_2>

ID_1	Integer	Identifikationsnummer des ersten Knotens
ID_2	Integer	Identifikationsnummer des zweiten Knotens

Nicht jeder Knotentyp kann mit jedem anderen Knotentyp durch Kanten verbunden werden. Es ist in der Graphensyntax z.B. nicht erlaubt, zwei *BEAMG-Knoten* miteinander zu koppeln, da dies der zugrunde liegenden Logik der Graphensyntax widersprechen würde. Eine Auflistung der möglichen Verbindungen findet sich in Tabelle 3-1.

Knotentyp	kompatible Knotentypen
PARAM	-
LINK	*LINK, BEAM1, BEAM2*
BEAMG	*BEAM1, BEAM2*
BEAM1	*BEAMG, LINK*
BEAM2	*BEAMG, LINK*

Tabelle 3-1: Verbindungsmöglichkeiten der Knotentypen

Für eine Strukturoptimierung der durch den Graphen beschriebenen Struktur ist es von Vorteil, wenn der Graph nicht nur die aktuelle Geometrie der Struktur beschreibt, sondern auch die Bauraumgrenzen des Profilquerschnitts definiert. Werden zwei *LINK-Knoten* durch eine Kante miteinander verbunden, stellt dies eine nicht strukturelle Abgrenzung innerhalb des Profilquerschnitts dar. Diese werden im Folgenden als *Grenzlinien* bezeichnet und können entweder als Symmetrielinien oder zur Abgrenzung des verfügbaren Bauraums innerhalb des Profilquerschnitts verwendet werden. Die Verwendung von *Grenzlinien* ist optional. Ohne *Grenzlinien* werden die Bauraumgrenzen des Profilquerschnitts durch die äußere Kontur der Struktur im Profilquerschnitt definiert.

Abbildung 3-7 zeigt auf der linken Seite einen Graphen, welcher *Grenzlinien* enthält und im mittleren Bereich das Geometriemodell der durch den Graphen beschriebenen Struktur. Es ist ersichtlich, dass die *Grenzlinien* keine direkte strukturelle Repräsentation besitzen, sondern lediglich die Bauraumgrenzen des Profilquerschnitts definieren. Die Bauraumgrenzen des Profilquerschnitts sind schematisch im rechten Teil der Abbildung dargestellt und ergeben sich aus außen liegenden Wänden und Grenzlinien.
Grenzlinien und alle Wände, welche die Bauraumgrenzen des Profilquerschnitts definieren, gelten als *non-design-space* und dürfen während einer Optimierung nicht verschoben oder ersatzlos entfernt werden.
Durch den Einsatz von Grenzlinien kann gezielt gesteuert werden, welche der zu der äußeren Kontur des Profilquerschnitts gehörenden Wände in der Optimierung veränderbar sein sollen und welche nicht. Beispielsweise zählt die horizontale Wand in der Mitte des Profilquerschnitts der in Abbildung 3-7 dargestellten Struktur nicht zu den Bauraumgrenzen, obwohl sie zu der äußeren Kontur der Struktur gehört. Daher könnte die Position dieser Wand in einer Optimierung verändert werden.

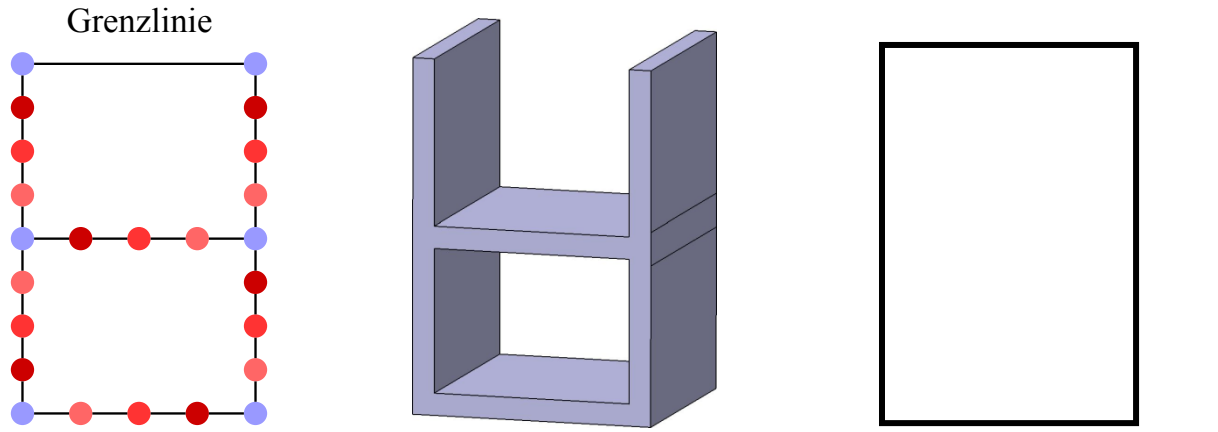


Abbildung 3-7: Grenzlinien zur Definition der Bauraumgrenzen

3.3 Algorithmen zur Überprüfung von Fertigungsrestriktionen

Die Verwendung von mathematischen Graphen für die geometrische Beschreibung einer Struktur erlaubt eine effiziente Überprüfung von Fertigungsrestriktionen, welche sich auf den Profilquerschnitt der Struktur beziehen. Dies ist nicht nur zur Überprüfung des finalen Entwurfs sinnvoll, sondern hiermit kann auch sichergestellt werden, dass in einer Optimierung nur für diejenigen Entwürfe eine *FE-Modellerzeugung* und anschließende Simulation stattfinden, welche die profilquerschnittbasierten Fertigungsrestriktionen erfüllen. Entwürfe, welche die Fertigungsrestriktionen nicht erfüllen, werden in der Optimierung nicht weiter verfolgt.

Die in diesem Abschnitt vorgestellten Fertigungsrestriktionen orientieren sich an Herstellungsprozessen von Aluminium-Strangpressprofilen, sind aber so universell, dass sie auch bei anderen Fertigungsverfahren Verwendung finden können. Die Fertigungsrestriktionen sind:

(1) minimale und maximale Wanddicke von Wänden,
(2) Mindestabstand von Wänden unter Berücksichtigung der Wanddicken,
(3) minimaler Verbindungswinkel zwischen Wänden,
(4) maximales Größenverhältnis der Fläche der größten Kammer im Profilquerschnitt zur Fläche der kleinsten Kammer im Profilquerschnitt,
(5) *Non-Design-Space-Bereiche* im Profilquerschnitt, in denen sich keine Wände befinden dürfen.

Die Umsetzung der Fertigungsrestriktionen (2) – (4) wird im Folgenden näher ausgeführt, wobei der Aspekt der graphenbasierten Umsetzung als Algorithmus und nicht der fertigungstechnische Hintergrund im Vordergrund steht.

- **Mindestabstand von Wänden unter Berücksichtigung der Wanddicken**

Um den Mindestabstand zwischen zwei Wänden zu überprüfen, müssen neben dem Abstand der Mittelflächen der Wände auch die Wanddicken und die Krümmung der Wände sowie deren Lage zueinander berücksichtigt werden. Der Algorithmus hierfür erzeugt zunächst für alle zu vergleichenden Wände in der Ebene des Profilquerschnitts Offset-Kurven von den Linien der Mittelflächen der Wände entsprechend der Wanddicken. Hierfür werden temporär neue *Graphen-Balkenelemente* im Graphen erzeugt, welche die Offset-Kurven beschreiben. Über die Geradengleichungen bei geraden *Graphen-Balkenelementen* oder die Kreisgleichung bei gekrümmten *Graphen-Balkenelementen* werden für jede Offset-Kurve 100 äquidistante Punkte berechnet, welche die Offset-Kurven diskretisieren.
Zwischen den Punkten der Offset-Kurven von unterschiedlichen Wänden werden dann die Entfernungen berechnet und mit dem Wert für den minimalen Wandabstand verglichen. Diesen Prozess veranschaulicht Abbildung 3-8, wobei anstelle der 100 Überprüfungspunkte pro Offset-Kurve nur 11 Punkte dargestellt sind.

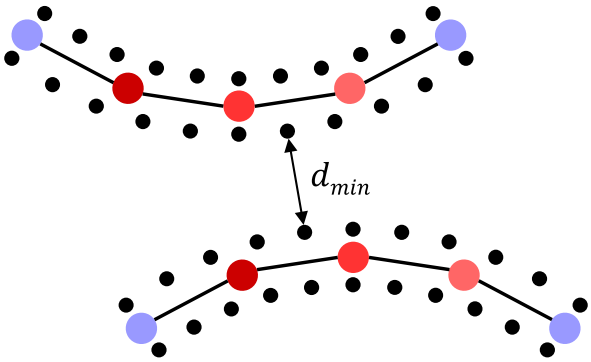


Abbildung 3-8: Prinzip der graphenbasierten Bestimmung des Abstands von zwei Wänden

- **Minimaler Verbindungswinkel zwischen Wänden**

Für die Berechnung des Verbindungswinkels zwischen zwei Wänden des Profilquerschnitts werden mithilfe der dazugehörigen *Graphen-Balkenelemente* Richtungsvektoren am Schnittpunkt der Wände erzeugt. Bei geraden *Graphen-Balkenelementen* kann der Richtungsvektor allein aus den Koordinaten der *LINK-Knoten* bestimmt werden. Bei gekrümmten *Graphen-Balkenelementen* steht der Richtungsvektor immer senkrecht auf einem Vektor, der von dem aktuell betrachteten Punkt zu dem Mittelpunkt des Kreissegments zeigt, welches die Krümmung bestimmt.
Es werden die Verbindungswinkel zwischen allen verbundenen Wänden des Profilquerschnitts ermittelt und mit dem Wert für den Mindestwinkel verglichen. Als Verbindungswinkel wird hierbei der kleinste Winkel betrachtet, den das jeweilige Paar aus Wänden einschließt.

- **Maximales Größenverhältnis der Fläche der größten Kammer im Profilquerschnitt zu der Fläche der kleinsten Kammer im Profilquerschnitt**

Zur Überprüfung dieser Fertigungsrestriktion müssen die Größenverhältnisse der Kammern des Profilquerschnitts zueinander, also die Größenverhältnisse der Hohlräume innerhalb der Profilstruktur, bestimmt werden. Zunächst werden die Wände ermittelt, die an die einzelnen Kammern angrenzen. Hierfür wird im Graphen der *geschlossene Weg* (siehe Abschnitt 3.1) bestimmt, der exakt um die Kammer herum führt und alle Knoten umfasst, die an dieser Kammer liegen.

Über die Verwendung von orientierten Verbindungswinkeln kann überprüft werden, ob zwei *Graphen-Balkenelemente* an die identische Kammer angrenzen. An dem Endpunkt der Wand des aktuell betrachteten *Graphen-Balkenelements* werden wie bei der Überprüfung der Fertigungsrestriktion *minimaler Verbindungswinkel* die Verbindungswinkel zu den Wänden von benachbarten *Graphen-Balkenelementen* ermittelt. Die Kammer auf der Oberseite des aktuellen *Graphen-Balkenelements* wird durch das benachbarte *Graphen-Balkenelement* fortgesetzt, dessen Wand von der Oberseite des aktuellen *Graphen-Balkenelements* rechtsdrehend den kleinsten Verbindungswinkel aufweist. Dies gilt analog für die Kammer auf der Unterseite, jedoch mit dem kleinsten Verbindungswinkel linksdrehend von der Unterseite aus gemessen.

In Abbildung 3-9 ist diese Vorgehensweise anhand der Kammer 1 im Zentrum des Graphen veranschaulicht. Beginnend mit dem obersten *Graphen-Balkenelement* der Kammer wird der beschriebene Algorithmus eingesetzt. Die Kammer befindet sich auf den Unterseiten der angrenzenden *Graphen-Balkenelemente* und dementsprechend kann das jeweils nächste *Graphen-Balkenelement* der Kammer anhand des kleinsten Verbindungswinkels, von den Unterseiten aus linksdrehend gemessen, bestimmt werden.

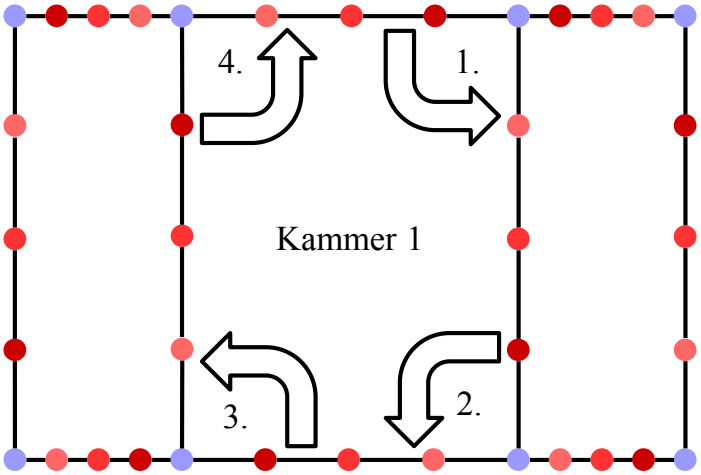


Abbildung 3-9: Prinzip der Bestimmung von Kammern durch orientierte Verbindungswinkel, beispielhaft an Kammer 1 veranschaulicht

Ähnliche Operationen können auch durchgeführt werden, wenn die Orientierung der *Graphen-Balkenelemente* an dem gemeinsamen *LINK-Knoten* unterschiedlich ist oder wenn *Grenzlinien* involviert sind. In letzterem Fall haben die ermittelten Kammern keine geometrische Entsprechung in der Struktur, sondern sind Hohlräume zwischen den Bauraumgrenzen und der Struktur.

Die an eine Kammer angrenzenden *Graphen-Balkenelemente* und *Grenzlinien* werden als Polygone aus ihren Start- und Endpunkten (Koordinaten der *LINK-Knoten*) definiert. Gekrümmte *Graphen-Balkenelemente* werden nicht nur durch Start- und Endpunkt, sondern zusätzlich noch durch insgesamt drei zwischen Start- und Endpunkt äquidistant verteilte Punkte diskretisiert. Mithilfe der *Gaußschen Trapezformel* kann der von dem Polygon eingeschlossene Flächeninhalt und damit auch der Flächeninhalt der Kammer, berechnet werden. Das Polygon besteht insgesamt aus I Punkten, wobei Punkt 1 und Punkt I identisch sind. Der Zusammenhang zwischen den Koordinaten x_i und y_i des Punkts i des Polygons und seinem Flächeninhalt A lautet:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{I-1} (x_i \cdot y_{i+1} - y_i \cdot x_{i+1}) \,. \tag{3-2}$$

Das Größenverhältnis der Kammer mit dem größten Flächeninhalt zu der mit dem geringsten Flächeninhalt darf den Wert für das maximale Größenverhältnis nicht überschreiten. Hierbei werden nur Kammern ohne Grenzlinien berücksichtigt.

3.4 Algorithmus zur Bestimmung der Bauraumgrenzen

Die Information, ob eine Wand des Profilquerschnitts der durch den Graphen beschriebenen Struktur zu den Bauraumgrenzen des Profilquerschnitts gehört, ist relevant für Algorithmen, welche die Geometrie der Struktur ändern. Eine solche Wand gilt als *non-design-space* und darf nicht verschoben oder ersatzlos entfernt werden. Wände, die nicht zu den Bauraumgrenzen des Profilquerschnitts gehören, dürfen nicht über die Bauraumgrenzen des Profilquerschnitts hinaus nach außen verschoben werden.

Da die Bauraumgrenzen des Profilquerschnitts nicht explizit definiert werden, sondern sich implizit aus außen liegenden *Graphen-Balkenelementen* und *Grenzlinien* ergeben (siehe Abschnitt 3.2), muss eine Unterscheidung zwischen der Außenseite und dem Innenbereich des Profilquerschnitts stattfinden. Hierfür wird die im vorigen Abschnitt vorgestellte Methodik zur Bestimmung der Flächeninhalte von Kammern verwendet. Der Bereich außerhalb der Bauraumgrenzen des Profilquerschnitts wird als Kammer mit unendlicher Ausdeh-

nung betrachtet und die angrenzenden *Graphen-Balkenelemente* und *Grenzlinien* bilden die Bauraumgrenzen des Profilquerschnitts.
Wird mit Hilfe von Gleichung (3-2) der Flächeninhalt des Polygons bestimmt, welches durch die Bauraumgrenzen gebildet wird, ist dieser Wert jedoch nicht unendlich, da der Algorithmus den Flächeninhalt innerhalb des Polygons berechnet und nicht außerhalb. Der Flächeninhalt entspricht der Summe der Flächeninhalte aller anderen Kammern des Profilquerschnitts. Hierdurch können eindeutig die zu den Bauraumgrenzen des Profilquerschnitts der Struktur gehörenden *Graphen-Balkenelemente* und *Grenzlinien* bestimmt werden.

3.5 Softwareumsetzung

Um aus Graphen, welche nach der in diesem Kapitel beschriebenen Syntax aufgebaut sind, automatisiert ein Geometriemodell oder ein rechenfähiges *FE-Modell* zu erzeugen, wird das hierfür entwickelte *JAVA-Programm GRAMB* (*GRAph based Mechanics Builder*) verwendet. *GRAMB* transformiert den Graphen in Programmbefehle für eines der *CAE-Systeme* (*Computer Aided Engineering*) *Altair HyperMesh®*, *Dassault Systèmes CATIA®* oder *SFE CONCEPT®*. Diese erzeugen dann während der Laufzeit von *GRAMB* ein Geometrie- und/oder *FE-Modell* von der Struktur. Die Art der Ansteuerung und auch die verfügbaren Optionen bei der Erzeugung des Geometrie- oder *FE-Modells* sind dabei unterschiedlich.
Vor dem Start von *GRAMB* können Optionen in einer *ASCII-basierten* Konfigurationsdatei festgelegt werden. Dazu zählen graphenspezifische Optionen wie Fertigungsrestriktionen und Optionen, die sich auf die einzelnen *CAE-Systeme* auswirken, welche zur Erzeugung des Geometrie- oder *FE-Modells* verwendet werden.
Im Folgenden werden die Schnittstellen zu den unterschiedlichen *CAE-Systemen* beschrieben.

- **Schnittstelle zu *Dassault Systèmes CATIA®***

GRAMB kommuniziert mit *Dassault Systèmes CATIA®* über die *COM-Schnittstelle* (*Component Object Model*). Dadurch kann *GRAMB* Befehle zur Geometrieerzeugung direkt während der Laufzeit an *Dassault Systèmes CATIA®* weitergeben. In *Dassault Systèmes CATIA®* wird zunächst eine neue Bauteil-Datei angelegt. Anschließend wird eine zweidimensionale Skizze vom Profilquerschnitt der Struktur erstellt und diese Skizze dann extrudiert. Die Wanddicken der einzelnen Wände sind bereits in der Skizze berücksichtigt. Das Modell am Ende des Prozesses ist ein geometrisches Volumenmodell.

- **Schnittstelle zu *SFE CONCEPT®***

Ein Merkmal von *SFE CONCEPT®* ist die Möglichkeit der impliziten Parametrisierung von Modellen, die aus mehreren einzelnen Strukturen bestehen, welche miteinander über Schweißpunkte, Schweißnähte oder dergleichen verbunden sind. Vor dem Start von

GRAMB und der Prozedur der *FE-Modellerzeugung* aus einem Graphen, muss einmalig manuell ein Modell in *SFE CONCEPT*® erstellt werden. In diesem wird ein Dummy platziert, welcher als Platzhalter für die durch den Graphen beschriebene Struktur dient. Dieser Dummy besteht aus einer Führungslinie, die beliebig im Raum verlaufen kann und einem generischen Profilquerschnitt, der an dieser Führungslinie entlang extrudiert wird. Zusätzlich hierzu können allerdings auch noch weitere Strukturen erzeugt werden, die untereinander und auch mit der durch den Graphen beschriebenen Struktur verbunden sind. Außerdem kann der Profilquerschnitt der durch den Graphen beschriebenen Struktur in seiner Größe entlang der Führungslinie skaliert werden.
Das Programm *SFE CONCEPT*® besitzt die Möglichkeit *ASCII-Dateien* mit speziellen Befehlen, sog. *Makro-Dateien*, einzulesen und diese Befehle auszuführen. *GRAMB* erzeugt eine solche Datei, basierend auf dem Graphen, und startet anschließend *SFE CONCEPT*®, welches dann den Dummy-Profilquerschnitt in dem Modell durch den vom Graphen beschriebenen Profilquerschnitt ersetzt. Ein Vorteil ist, dass die Verbindungen zu den anderen Strukturen in dem Modell trotz der Aktualisierung des Profilquerschnitts erhalten bleiben. Hierdurch ist es möglich, die durch den Graphen beschriebene Struktur inkl. der notwendigen Verbindungstechnik in eine größere Bauteilgruppe einzubinden.
Eine Vernetzung der Flächenmodelle aller Strukturen mit *Finiten Elementen* findet ebenfalls in *SFE CONCEPT*® statt.

- **Schnittstelle zu *Altair HyperMesh*®**

Altair HyperMesh® kann *ASCII-Dateien* einlesen und die darin enthaltenen Befehle ausführen, wenn diese in der Kommandosprache von *Altair HyperMesh*® verfasst sind. Diese Kommandosprache ist weit entwickelt und bietet umfangreiche Möglichkeiten der Geometrie- und *FE-Modellerzeugung* auch im Batch-Modus.
In der Konfigurationsdatei von *GRAMB* können bei der Verwendung von *Altair HyperMesh*® für die Erzeugung eines *FE-Modells* verschiedene zusätzliche Optionen definiert werden. Dazu zählt die Möglichkeit der Definition einer Führungslinie für die Extrusion des Profilquerschnitts durch die Definition einer beliebigen Anzahl von Führungspunkten, aus denen sich diese Führungslinie zusammensetzt. Außerdem können Aussparungszylinder definiert werden, welche kreisrunde Löcher in der Struktur erzeugen, wie sie z.B. für Schrauben oder Bolzen benötigt werden. Die Definition von Symmetrieebenen, an denen die Struktur gespiegelt werden kann, ist ebenfalls möglich.
GRAMB erzeugt eine *ASCII-Datei*, welche Befehle in der Kommandosprache von *Altair HyperMesh*® enthält und startet das Programm anschließend. *Altair HyperMesh*® liest diese Datei ein und erzeugt zunächst den im Graphen definierten Profilquerschnitt der Struktur und extrudiert diesen an der Führungslinie entlang. Optionale Operationen wie Spiegelungen an Symmetrieebenen oder ein Verschneiden der Struktur mit Aussparungszylindern

werden vor der Vernetzung des erzeugten Flächenmodells durchgeführt. Anschließend wird das *FE-Modell* exportiert.

Abbildung 3-10 zeigt einen mathematischen Graphen und das dazugehörige, von *GRAMB* erzeugte, *FE-Modell*. Hierfür wird die Schnittstelle zu *Altair HyperMesh®* verwendet und sowohl eine Führungslinie als auch Aussparungszylinder werden in der Konfigurationsdatei definiert.

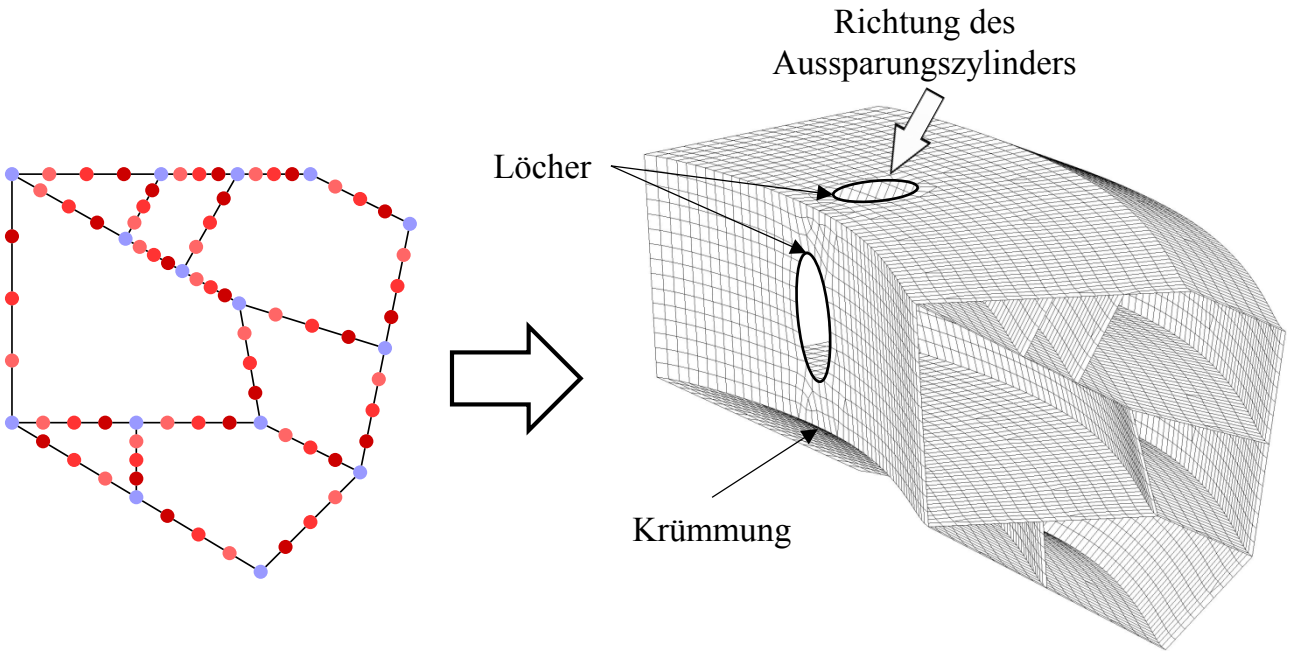


Abbildung 3-10: Aus einem Graphen erzeugtes FE-Modell mittels GRAMB und seiner Schnittstelle zu Altair HyperMesh®

4 Heuristiken für die Strukturoptimierung von crashbelasteten Strukturen

In der Optimierung wird unter einer Heuristik eine methodische Anleitung verstanden, welche versucht, mit begrenztem Wissen das Optimum des Optimierungsproblems zu finden oder zumindest eine Verbesserung zu erreichen. Heuristiken werden in der Optimierung immer dann eingesetzt, wenn rein mathematische Verfahren nicht eingesetzt werden können oder ineffektiv sind. Die Topologieoptimierung von crashbelasteten Strukturen ist ein solches Feld. Zahlreiche Arbeiten im Bereich der Optimierung basieren teilweise oder vollständig auf Heuristiken. Beispiele hierfür aus dem Bereich der Topologieoptimierung von crashbelasteten Strukturen sind die in Abschnitt 2.4 vorgestellten Arbeiten von Mayer et al. [1996], Soto [2004], Forsberg und Nilsson [2007] sowie Patel [2009]. Diese verwenden alle eine Heuristik, die auf der Homogenisierung von Spannungen, Dehnungen oder inneren Energiedichten in der Struktur basiert. Aber auch im Bereich der Topologieoptimierung mit linear statischen Lasten werden heuristische Verfahren eingesetzt. Ein Vertreter hierfür ist das *SKO-Verfahren* (*Soft Kill Option*), welches bionische Wachstumsregeln simuliert [Baumgartner et al 1992].

In diesem Kapitel werden acht Heuristiken vorgestellt, die in der Methode der *Graphen- und Heuristikbasierten Topologieoptimierung* (*GHT*) verwendet werden. Die Heuristiken sind aus Expertenwissen abgeleitet, welches in Arbeitskreissitzungen mit Automobilherstellern im Rahmen des *BMBF-Verbundprojekts Methodische und softwaretechnische Umsetzung der Topologieoptimierung crash-beanspruchter Fahrzeugstrukturen* (Förderkennzeichen 01IS10053A) gesammelt worden ist.
Allen Heuristiken ist gemein, dass sie, basierend auf Simulationsdaten von Crashsimulationen und der Geometrie der Struktur, entweder die Topologie oder nur die Form oder Wanddicken der Struktur modifizieren. Das Ziel hierbei ist eine Verbesserung des mechanischen Verhaltens der Struktur in den Crashlastfällen. Die Heuristiken sind dabei sehr unterschiedlich und teilweise gegenläufig. Die Kombination dieser unterschiedlichen und teilweise miteinander konkurrierenden Heuristiken macht den effizienten Einsatz in einer Optimierung möglich, da erst hierdurch Vielfalt im Sinne von deutlich unterschiedlichen Entwürfen entstehen kann.
Die Heuristiken können aufgrund ihres Ursprungs allerdings nur für Optimierungen eingesetzt werden, in denen die dominierenden Anforderungen aus Crashlastfällen stammen. Für andere Anwendungsgebiete müssten neue Heuristiken entwickelt und implementiert werden.

Die Heuristiken arbeiten graphenbasiert, alle Änderungen an der Struktur werden an dem Graphen der Struktur durchgeführt und die in Kapitel 3 beschriebenen Verfahrensweisen zur graphenbasierten Bestimmung von Verbindungswinkeln zwischen Wänden, Abständen zwischen Wänden und allgemein zur Überprüfung von Fertigungsrestriktionen werden verwendet.

4.1 Heuristiken zur Topologieänderung

Alle Heuristiken dieser Gruppe haben gemein, dass ihre einmalige Anwendung die Topologieklasse einer Struktur um eine Stufe verändert.

4.1.1 Heuristik „Entfernen unbelasteter Wände“

Die Heuristik *Entfernen unbelasteter Wände* hat das Ziel, nicht benötigte Wände aus einer Struktur zu entfernen. Ein geeignetes Maß für die strukturmechanische Relevanz einer Wand stellt ihre innere Energiedichte dar. Ist diese in Relation zu der durchschnittlichen inneren Energiedichte der Gesamtstruktur vernachlässigbar gering, lässt dies darauf schließen, dass die betreffende Wand entfernt werden kann, ohne die mechanischen Eigenschaften der Gesamtstruktur signifikant zu beeinflussen. Eine solche Aussage lässt sich jedoch niemals absolut, sondern immer nur für spezifische Lastfälle treffen. Außerdem ist es möglich, dass eine Wand zwar kaum deformiert wird und somit eine geringe innere Energiedichte aufweist, aber dennoch für die Struktur relevant ist, da sie andere Wände abstützt und Instabilitäten wie Knicken oder Beulen verhindert.
Anwendung findet diese Heuristik vor allem bei Strukturen, bei denen die innere Energiedichte unter Last inhomogen verteilt ist. In Abbildung 4-1 ist eine Profilstruktur dargestellt, deren Extrusionsrichtung normal zu der Darstellungsebene liegt und die durch einen Zylinder intrudiert wird. Die gestrichelt dargestellte Wand der Struktur ist nur einer geringen Belastung ausgesetzt und nimmt daher in Relation zum Rest der Struktur nur geringe Mengen an Energie auf. Die Heuristik würde diese Wand aus der Struktur entfernen.

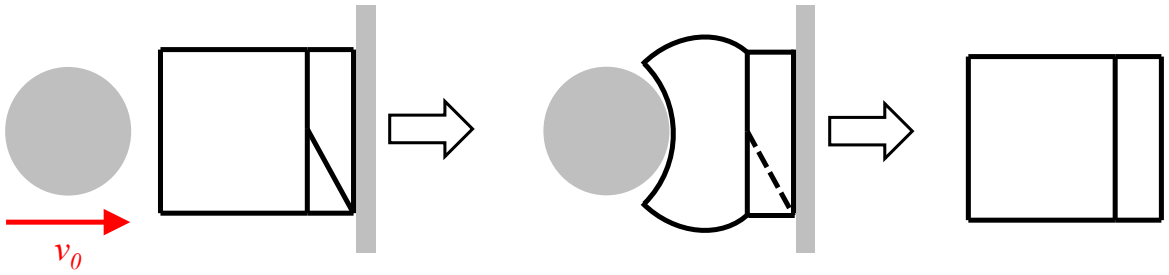


Abbildung 4-1: Ziel und Anwendungsbereich der Heuristik „Entfernen unbelasteter Wände“

Zunächst werden für alle Wände der Struktur für alle Lastfälle die inneren Energiedichten, also die Quotienten aus der inneren Energie und dem Volumen der Wände berechnet. Hierfür werden die inneren Energien aller zu der jeweiligen Wand gehörenden *Finiten Elemente* summiert. Es wird dabei der während der Simulation auftretende Maximalwert der inneren Energie verwendet. Der berechnete Wert ist also ein Maß dafür, wie viel Energie eine Wand in Relation zu ihrem Volumen zum jeweiligen Zeitpunkt der größten Energieaufnahme absorbiert hat. Dadurch wird auch berücksichtigt, dass einzelne Wände einer Struktur zeitversetzt Energie aufnehmen können und daher auch unterschiedliche Zeitpunkte der maximalen Energieaufnahme besitzen können. Für die Entscheidung, ob eine Wand für einen bestimmten Lastfall mechanisch relevant ist, muss dieser Umstand berücksichtigt werden.
Die maximale innere Energiedichte u_{max,n_w,n_l} von Wand n_w in Lastfall n_l ergibt sich aus ihrer maximalen inneren Energieaufnahme U_{max,n_w,n_l} und ihrem Volumen V_{n_w}:

$$u_{max,n_w,n_l} = \frac{U_{max,n_w,n_l}}{V_{n_w}}. \tag{4-1}$$

Um die innere Energiedichte der Wände in den unterschiedlichen Lastfällen in Relation zu der Gesamtstruktur setzen zu können, wird ein Maß für die innere Energiedichte der Gesamtstruktur pro Lastfall benötigt. Für dessen Ermittlung sind die folgenden zwei Möglichkeiten naheliegend:

(1) Bildung des Quotienten aus der inneren Energie der Gesamtstruktur zum Zeitpunkt der maximalen Energieaufnahme und des Volumens der Gesamtstruktur.
(2) Berechnung des Mittelwerts der maximalen inneren Energiedichten aller Wände.

Obwohl die erste Möglichkeit die physikalisch plausibelste ist, da sie die tatsächliche maximale innere Energiedichte der Gesamtstruktur ermittelt, ist sie aufgrund des möglichen Zeitversatzes der Zeitpunkte der maximalen Energieaufnahme der einzelnen Wände nicht sinnvoll. Entsprechend der zweiten Möglichkeit ergibt sich der Mittelwert der maximalen inneren Energiedichten aller N_w Wände der Struktur in Lastfall n_l als:

$$\bar{u}_{max,n_l} = \frac{1}{N_w} \cdot \sum_{n_w=1}^{N_w} u_{max,n_w,n_l}. \tag{4-2}$$

Hiermit werden die maximalen inneren Energiedichten der Wände normiert:

$$\tilde{u}_{max,n_w,n_l} = \frac{u_{max,n_w,n_l}}{\bar{u}_{max,n_l}}. \tag{4-3}$$

Damit eine Wand für eine Entfernung aus der Struktur in Frage kommt, muss ihre normierte maximale innere Energiedichte $\tilde{u}_{max,n_w,n_l}$ in allen Lastfällen geringer als die kritische normierte maximale innere Energiedichte $\tilde{u}_{crit}$ sein. Mit Hilfe dieses Parameters kann gesteuert werden, ab wann eine Wand in einem Lastfall als für die Struktur mechanisch relevant bewertet wird. Als Standardwert für $\tilde{u}_{crit}$ wird 0,5 verwendet.
Mehrere Wände in der Struktur können diese Bedingung erfüllen und daher ist ein zweites Kriterium notwendig, um zu entscheiden, welche dieser Wände am ehesten entfernt werden sollte. Hierzu werden alle Wände, welche diese Bedingung erfüllen, aufsteigend nach dem Mittelwert ihrer normierten maximalen inneren Energiedichten über alle N_l Lastfälle sortiert. Dieser Mittelwert $\bar{\tilde{u}}_{max,n_w}$ ergibt sich als:

$$\bar{\tilde{u}}_{max,n_w} = \frac{1}{N_l} \cdot \sum_{n_l=1}^{N_l} \tilde{u}_{max,n_w,n_l} \,. \tag{4-4}$$

Die Heuristik versucht, diejenige Wand, welche den geringsten Wert $\bar{\tilde{u}}_{max,n_w}$ aufweist, aus der Struktur zu entfernen. Hierbei werden die vorgegebenen Fertigungsrestriktionen (siehe Abschnitt 3.3) eingehalten und es wird vermieden, dass offene Enden im Inneren der Struktur entstehen, da diese i.d.R. mechanisch ungünstig sind. Ein Beispiel für ein offenes Ende im Inneren einer Struktur ist in Abbildung 4-2 veranschaulicht. Außerdem werden keine Wände entfernt, welche zu den Bauraumgrenzen des Profilquerschnitts der Struktur zählen, damit keine neuen, äußeren Öffnungen in die Struktur eingebracht werden.
Ist die Entfernung einer Wand nicht möglich, versucht die Heuristik diejenige Wand mit dem nächsthöheren Wert $\bar{\tilde{u}}_{max,n_w}$ zu entfernen. Dies wird so lange fortgesetzt, bis entweder eine Wand erfolgreich aus der Struktur entfernt wurde oder aber alle Wände, die das Löschkriterium erfüllen, durchlaufen wurden.

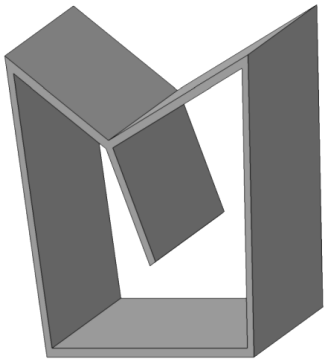


Abbildung 4-2: Offenes Ende einer Wand im Inneren einer Struktur

Entfernt die Heuristik eine Wand aus der Struktur, wird überprüft, ob bei anderen Wänden offene Enden entstanden sind. Dies ist der Fall, wenn bei den *Graphen-Balkenelementen* der anderen Wände ein *LINK-Knoten* einen Grad von 1 aufweist.

Diese Wände werden ebenfalls aus der Struktur gelöscht, wenn sie die folgenden drei Voraussetzungen erfüllen:

1) Der Wert $\tilde{u}_{max,n_w,n_l}$ der Wände ist in allen Lastfällen geringer als $\tilde{u}_{krit}$.
2) Die Wände sind nicht Teil der Bauraumgrenzen des Profilquerschnitts der Struktur.
3) Eine Entfernung der Wände kann ohne eine Verletzung der Fertigungsrestriktionen durchgeführt werden.

Auf diese Weise ist es möglich, dass komplette Lastpfade, bestehend aus einzelnen miteinander verbundenen Wänden, entfernt werden. Dieser Prozess ist anhand eines Graphen in Abbildung 4-3 veranschaulicht.

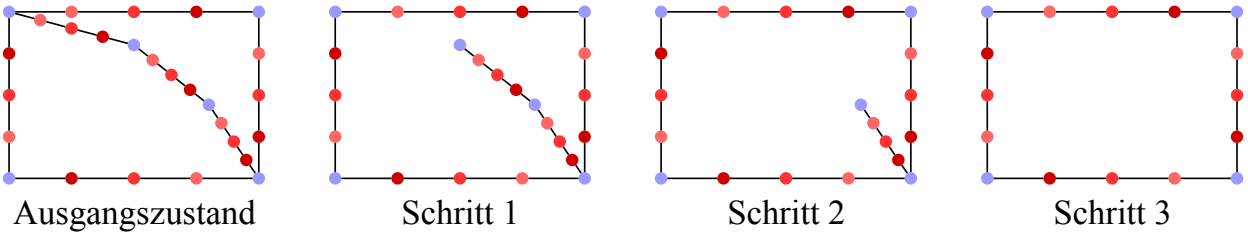


Abbildung 4-3: Entfernen eines Lastpfads, bestehend aus mehreren Wänden

Der Algorithmus, welcher dieser Heuristik zugrunde liegt, ist in Abbildung 4-4 dargestellt, dabei wird m_w als zweiter Index zur Nummerierung der Wände benutzt. Außerdem wird der Index n_{ws} für die nach dem Wert $\bar{\tilde{u}}_{max,n_w}$ sortierten Wände verwendet.

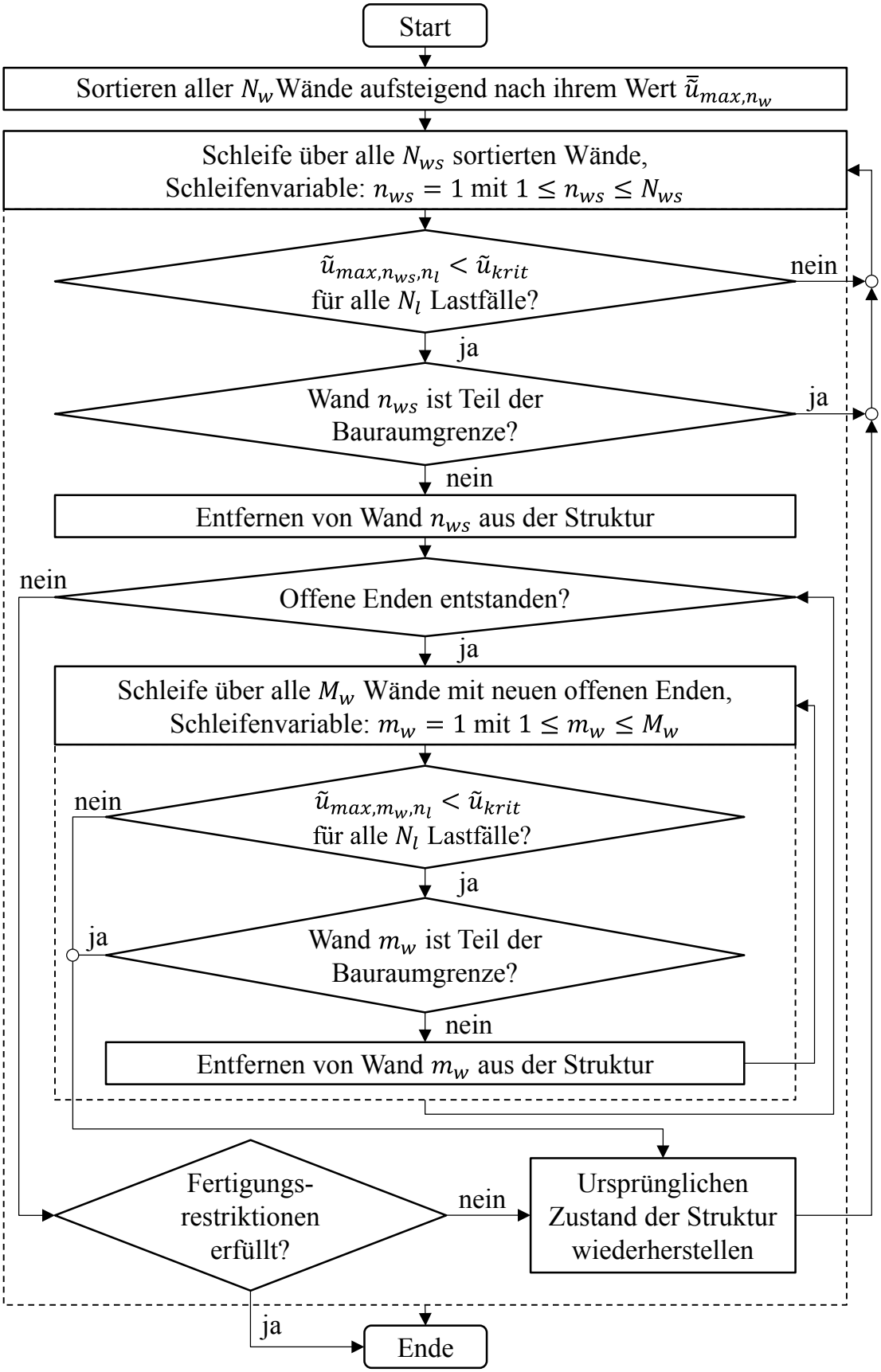


Abbildung 4-4: Algorithmus der Heuristik „Entfernen unbelasteter Wände“

4.1.2 Heuristik „Abstützen sich schnell deformierender Wände“

Ein Grundprinzip der Auslegung von Fahrzeugstrukturen nach den Anforderungen der passiven Sicherheit ist die Umwandlung von kinetischer Energie in Deformationsenergie durch kontrollierte Deformation von einzelnen Fahrzeugkomponenten. Ein prominentes Beispiel hierfür ist der Längsträger, der durch ein gleichmäßiges Faltenbeulen große Mengen an Energie aufnehmen kann.
Die Geschwindigkeit, mit welcher sich eine Wand in Relation zu der Gesamtstruktur deformiert, gibt Aufschluss darüber, ob sich diese Wand kontrolliert deformiert oder ob sie durch zu schnelle Deformation die strukturelle Integrität der Gesamtstruktur schwächt. Die Heuristik *Abstützen sich schnell deformierender Wände* hat das Ziel, Wände in einer Struktur zu identifizieren und zu verstärken, die sich schneller und unkontrollierter als der Rest der Struktur deformieren. Hierzu zählen Wände, die durch eine Belastung instabil werden, also Beul-, Falt- oder Knickphänomene aufweisen und Wände, die einer Intrusion durch andere Körper weniger Widerstand als der Rest der Struktur entgegen setzen.
Anhand einer Profilstruktur, welche zwischen zwei Barrieren zusammengedrückt wird, ist das Prinzip dieser Heuristik in Abbildung 4-5 verdeutlicht. Die gestrichelte Wand in der Mitte der Profilstruktur hat aufgrund ihrer Länge und Lage eine größere Neigung zum Beulen als die anderen Wände der Struktur und wird daher durch die Heuristik mittig, senkrecht und auf dem kürzesten Weg mit einer neuen Wand abgestützt.

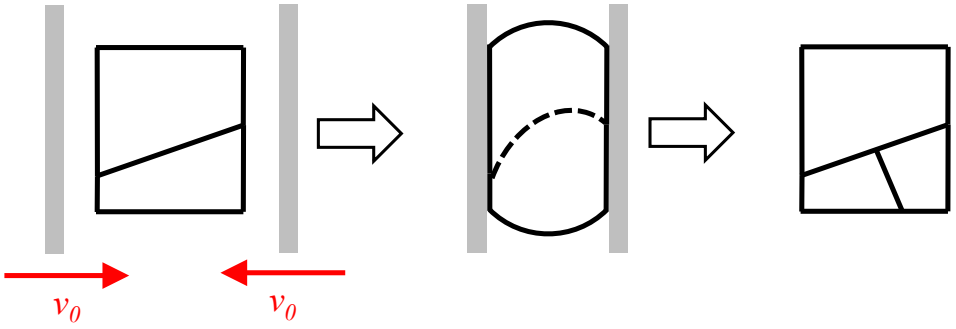


Abbildung 4-5: Ziel und Anwendungsbereich der Heuristik „Abstützen sich schnell deformierender Wände“

Um die Deformationsgeschwindigkeit einer Wand quantifizieren und bewerten zu können, wird ein geeignetes Kriterium benötigt. Hierfür wird für jede Wand der Struktur für jeden Lastfall ein Deformationsindex berechnet. Dieser nutzt die Tatsache, dass bei Beul-, Knick- und Faltphänomenen in der unmittelbaren Nähe des Phänomens große Differenzen in den Geschwindigkeiten der *FE-Knoten* auftauchen. Dies liegt darin begründet, dass Deformationen infolge von Instabilitätsphänomenen mit hohen Geschwindigkeiten auftreten und dass diese Deformationen lokal stark ausgeprägt sind. In Abbildung 4-6 ist ein *FE-Modell* eines beulenden Blechs zu zwei unterschiedlichen Zeitpunkten inklusive zweier hervorgehobener

FE-Knoten dargestellt. Abbildung 4-7 zeigt die Geschwindigkeiten dieser beiden *FE-Knoten* in z-Richtung in Abhängigkeit von der Zeit. Es ist deutlich erkennbar, dass trotz des geringen geometrischen Abstands der *FE-Knoten* zueinander, signifikante Differenzen in den Geschwindigkeiten in z-Richtung auftreten.

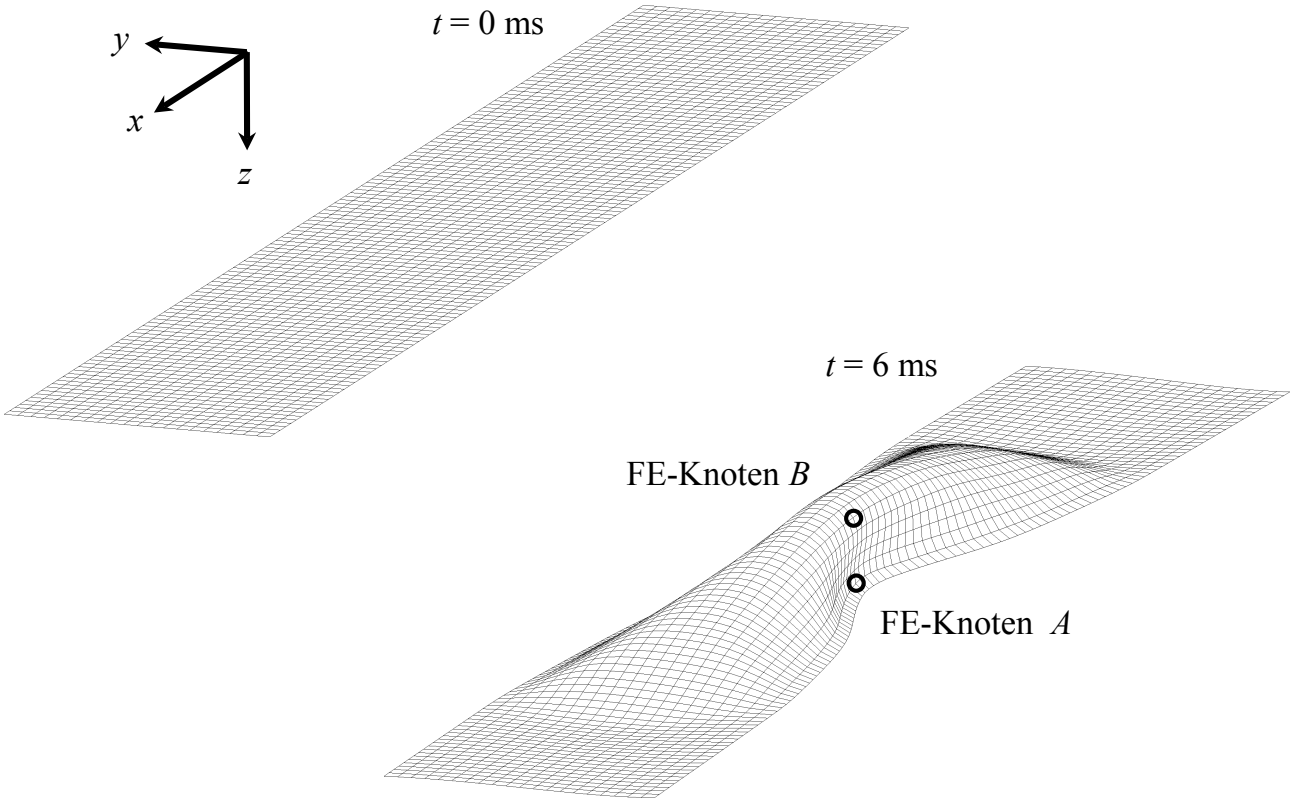


Abbildung 4-6: Beulende Blechstruktur

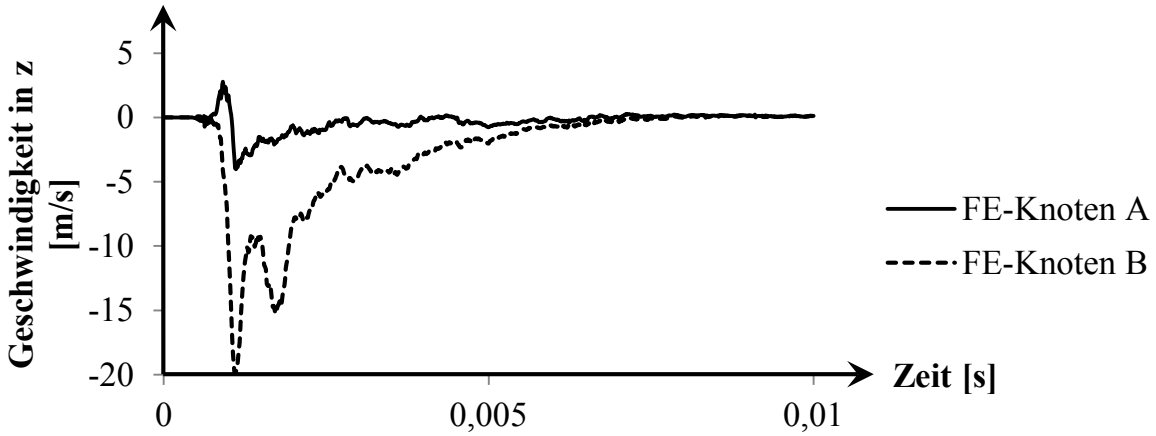


Abbildung 4-7: Differenzen in den Geschwindigkeiten von FE-Knoten bei der beulenden Blechstruktur

Für die Berechnung der Deformationsindizes werden die zeitabhängigen Differenzen der Geschwindigkeitsvektoren aller *FE-Knoten* untereinander der jeweiligen Wand in dem jeweiligen Lastfall verwendet.
Um über einen kurzen Zeitraum auftretende Geschwindigkeitsdifferenzen höher zu gewichten als geringere über einen längeren Zeitraum, werden die Geschwindigkeitsdifferenzen quadriert. Außerdem werden sie durch den Abstand der *FE-Knoten* im nicht deformierten Zustand der Struktur dividiert, um zu berücksichtigen, dass Geschwindigkeitsdifferenzen von nah beieinander liegenden *FE-Knoten* für diese Heuristik entscheidender sind, als die von weiter voneinander entfernt liegenden *FE-Knoten*.
Die ermittelten Geschwindigkeitsdifferenzen werden aufsummiert und durch die Anzahl der berechneten Werte geteilt, um den Deformationsindex unabhängig von dieser Anzahl zu machen. Die Anzahl der berechneten Werte ergibt sich aus der Anzahl der *FE-Knoten* N_{f,n_w,n_l} der dazugehörigen Wand n_w in Lastfall n_l und der Anzahl der Zeitschritte N_{t,n_l}, zu denen die Geschwindigkeitsvektoren analysiert werden. Dabei wird berücksichtigt, dass *FE-Knoten* nicht mit sich selbst und auch nicht doppelt untereinander verglichen werden. Der Deformationsindex α_{n_w,n_l} von Wand n_w in Lastfall n_l wird berechnet als:

$$\alpha_{n_w,n_l} = \frac{1}{\left({N_{f,n_w,n_l}}^2 - N_{f,n_w,n_l}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot N_{t,n_l}} \cdot \sum_{n_t=1}^{N_{t,n_l}} \sum_{n_f=1}^{N_{f,n_w,n_l}} \sum_{m_f=(n_f+1)}^{N_{f,n_w,n_l}} \frac{\left|\vec{v}_{n_f,n_w,n_l,n_t} - \vec{v}_{m_f,n_w,n_l,n_t}\right|^2}{\left|\vec{p}_{n_f,n_w,n_l} - \vec{p}_{m_f,n_w,n_l}\right|} \tag{4-5}$$

mit:

$\vec{v}_{n_f,n_w,n_l,n_t}$ = Geschwindigkeitsvektor von *FE-Knoten* n_f der Wand n_w in Lastfall n_l zum Zeitpunkt n_t,

$\vec{p}_{n_f,n_w,n_l}$ = Positionsvektor von *FE-Knoten* n_f der Wand n_w in Lastfall n_l zum Zeitpunkt $t = 0$.

Um das mechanische Verhalten einer einzelnen Wand n_w zu dem der Gesamtstruktur in Relation setzen zu können, werden die Deformationsindizes mit den Mittelwerten der Deformationsindizes aller N_w Wände in dem jeweiligen Lastfall n_l normiert. Dieser normierte Deformationsindex $\tilde{\alpha}_{n_w,n_l}$ gibt an, wie stark ein instabiles Deformationsverhalten einer bestimmten Wand in einem bestimmten Lastfall verglichen zu den restlichen Wänden der Struktur ausgeprägt ist:

$$\tilde{\alpha}_{n_w,n_l} = \frac{\alpha_{n_w,n_l}}{\frac{1}{N_w} \cdot \sum_{n_w=1}^{N_w} \alpha_{n_w,n_l}}. \tag{4-6}$$

Im Folgenden ist nur der größte normierte Deformationsindex aller Lastfälle $\tilde{\alpha}_{max,n_w}$ einer Wand n_w relevant. Durch die Verwendung des normierten Deformationsindex wird sichergestellt, dass ein Lastfall mit geringen Deformationsgeschwindigkeiten, aber großen relativen Unterschieden zwischen den Deformationsindizes für die Heuristik relevanter ist, als ein Lastfall mit hohen Deformationsgeschwindigkeiten und einem gleichmäßigen Deformationsverhalten der Struktur.
Die Heuristik versucht, die Wand mit dem höchsten Wert $\tilde{\alpha}_{max,n_w}$ mittig und auf dem kürzesten Weg abzustützen. Für die Prozedur des Abstützens wird das *Graphen-Balkenelement* der abzustützenden Wand in zwei neue *Graphen-Balkenelemente* aufgeteilt, die miteinander verbunden sind und in Krümmung, Wanddicke und Orientierung dem entfernten, abzustützenden *Graphen-Balkenelement* entsprechen. Der *LINK-Knoten*, welcher diese beiden *Graphen-Balkenelemente* miteinander verbindet, dient als Ausgangspunkt für das neue *Graphen-Balkenelement* der abstützenden Wand. Als Endpunkt für die neue Wand wird entweder ein Punkt auf einer anderen Wand ausgewählt (Fall 1) oder eine bereits existierende Ecke der Struktur verwendet (Fall 2).
Im ersten Fall wird das *Graphen-Balkenelement* der anderen Wand dann ebenfalls in zwei neue *Graphen-Balkenelemente* aufgespalten und der neu entstandene *LINK-Knoten* wird als zweiter *LINK-Knoten* des *Graphen-Balkenelements* der abstützenden Wand verwendet (Abbildung 4-8).
In Fall 2 kann hierfür der *LINK-Knoten*, welcher die Ecke in der Struktur beschreibt, verwendet werden (Abbildung 4-9).

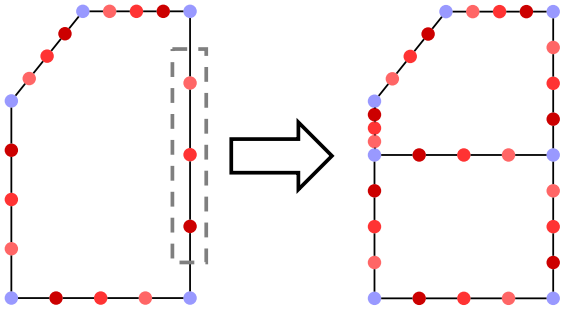


Abbildung 4-8: Abstützen einer Wand (Fall 1)

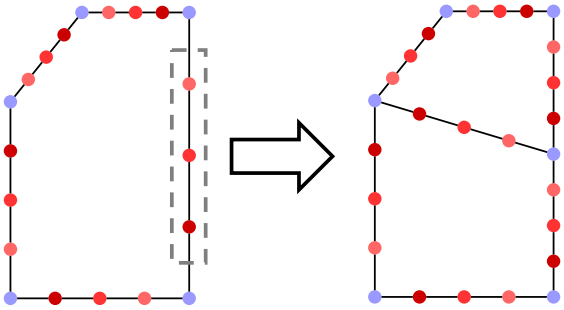


Abbildung 4-9: Abstützen einer Wand (Fall 2)

Um entscheiden zu können, welche Art der Abstützung verwendet wird und welche Wände und/oder Ecken der Struktur hierfür in Frage kommen, wird ausgehend vom Startpunkt in der Mitte der abzustützenden Wand in zwei Phasen nach Verbindungspartnern gesucht. Welcher der möglichen Verbindungspartner ausgewählt wird, hängt von der Entfernung des potentiellen Endpunkts der abstützenden Wand von ihrem Startpunkt ab. Hierdurch soll die Länge der abstützenden Wand möglichst gering gehalten werden, da das Abstützen auf dem

kürzesten Weg stattfinden soll. Die Länge einer Wand beeinflusst Ihre Neigung zum Beulen und diese soll bei der abstützenden Wand so gering wie möglich sein.

In Phase 1 wird vom Startpunkt auf der abzustützenden Wand zu allen Ecken des Profilquerschnitts der Struktur eine Linie gezogen und die Schnittwinkel mit der abzustützenden Wand ermittelt. Liegt der kleinste Schnittwinkel in dem Bereich $90° \pm \Delta\varphi$, kommt die Ecke als Endpunkt in Frage und es wird die Länge der Linie ermittelt. Als Standardwert für $\Delta\varphi$ wird 15° verwendet, da das Abstützen möglichst senkrecht zu der abzustützenden Wand stattfinden soll.
In Phase 2 wird senkrecht zu der abzustützenden Wand im Startpunkt eine Gerade erzeugt und mit Linien verschnitten, welche die anderen Wände des Profilquerschnitts der Struktur repräsentieren. Die Entfernungen der Schnittpunkte von dem Startpunkt werden ermittelt. Alle Verbindungsmöglichkeiten werden aufsteigend nach der Abstützlänge l_a sortiert. Diese ergibt sich als Entfernung des potentiellen Endpunkts vom Startpunkt der abstützenden Wand. Um die Verwendung bereits vorhandener Ecken des Profilquerschnitts der Struktur (Phase 1) als Endpunkt zu bevorzugen, werden die Entfernungen in diesem Fall noch mit dem Skalierungsfaktor s_a multipliziert. Als Standardwert für s_a wird 0,75 verwendet. Die Verbindung mit einer bereits existierenden Ecke wird also bevorzugt, so lange dies nicht zu einer Vergrößerung der Abstützlänge gegenüber der Verwendung eines Endpunkts auf einer anderen Wand von $33,\overline{3}$ % führt.

Die Heuristik versucht, diejenige Verbindung mit der geringsten Abstützlänge zu realisieren. Ist dies aufgrund der Fertigungsrestriktionen oder einer Veränderung der Bauraumgrenzen nicht möglich, wird versucht, die Verbindung mit der nächstkleineren Abstützlänge zu bewerkstelligen. Ist keine der Verbindungen realisierbar, wird versucht, die Wand mit dem nächsthöheren Wert $\tilde{\alpha}_{max,n_w}$ abzustützen. Dies wird so lange fortgesetzt, bis entweder eine Wand erfolgreich abgestützt wurde oder aber der Wert $\tilde{\alpha}_{max,n_w}$ der aktuell betrachteten Wand kleiner oder gleich 1 ist. In diesem Fall hat die Wand eine geringere Neigung zu instabilem Deformationsverhalten als der Rest der Struktur.

Abbildung 4-10 fasst den dieser Heuristik zugrunde liegenden Algorithmus zusammen. In Abbildung 4-11 ist eine Subprozedur des Algorithmus dargestellt. Es handelt sich dabei um die Bestimmung der potentiellen Endpunkte der abstützenden Wand und der Abstützlängen. Der Index n_{pe} wird für die Nummerierung dieser potenziellen Endpunkte verwendet, während der Index n_e zur Nummerierung aller Ecken des Profilquerschnitts der Struktur benutzt wird. Für die Nummerierung der Schnittpunkte in Phase 2 wird der Index n_s verwendet.

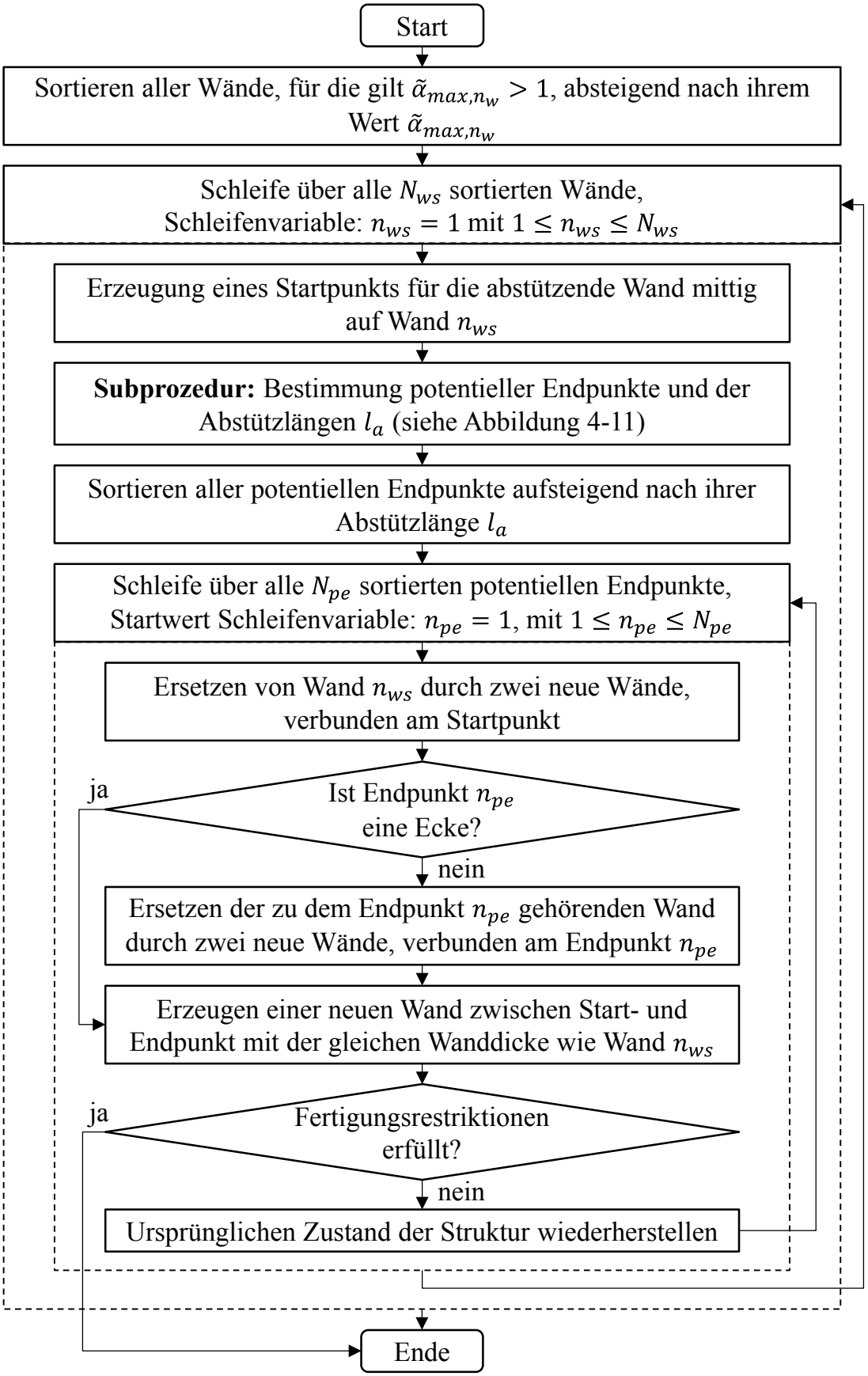


Abbildung 4-10: Algorithmus der Heuristik „Abstützen sich schnell deformierender Wände“

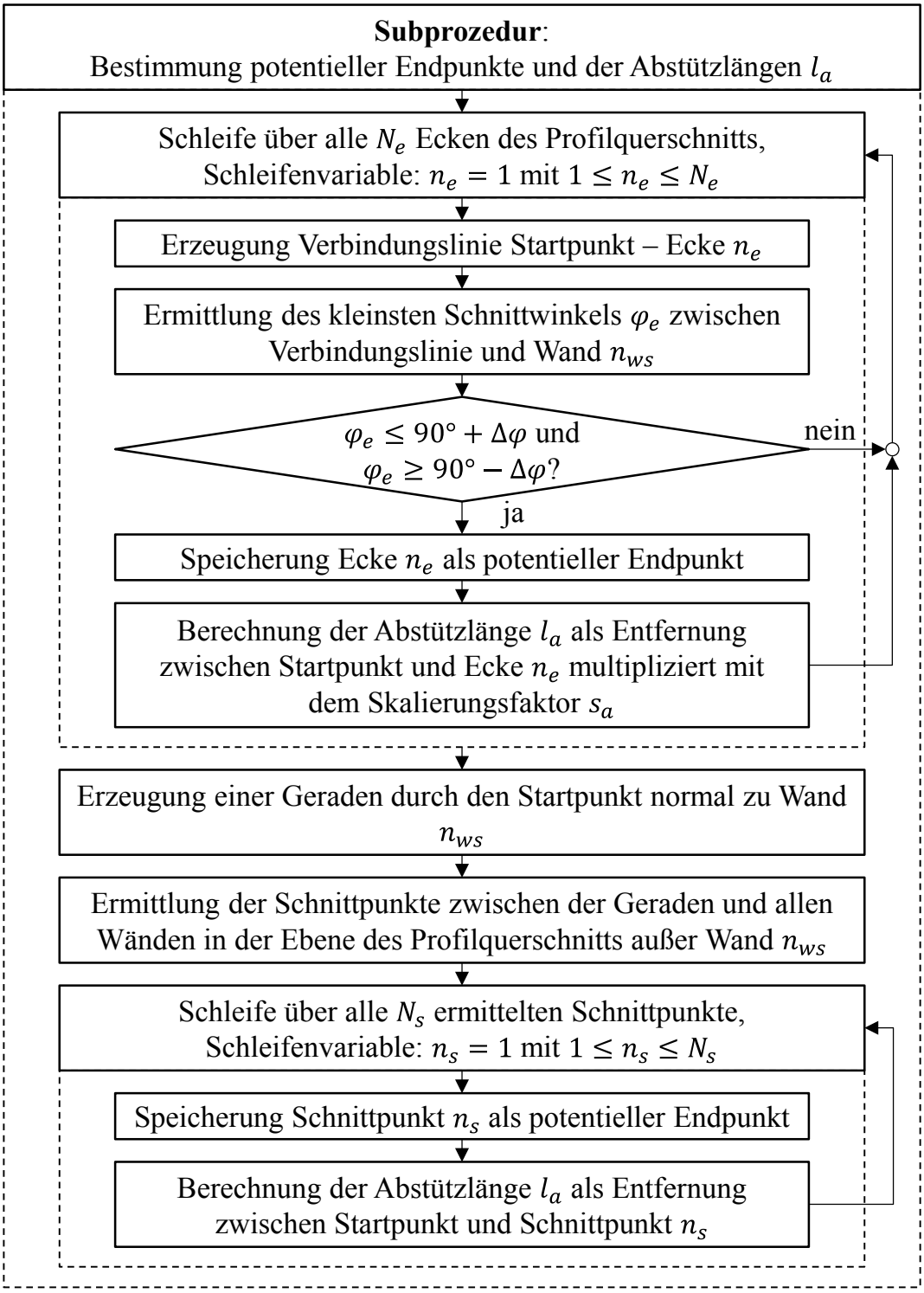


Abbildung 4-11: Subprozedur des Algorithmus der Heuristik „Abstützen sich schnell deformierender Wände“

4.1.3 Heuristik „Ausgleichen der Energiedichte“

Effiziente mechanische Strukturen zeichnen sich häufig dadurch aus, dass sie unter Last eine relativ homogen verteilte innere Energiedichte besitzen. Solche Strukturen sind unter der jeweiligen Belastung gleichmäßig beansprucht, was sich positiv auf ihre mechanischen Eigenschaften auswirkt. In der Strukturoptimierung existiert eine Reihe von Optimierungsansätzen, welche eine homogene Verteilung der inneren Energiedichte als Optimalitätskriterium einsetzen. Ein Beispiel hierfür ist die in Abschnitt 2.4.2 vorgestellte *HCA-Methode*.
Die Heuristik *Ausgleichen der Energiedichte* versucht, Bereiche einer Struktur mit einer hohen inneren Energiedichte mit Bereichen, welche eine geringe innere Energiedichte aufweisen, zu verbinden. Dadurch soll die Verteilung der inneren Energiedichte in der Gesamtstruktur homogenisiert werden. In Abbildung 4-12 ist ein Beispiel für den Anwendungsbereich dieser Heuristik dargestellt. Die dort gezeigte, durch einen Zylinder intrudierte Profilstruktur weist im Auftreffbereich des Zylinders eine hohe innere Energiedichte auf, während der gegenüberliegende Bereich der Profilstruktur gegen eine Wand gedrückt wird und kaum Energie absorbiert. Die Heuristik würde diese beiden, in der Abbildung gestrichelt dargestellten Bereiche miteinander durch eine neue Wand verbinden.

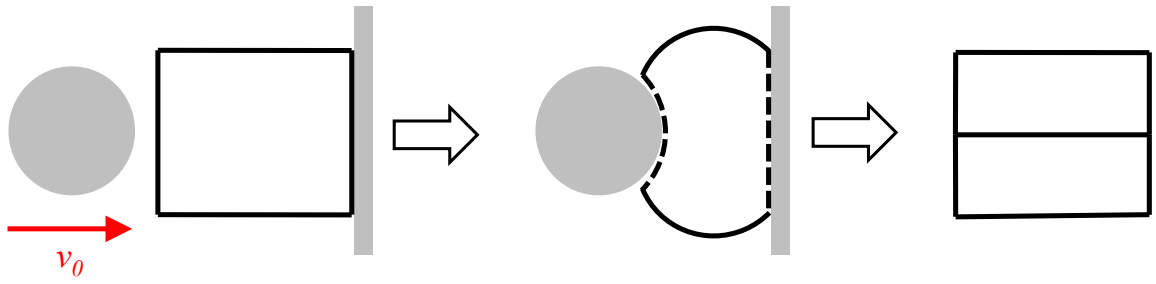


Abbildung 4-12: Ziel und Anwendungsbereich der Heuristik „Ausgleichen der Energiedichte“

Wie bei der Heuristik *Entfernen unbelasteter Wände* (siehe Abschnitt 4.1.1) werden auch für diese Heuristik nach Gleichung (4-1) die maximalen inneren Energiedichten der einzelnen Wände u_{max,n_w,n_l} und nach Gleichung (4-2) die Mittelwerte der maximalen inneren Energiedichten aller Wände für jeden Lastfall $\bar{u}_{max,n_l}$ berechnet.
Hiermit können die Beträge der Differenzen der maximalen inneren Energiedichten zwischen allen Wänden in den unterschiedlichen Lastfällen berechnet werden. Die Differenz $\Delta u_{max,n_w,m_w,n_l}$ zwischen den Wänden n_w und m_w ergibt sich als:

$$\Delta u_{max,n_w,m_w,n_l} = \left| u_{max,n_w,n_l} - u_{max,m_w,n_l} \right| . \tag{4-7}$$

Diese Differenzen werden normiert, um eine Vergleichbarkeit der Differenzen unabhängig vom Lastfall zu gewährleisten. Dafür sind zwei unterschiedliche Vorgehensweisen vorgesehen:

(1) Normierung mit dem Mittelwert der maximalen inneren Energiedichten aller Wände $\bar{u}_{max,n_l}$ in dem jeweiligen Lastfall n_l:

$$\widetilde{\Delta u}_{max,n_w,m_w,n_l} = \frac{\Delta u_{max,n_w,m_w,n_l}}{\bar{u}_{max,n_l}}. \tag{4-8}$$

(2) Normierung mit dem Mittelwert der maximalen inneren Energiedichten aller Wände des Lastfalls, welcher hier den höchsten Wert $\bar{u}_{max}$ aufweist:

$$\widetilde{\Delta u}_{max,n_w,m_w,n_l} = \frac{\Delta u_{max,n_w,m_w,n_l}}{\bar{u}_{max}}. \tag{4-9}$$

Die erste Vorgehensweise bewirkt, dass alle Lastfälle in dieser Heuristik gleich gewichtet werden, unabhängig davon, wie viel Energie von der Struktur in dem spezifischen Lastfall aufgenommen wird. Die zweite Variante bewirkt hingegen eine automatische Gewichtung der Lastfälle, da der Lastfall mit dem höchsten Wert $\bar{u}_{max}$ für die Normierung verwendet wird.
Vor allem, wenn die zu optimierende Struktur in stark unterschiedlichen Lastfällen wie linear statischen Lastfällen und Crashlastfällen belastet wird, ist die zweite Vorgehensweise sinnvoller und wird daher standardmäßig verwendet. Bei linear statischen Lastfällen würden sonst meist größere Differenzen $\widetilde{\Delta u}_{max,n_w,m_w,n_l}$ auftreten als bei Crashlastfällen, da die Belastung aufgrund der geringeren Deformationen i.d.R. auch weniger gleichmäßig ist. Dies kann mithilfe eines Biegebalkens veranschaulicht werden: Die Wand des Profilquerschnitts des Biegebalkens, welche am weitesten von der neutralen Faser entfernt liegt, nimmt ein Vielfaches der Energie auf, die eine Wand nah zu der neutralen Faser aufnimmt.

Die Heuristik versucht, die beiden Wände, welche die höchste Differenz $\widetilde{\Delta u}_{max,n_w,m_w,n_l}$ aufweisen, in ihren geometrischen Mittelpunkten mit einer neuen Wand zu verbinden. Dies wird umgesetzt, indem zunächst an den Mittelpunkten der beiden Wände im Graphen neue *LINK-Knoten* erzeugt werden. Anschließend werden die *Graphen-Balkenelemente* der beiden Wände durch jeweils zwei neue *Graphen-Balkenelemente* ersetzt, welche an einem der neuen *LINK-Knoten* miteinander verbunden sind und in Wanddicke, Orientierung und Krümmung den entfernten *Graphen-Balkenelementen* entsprechen. Danach wird ein neues *Graphen-Balkenelement* erzeugt, welches die beiden neuen *LINK-Knoten* verwendet und

dessen Wert für die Wanddicke dem Mittelwert der Wanddicken der zu Beginn entfernten *Graphen-Balkenelemente* entspricht.
Diese Prozedur verdeutlicht Abbildung 4-13. In dem dort dargestellten Graphen werden die eingerahmten *Graphen-Balkenelemente* durch die Heuristik miteinander verbunden.

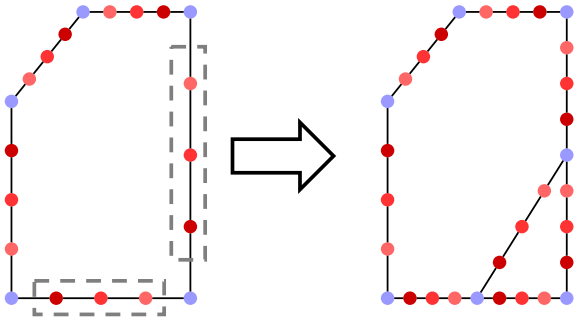


Abbildung 4-13: Verbinden von zwei Graphen-Balkenelementen

Die neue, verbindende Wand hat die Aufgabe, Kräfte zu übertragen, damit die Wand, welche bisher eine hohe innere Energiedichte aufwies, weniger und diejenige Wand, welche bisher eine geringe innere Energiedichte besaß, mehr Energie aufnimmt. Hierfür ist es notwendig, dass die beiden zu verbindenden Wände auch mechanisch sinnvoll miteinander verbunden werden können.
Die verbindende Wand darf in Relation zu den beiden zu verbindenden Wänden nicht zu lang sein, da sonst ihre Beulneigung zu groß wäre und eine Kraftübertragung damit erschwert werden würde. Die maximale Länge ergibt sich aus der Summe der Längen l_1 und l_2 der beiden zu verbindenden Wände multipliziert mit dem Faktor s_{vl}. Als Standardwert für s_{vl} wird 0,75 verwendet. Falls die beiden zu verbindenden Wände gleich lang sind, darf also die neue, verbindende Wand nicht länger sein als das 1,5-fache der Länge einer der zu verbindenden Wände. Außerdem darf der Verbindungswinkel zwischen der verbindenden Wand und den beiden zu verbindenden Wänden nicht zu spitz sein, da ansonsten die Kraftübertragung ungünstig beeinflusst wird. Als Grenzwert $\varphi_{vw,min}$ für diesen kleinsten auftretenden Verbindungswinkel wird standardmäßig 30° verwendet.
Ist ein Verbinden zweier Wände in der beschriebenen Vorgehensweise aufgrund der Fertigungsrestriktionen oder einer Verletzung der Bauraumgrenzen des Profilquerschnitts nicht möglich, macht die Heuristik so lange mit dem Wandpaar mit der nächstniedrigeren Differenz $\widetilde{\Delta u}_{max,n_w,m_w,n_l}$ weiter, bis entweder zwei Wände miteinander verbunden werden konnten oder aber alle Paare von Wänden durchlaufen wurden.
Der dieser Heuristik innewohnende Algorithmus ist in Abbildung 4-14 dargestellt. Der Index n_{wps} wird hierbei für nach dem Wert $\widetilde{\Delta u}_{max,n_w,m_w,n_l}$ sortierte Paare von Wänden verwendet.

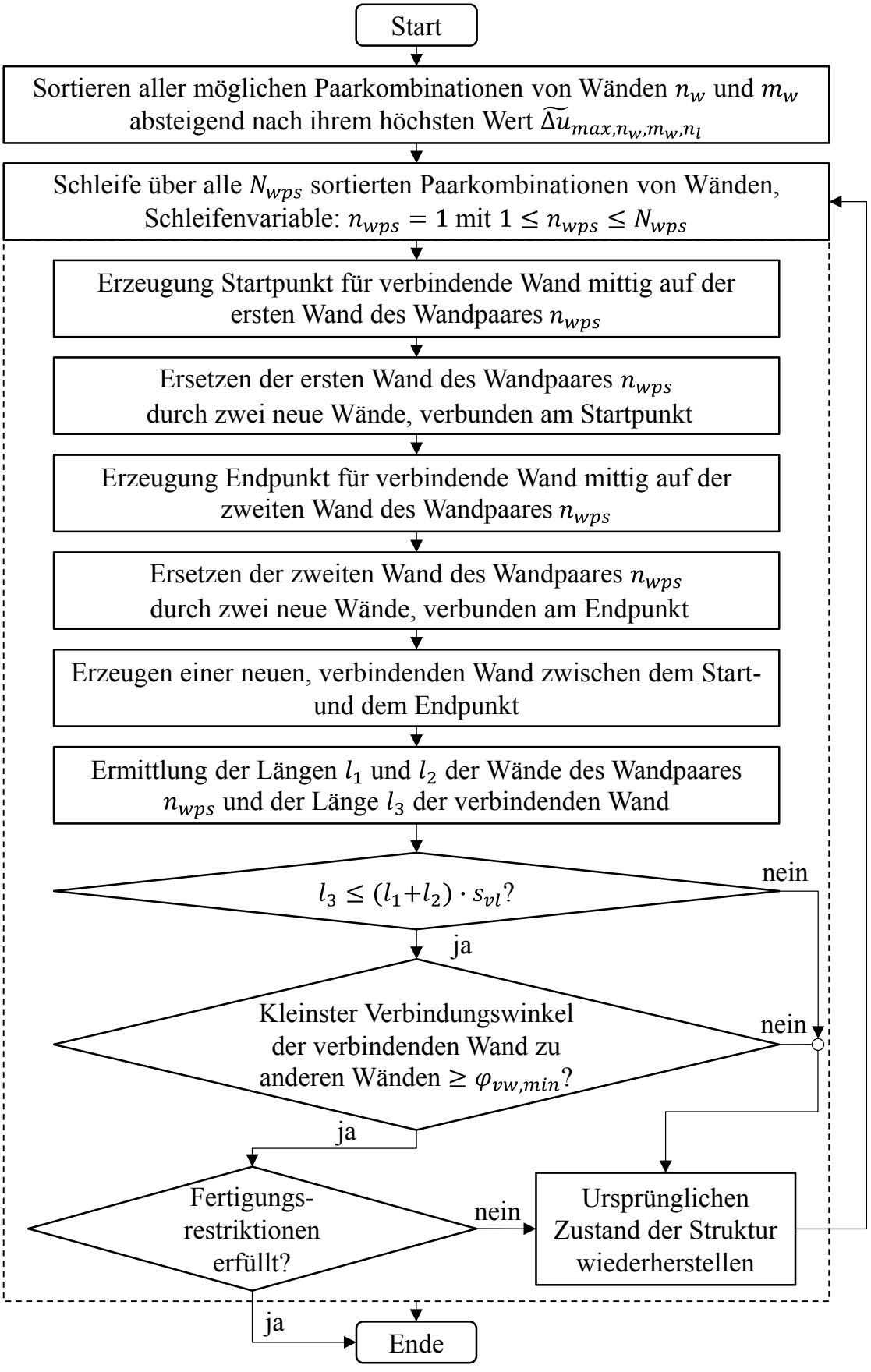


Abbildung 4-14: Algorithmus der Heuristik „Ausgleichen der Energiedichte“

4.1.4 Heuristiken „Ausnutzen des Deformationsraums Zug / Druck“

Aus strukturmechanischer Sicht sinnvolle Crashstrukturen sind häufig dadurch gekennzeichnet, dass der zur Verfügung stehende Deformationsraum möglichst effektiv für eine Energieabsorption durch gezielte Deformation ausgenutzt wird. Wenn eine Struktur deformiert wird und sich einzelne Bereiche dieser Struktur aufeinander zu oder voneinander weg bewegen, kann ein zwischen diesen Bereichen positioniertes Deformationselement (z.B. eine Wand in einer Profilstruktur) der Relativbewegung der beiden Bereiche einen Widerstand entgegen setzen und durch Verformung Energie absorbieren.
Die beiden Heuristiken *Ausnutzen des Deformationsraums Zug* und *Ausnutzen des Deformationsraums Druck* verbinden Stellen des Profilquerschnitts, die eine hohe relative Verschiebung zueinander aufweisen, miteinander durch eine neue Wand. Im Fokus der erstgenannten Heuristik stehen dabei Bereiche, die sich voneinander entfernen, während für die letztgenannte Heuristik Bereiche, die sich aufeinander zubewegen, von Relevanz sind. Die relativen Verschiebungen werden in einer vorgegebenen Analyseebene als Schnitt durch die deformierte Struktur bestimmt und in Relation zu dem Anfangsabstand der betrachteten Bereiche bewertet.
Eine dünnwandige metallische Struktur kann einer Zugbelastung in Relation zu anderen Belastungsarten wie z.B. Biegung einen deutlich größeren Widerstand entgegen setzen. Gelingt es, eine Wand in einer Profilstruktur so zu positionieren, dass sie vorwiegend auf Zug belastet ist, wird die Steifigkeit der Struktur signifikant erhöht.
Unter einer Druckbelastung können Instabilitäten wie Knicken und Beulen auftreten. Daher kann eine auf Druck belastete Wand die Steifigkeit der Struktur unter hohen mechanischen Lasten nicht so stark erhöhen wie eine auf Zug belastete Wand. Allerdings besteht die Möglichkeit, durch kontrollierte Deformation wie z.B. Faltenbeulen, große Mengen an Energie zu absorbieren.
Aufgrund dieser unterschiedlichen mechanischen Wirkprinzipien ist eine Unterscheidung zwischen Zug- und Druckbelastung durch die beiden ansonsten identischen Heuristiken wichtig.

Abbildung 4-15 verdeutlicht das Prinzip dieser beiden Heuristiken. In der Abbildung wird eine Profilstruktur gezeigt, die auf einer Seite durch eine starre Wand gestützt wird und auf der anderen Seite durch einen Zylinder intrudiert wird. Im oberen Teil der Abbildung verbindet die Heuristik *Ausnutzen des Deformationsraums Zug* diejenigen Stellen des Profilquerschnitts miteinander, die sich durch Deformation am weitesten voneinander entfernen. Im unteren Teil gilt dies analog für die Stellen des Profilquerschnitts, welche sich am stärksten aufeinander zubewegen und für die Heuristik *Ausnutzen des Deformationsraums Druck.*

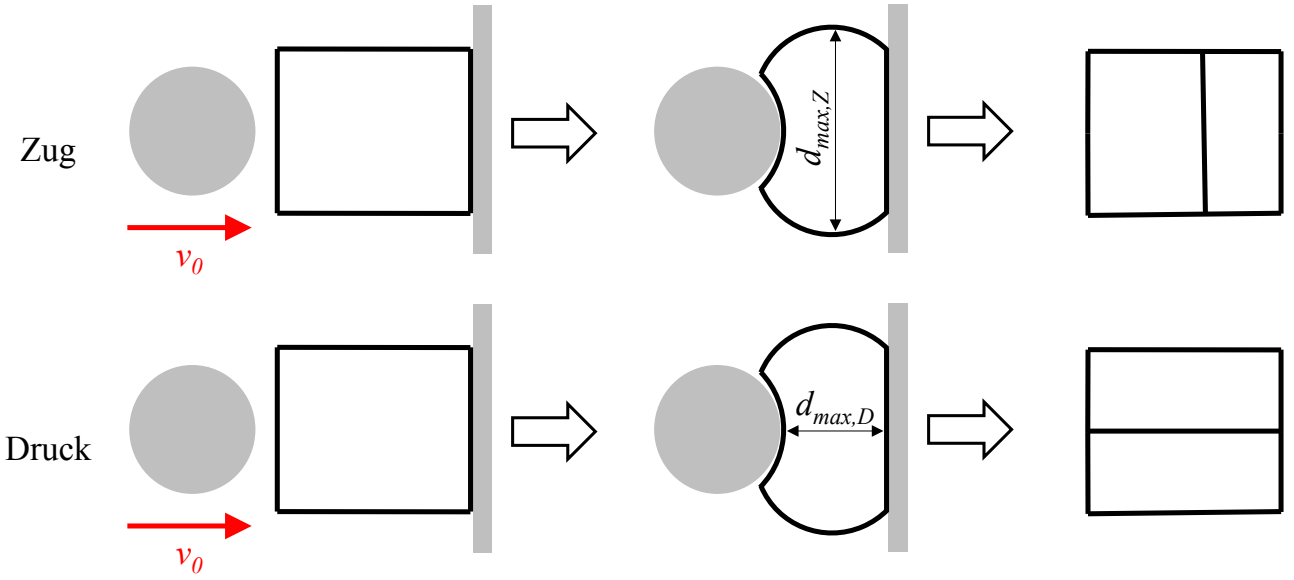


Abbildung 4-15: Ziel und Anwendungsbereich der Heuristiken „Ausnutzen des Deformationsraums Zug / Druck“

Für die Bestimmung der relativen Verschiebungen einzelner Bereiche des Profilquerschnitts zueinander wird eine Analyseebene als Schnitt durch die Struktur gelegt und die Verschiebungen aller *FE-Knoten* auf dieser Schnittebene werden untersucht. Um sicherzustellen, dass die *FE-Knoten* auch direkt auf der Analyseebene liegen, wird die Analyseebene als Option in *GRAMB* (siehe Abschnitt 3.5) definiert und somit direkt bei der Erzeugung von *FE-Modellen* der Struktur berücksichtigt. Die Analyseebene sollte in strukturmechanisch relevanten Bereichen positioniert werden, z.B. am Einschlagspunkt des Pfahls in einem Pfahlaufprall-Lastfall.

Für die Analyse der relativen Verschiebungen zueinander müssen die *FE-Knoten* nicht nur eindeutig einer Wand des Profilquerschnitts und damit auch dem entsprechenden *Graphen-Balkenelement* zugeordnet werden können, sondern auch die exakte Position des *FE-Knotens* auf der Wand muss bestimmt werden. Letztgenannte Information ist nicht automatisch vorhanden, da der Profilquerschnitt der Struktur beliebig im Raum entlang einer Kurve extrudiert sein kann und sogar in seiner Größe skaliert werden kann. Daher ist aus dem Graphen nicht ableitbar, an welcher Stelle im Raum sich die zu einem bestimmten *Graphen-Balkenelement* gehörenden *FE-Knoten* befinden. Diesen Umstand verdeutlicht Abbildung 4-16. Im linken Teil der Abbildung ist ein mathematischer Graph dargestellt und im rechten Teil das daraus abgeleitete *FE-Modell*. In der Mitte der entlang einer Kurve extrudierten Struktur befindet sich hier die Analyseebene. Die darauf liegenden *FE-Knoten* sind durch Kreise hervorgehoben.

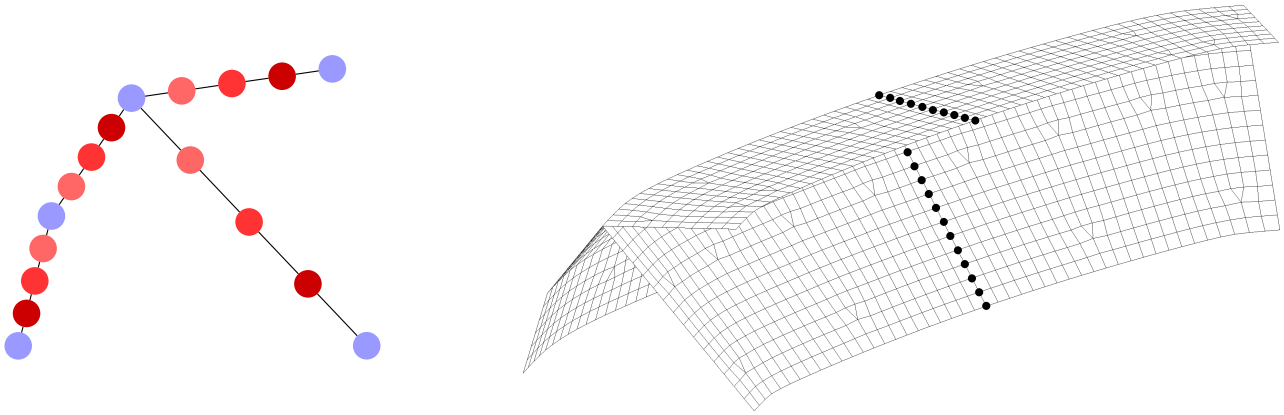


Abbildung 4-16: Graph und daraus abgeleitetes FE-Modell mit FE-Knoten auf einer Analyseebene

Die Zuordnung der *FE-Knoten* zu Positionen auf einer Wand des Profilquerschnitts kann über die Abstände der *FE-Knoten* zueinander im undeformierten Zustand der Struktur erfolgen. Die beiden *FE-Knoten* mit der größten Entfernung zueinander sind dem Start- und Endpunkt der jeweiligen Wand im Profilquerschnitt zuzuordnen. Die Unterscheidung zwischen Start- und Endpunkt kann über Nachbarschaftsbeziehungen zu anderen Wänden erfolgen, da die *FE-Knoten* am Start- und Endpunkt einer Wand u.U. auch noch anderen Wänden zuzuordnen sind. Alle weiteren *FE-Knoten* können über ihre relative Position zwischen den *FE-Knoten* des Start- und des Endpunkts der Wand eindeutig einer Position auf der Wand zugeordnet werden.

Die Entfernung $d_{n_f,m_f,n_w,m_w,n_l,n_t}$ zwischen dem *FE-Knoten* n_f von Wand n_w und dem *FE-Knoten* m_f von Wand m_w in Lastfall n_l zum Zeitpunkt n_t kann in Abhängigkeit der Positionsvektoren $\vec{p}_{n_f,n_w,n_l,n_t}$ und $\vec{p}_{m_f,m_w,n_l,n_t}$ der beiden *FE-Knoten* berechnet werden als:

$$d_{n_f,m_f,n_w,m_w,n_l,n_t} = \left|\vec{p}_{n_f,n_w,n_l,n_t} - \vec{p}_{m_f,m_w,n_l,n_t}\right| . \tag{4-10}$$

Basierend auf diesen Werten, werden für die beiden Heuristiken auf unterschiedliche Weise die Relativverschiebungen der *FE-Knotenpaare* berechnet. Diese ergeben sich als Differenz zwischen der Entfernung zum Zeitpunkt n_t und der initialen Entfernung der jeweiligen *FE-Knoten*. Die initiale Entfernung ist der Betrag der Differenz der Positionsvektoren $\vec{p}_{n_f,n_w,n_l}$ und $\vec{p}_{m_f,m_w,n_l}$ der beiden betrachteten *FE-Knoten* im undeformierten Zustand der Struktur.

Für die Heuristik *Ausnutzen des Deformationsraums Zug* wird die initiale Entfernung von der Entfernung zum Zeitpunkt n_t subtrahiert (Gleichung (4-11)). Dadurch führt eine Vergrößerung des Abstands der *FE-Knoten* zu einer positiven Relativverschiebung. Bei der Heuristik *Ausnutzen des Deformationsraums Druck* ist die Reihenfolge umgekehrt (Gleichung (4-12)). Daher führt hier eine Verringerung des Abstands der *FE-Knoten* zu einer positiven Relativverschiebung.

$$\Delta d_{n_f,m_f,n_w,m_w,n_l,n_t} = d_{n_f,m_f,n_w,m_w,n_l,n_t} - \left|\vec{p}_{n_f,n_w,n_l} - \vec{p}_{m_f,m_w,n_l}\right|, \tag{4-11}$$

$$\Delta d_{n_f,m_f,n_w,m_w,n_l,n_t} = \left|\vec{p}_{n_f,n_w,n_l} - \vec{p}_{m_f,m_w,n_l}\right| - d_{n_f,m_f,n_w,m_w,n_l,n_t}. \tag{4-12}$$

Um Relativverschiebungen zwischen *FE-Knoten*, die im undeformierten Zustand der Struktur nah beisammen liegen, höher zu gewichten, als die von *FE-Knoten*, welche weiter voneinander entfernt sind, werden die Relativverschiebungen durch diese initialen Entfernungen dividiert. Hierbei wird für die initialen Entfernungen der Exponent s_e verwendet, was eine flexible Steuerung des Einflusses dieser Entfernungen ermöglicht. Als Standardwert wird $s_e = 0{,}5$ verwendet, da ein linearer Einfluss der initialen Entfernungen die Relevanz von nah beisammen liegenden *FE-Knoten* zu hoch gewichten würde. Die normierten Relativverschiebungen $\widetilde{\Delta d}_{n_f,m_f,n_w,m_w,n_l,n_t}$ ergeben sich damit als:

$$\widetilde{\Delta d}_{n_f,m_f,n_w,m_w,n_l,n_t} = \frac{\Delta d_{n_f,m_f,n_w,m_w,n_l,n_t}}{\left(|\vec{p}_{n_f,n_w,n_l} - \vec{p}_{m_f,m_w,n_l}|\right)^{s_e}}. \tag{4-13}$$

Für alle möglichen Knotenpaare wird nun die maximale normierte Relativverschiebung $\widetilde{\Delta d}_{max,n_f,m_f,n_w,m_w}$ aller Lastfälle und Zeitschritte bestimmt und die *FE-Knotenpaare* werden absteigend nach diesem Wert sortiert. Beide Heuristiken versuchen das erste der sortierten *FE-Knotenpaare* mit einer neuen Wand zu verbinden. Ist dies aufgrund der Fertigungsrestriktionen oder einer Verletzung der Bauraumgrenzen nicht möglich, wird so lange mit dem nächsten *FE-Knotenpaar* weitergemacht, bis entweder das Verbinden mit einer neuen Wand erfolgreich war oder aber alle sortierten *FE-Knotenpaare* durchlaufen wurden.
Für das Verbinden mit einer neuen Wand werden zunächst die beiden Wände ermittelt, auf welchen die *FE-Knoten* des Knotenpaares liegen. Anschließend werden die Positionen der *FE-Knoten* auf den Wänden in der beschriebenen Vorgehensweise bestimmt. An diesen Positionen werden dann neue *LINK-Knoten* im Graphen erzeugt. Der weitere Ablauf entspricht der Prozedur des Verbindens von Wänden der Heuristik *Ausgleichen der Energiedichte* (siehe Abbildung 4-13). Die beiden *Graphen-Balkenelemente* der zu verbindenden Wände werden durch jeweils zwei neue *Graphen-Balkenelemente* ersetzt, die in Orientierung, Wanddicke und Krümmung den beiden entfernten *Graphen-Balkenelementen* entsprechen. Das *Graphen-Balkenelement* der verbindenden Wand verwendet die beiden neuen *LINK-Knoten* und weist einen Wanddickenwert auf, der dem Mittelwert der Wanddicken der beiden ersetzten *Graphen-Balkenelemente* entspricht.
Den Algorithmus der beiden in diesem Abschnitt vorgestellten Heuristiken zeigt Abbildung 4-17. Der Ablauf der Heuristiken nach der Bestimmung der Werte $\widetilde{\Delta d}_{max,n_f,m_f,n_w,m_w}$ nach Gleichung (4-13) unterscheidet sich nicht mehr voneinander. Der Index n_{fps} wird dabei für die Nummerierung der nach diesem Wert sortierten Paare von *FE-Knoten* verwendet.

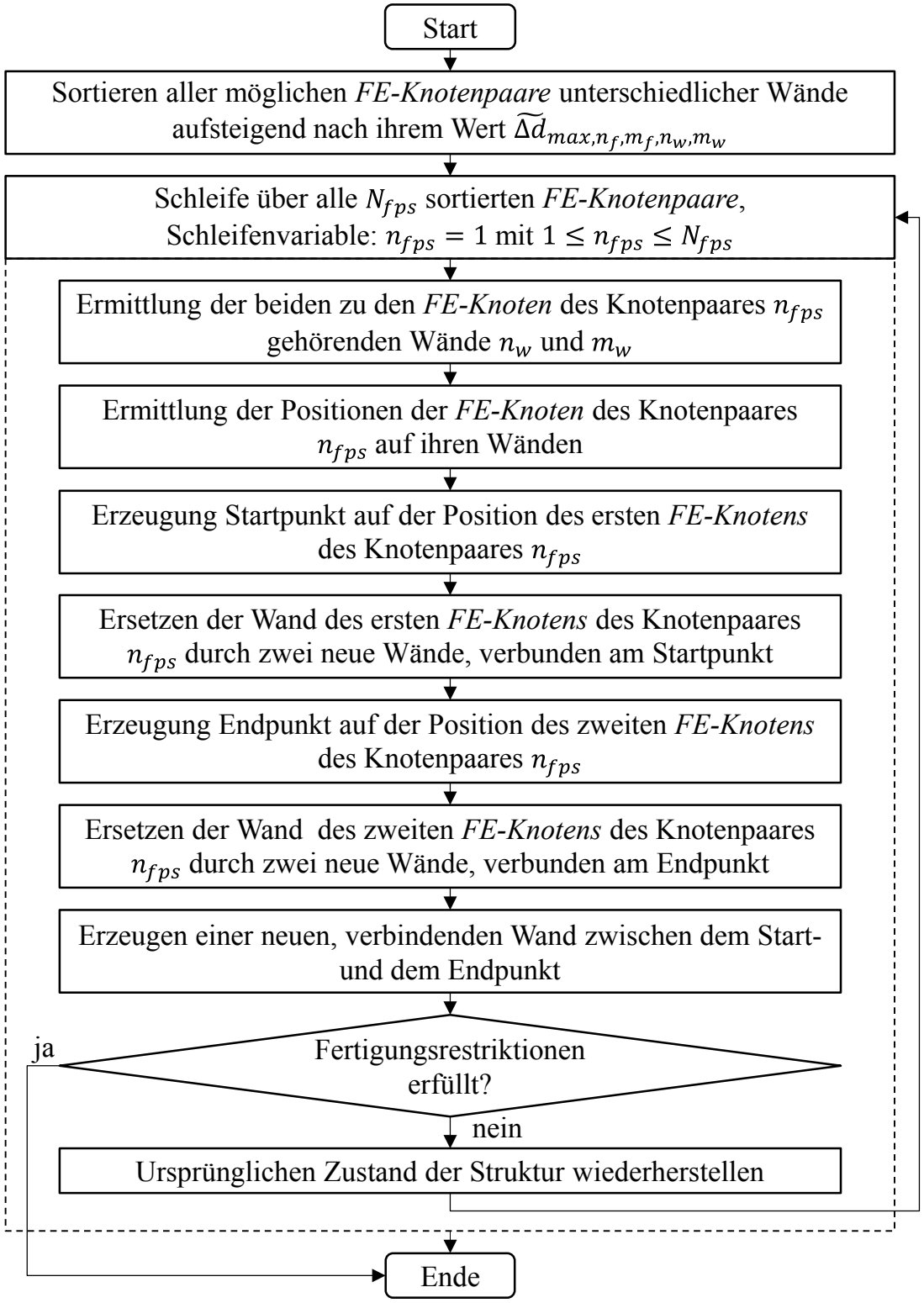


Abbildung 4-17: Algorithmus der Heuristiken „Ausnutzen des Deformationsraums Zug“ und „Ausnutzen des Deformationsraums Druck“

4.1.5 Heuristik „Entfernen kleiner Kammern“

Diese Heuristik hat das Ziel, die zu optimierende Struktur zu vereinfachen, indem sie kleine Kammern aus dem Profilquerschnitt der Struktur entfernt und durch einzelne Wände ersetzt. Dies geschieht unter der Annahme, dass durch das Entfernen einer solchen Substruktur die mechanischen Eigenschaften der Gesamtstruktur aufgrund der geringen Größe der Kammer nicht signifikant beeinflusst werden. Die Heuristik behandelt nur Kammern, die aus drei Wänden bestehen, weil die Reduktion von einer n-seitigen zu einer dreiseitigen Kammer während der Formoptimierung erfolgen kann, eine weitere Reduktion jedoch im Rahmen einer Formoptimierung nicht möglich ist, da hierdurch die Topologie der Struktur modifiziert werden würde. Eine solche dreiseitige Kammer ist in der Profilstruktur in Abbildung 4-18 gestrichelt dargestellt. Die Heuristik würde diese Kammer durch eine einzelne Wand ersetzen.

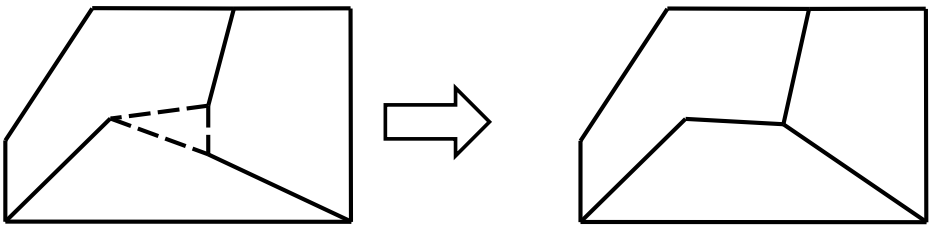


Abbildung 4-18: Ziel und Anwendungsbereich der Heuristik „Entfernen kleiner Kammern“

Innerhalb des Profilquerschnitts der Struktur kann eine dreiseitige Kammer als ein aus drei Wänden bestehendes Dreieck betrachtet werden, dessen Seiten auch gekrümmt sein können. Als Maß für die Größe einer Kammer wird nicht der Flächeninhalt, sondern die Länge der kürzesten Seite der Kammer herangezogen. Hierdurch fallen auch großflächige Kammern, deren Seiten ein spitzwinkliges Dreieck bilden, in den Anwendungsbereich dieser Heuristik. Das Löschkriterium für das Entfernen einer Kammer ist erfüllt, wenn die Länge der kürzesten Wand der Kammer die kritische Länge l_{krit} unterschreitet. Als Standardwert hierfür wird der dreifache Wert der Fertigungsrestriktion *Mindestabstand von Wänden* (siehe Abschnitt 3.3) verwendet. Alle Wände, die Teil einer dreiseitigen Kammer sind und das Löschkriterium erfüllen, werden aufsteigend nach ihrer Länge sortiert.

Die Heuristik versucht, die Kammer mit der kürzesten Wand durch eine einzelne Wand zu ersetzen. Ist dies aufgrund der Fertigungsrestriktionen oder einer Verletzung der Bauraumgrenzen des Profilquerschnitts nicht möglich, macht die Heuristik mit der Kammer mit der nächstlängeren Wand weiter. Dies wird so lange fortgeführt, bis entweder eine dreiseitige Kammer erfolgreich entfernt wurde oder aber alle Wände, die das Löschkriterium erfüllen, durchlaufen wurden.

In den folgenden Ausführungen wird die aktuell betrachtete Wand einer dreiseitigen Kammer, welche das Löschkriterium erfüllt, als primäre Wand bezeichnet, während die anderen beiden Wände als sekundäre Wände betitelt werden. Die primäre Wand wird aus der Struktur entfernt und die beiden sekundären Wände werden durch eine einzelne Wand ersetzt. Die exakte Vorgehensweise hängt jedoch davon ab, ob und falls ja, welche Wände der Kammer zu den Bauraumgrenzen des Profilquerschnitts der Struktur gehören.

Die primäre Wand wird aus der Struktur entfernt und die Enden dieser Wand werden zusammengeführt. Dadurch bleiben die Verbindungen zu anderen Wänden bestehen. Der neue Verbindungspunkt zu diesen anderen Wänden liegt in der Mitte der beiden ehemaligen Enden der primären Wand, wenn sich hierdurch keine Veränderung der Bauraumgrenzen des Profilquerschnitts der Struktur ergibt. Ergäbe sich eine Veränderung, versucht die Heuristik den neuen Verbindungspunkt auf einem Ende der entfernten primären Wand zu positionieren. Führt dies auch zu einer Veränderung der Bauraumgrenzen, kann die aktuell betrachtete primäre Wand nicht aus dem Profilquerschnitt der Struktur entfernt werden und die Heuristik geht zu der Kammer mit der nächstlängeren Wand über.
Das Entfernen der primären Wand geschieht, indem das *Graphen-Balkenelement* der primären Wand aus dem Graphen entfernt und die beiden dazugehörigen *LINK-Knoten* zu einem einzelnen *LINK-Knoten* umgewandelt werden. Dieser ist mit den gleichen Knoten benachbart, wie die beiden entfernten *LINK-Knoten* mit Ausnahme der Verbindung zueinander. Den beiden o.g. Möglichkeiten folgend, entsprechen die Koordinaten des neuen *LINK-Knotens* entweder dem Mittelwert der Koordinaten der beiden entfernten *LINK-Knoten* oder aber den Koordinaten des *LINK-Knotens*, welcher nicht entfernt oder verschoben werden kann, ohne die Bauraumgrenzen des Profilquerschnitts der Struktur zu modifizieren.
Die *Graphen-Balkenelemente* der sekundären Wände teilen sich nun die identischen *LINK-Knoten*. Falls eine der beiden sekundären Wände zu den Bauraumgrenzen des Profilquerschnitts zählt, wird die andere sekundäre Wand durch das Löschen ihres *Graphen-Balkenelements* aus der Struktur entfernt. Gehört keine der sekundären Wände zu den Bauraumgrenzen, werden beide Wände entfernt und durch eine neue Wand ersetzt. Hierfür wird ein neues *Graphen-Balkenelement* erzeugt, dessen Werte für Wanddicke und Krümmung unter Berücksichtigung der Orientierung den Mittelwerten der beiden entfernten *Graphen-Balkenelemente* entsprechen. Falls beide sekundären Wände zu den Bauraumgrenzen gehören, kann die aktuell betrachtete Kammer nicht aus dem Profilquerschnitt entfernt werden.

Abbildung 4-19 zeigt die Entfernung einer Kammer, bei welcher keine der sekundären Wände Teil der Bauraumgrenzen des Profilquerschnitts der Struktur ist und bei welcher der neue Verbindungspunkt daher zwischen den Enden der entfernten primären Wand liegt. In Abbildung 4-20 ist die Entfernung einer Kammer dargestellt, bei welcher eine der sekundären Wände zu den Bauraumgrenzen gehört und daher nicht entfernt werden kann. Außerdem

kann der neue Verbindungspunkt nicht zwischen den Enden der entfernten primären Wand liegen, da dies die Bauraumgrenzen modifizieren würde. Stattdessen wird das Ende, welches nicht verschoben werden kann, ohne die Bauraumgrenzen zu verändern, als neuer Verbindungspunkt verwendet.
Die Entfernung einer Kammer ist nicht möglich, wenn entweder beide sekundären Wände zu den Bauraumgrenzen des Profilquerschnitts der Struktur gehören oder aber keine der Enden der primären Wand verschoben werden können, ohne dass sich die Bauraumgrenzen verändern.

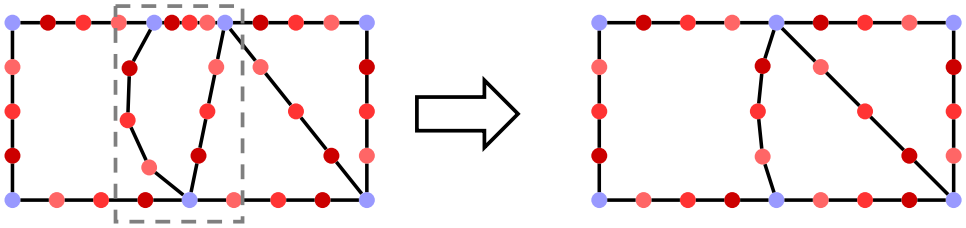


Abbildung 4-19: Entfernen einer kleinen Kammer (1)

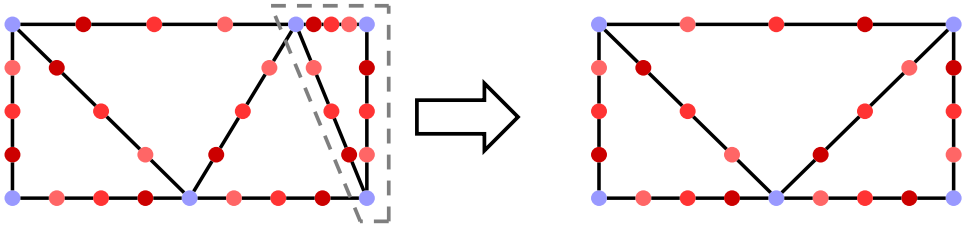


Abbildung 4-20: Entfernen einer kleinen Kammer (2)

Der Algorithmus dieser Heuristik ist in Abbildung 4-21 zusammengefasst.

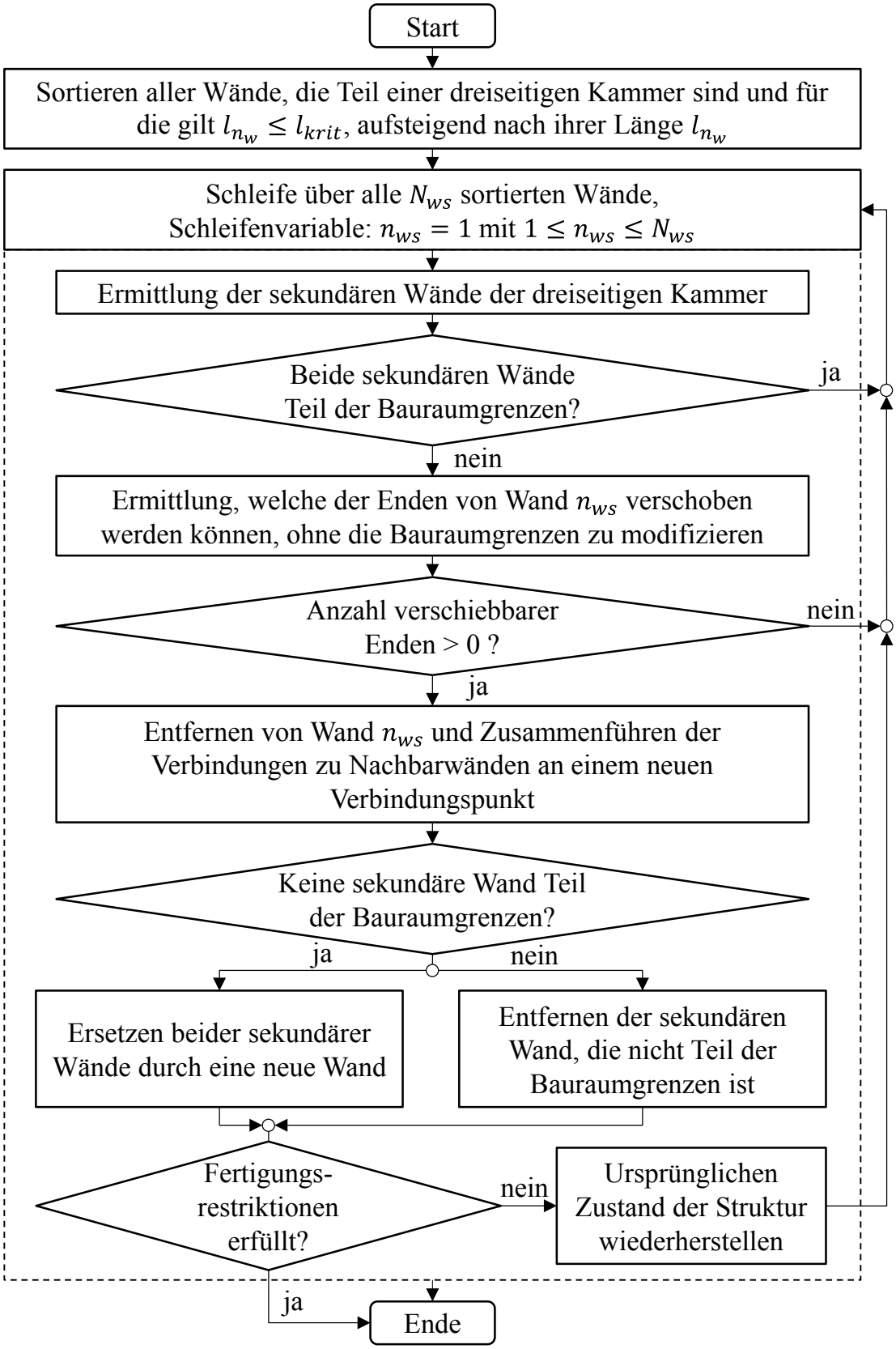


Abbildung 4-21: Algorithmus der Heuristik „Entfernen kleiner Kammern“

4.2 Heuristiken zur Form- und Wanddickenänderung

Heuristiken dieser Gruppe führen keine Topologieänderungen an der Struktur durch, sondern verändern nur die Form und Wanddicken der Struktur.

4.2.1 Heuristik „Glätten der Struktur“

Diese Heuristik verfolgt das Ziel, den Profilquerschnitt der Struktur zu glätten und zu vereinfachen. Hierfür werden miteinander verbundene Wände zu einer Wand zusammengefasst, wenn diese beiden Wände an ihrer Verbindungsstelle in einem stumpfen Winkel ausschließlich miteinander und nicht noch mit anderen Wänden verbunden sind. Hierdurch wird die Struktur vereinfacht und die Anzahl der Entwurfsvariablen einer eventuell später folgenden Formoptimierung reduziert. In Abbildung 4-22 ist eine Profilstruktur dargestellt, bei welcher die Heuristik die gestrichelt eingezeichneten Wände durch eine einzelne Wand ersetzen würde.

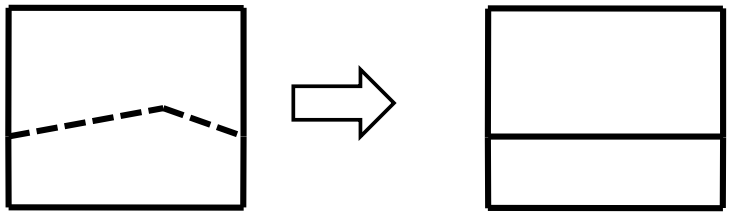


Abbildung 4-22: Ziel und Anwendungsbereich der Heuristik „Glätten der Struktur“

Die Heuristik ermittelt zunächst alle *LINK-Knoten*, welche einen Grad von 2 haben und keine direkt benachbarten anderen *LINK-Knoten* besitzen. Durch letztere Anforderung wird sichergestellt, dass diese *LINK-Knoten* nicht mit *Grenzlinien* verbunden sind, welche die Bauraumgrenzen des Profilquerschnitts der Struktur definieren. Stattdessen ist jeder dieser *LINK-Knoten* mit exakt zwei *Graphen-Balkenelementen* verbunden.
Die Verbindungswinkel zwischen den zu diesen *Graphen-Balkenelementen* gehörenden Wänden werden für jeden der *LINK-Knoten* ermittelt. Alle Wandpaare, bei denen dieser Verbindungswinkel kleiner oder gleich dem kritischen Verbindungswinkel $\varphi_{g,krit}$ ist, werden absteigend nach dem Wert des Verbindungswinkels sortiert. Als Standardwert wird $\varphi_{g,krit} = 150°$ verwendet. Also beträgt die maximale Abweichung von einer geraden 180°-Verbindung zweier Wände für das Erfüllen dieses Kriteriums 30°.

Die Heuristik versucht, das Paar von Wänden mit dem größten Verbindungswinkel durch eine einzelne Wand zu ersetzen. Hierfür wird der *LINK-Knoten* zwischen den *Graphen-Balkenelementen* der beiden Wände entfernt und die beiden *Graphen-Balkenelemente* wer-

den durch ein einzelnes *Graphen-Balkenelement* ersetzt, welches in seinen Werten für Krümmung und Wanddicke den Mittelwerten der beiden entfernten *Graphen-Balkenelemente* entspricht.
Ist diese Vorgehensweise aufgrund der Fertigungsrestriktionen oder einer Verletzung der Bauraumgrenzen des Profilquerschnitts nicht möglich, versucht die Heuristik diese Prozedur auf das Wandpaar mit dem nächstkleineren Verbindungswinkel anzuwenden. Dies wird so lange fortgesetzt, bis alle sortierten Wandpaare durchlaufen wurden.
Nach dem erfolgreichen Ersetzen zweier Wände startet die Prozedur von Beginn an neu, um alle Wandpaare, welche das Kriterium erfüllen, zu ersetzen. Hierdurch wird auch berücksichtigt, dass sich durch das Ersetzen zweier Wände die Verbindungswinkel zu anderen Wänden verändern können.

4.2.2 Heuristik „Skalieren der Wanddicken“

Topologische Änderungen können das mechanische Verhalten einer Struktur gravierend beeinflussen. Durch das Einbringen von neuen Wänden oder das Entfernen von bereits bestehenden Wänden verändern sich u.a. die Masse und die Steifigkeit der Struktur. Sprunghafte Änderungen des mechanischen Verhaltens können jedoch negative Auswirkungen auf den Ablauf einer Optimierung haben, da die Zielfunktion und die Funktionen der Restriktionen sich ebenfalls sprungartig ändern.
Die Aufgabe dieser Heuristik ist das Skalieren der Wanddicken der Struktur derart, dass die Masse der Struktur nach einer topologischen Änderung durch eine der Heuristiken zur Topologieänderung (siehe Abschnitt 4.1) identisch ist mit der Masse der Struktur vor dieser Modifikation. Zwar können Sprünge im mechanischen Verhalten dadurch nicht verhindert, aber abgemildert werden. Die Skalierung der Wanddicken ist schematisch in Abbildung 4-23 dargestellt. Durch die Integration der neuen Wand in die Mitte der in der Abbildung dargestellten Profilstruktur erhöht sich die Masse der Struktur. Die Heuristik würde die Wanddicken der Wände der Struktur derart skalieren, dass die Masse der topologisch modifizierten Struktur identisch ist mit der Masse der Struktur vor der Topologieänderung.

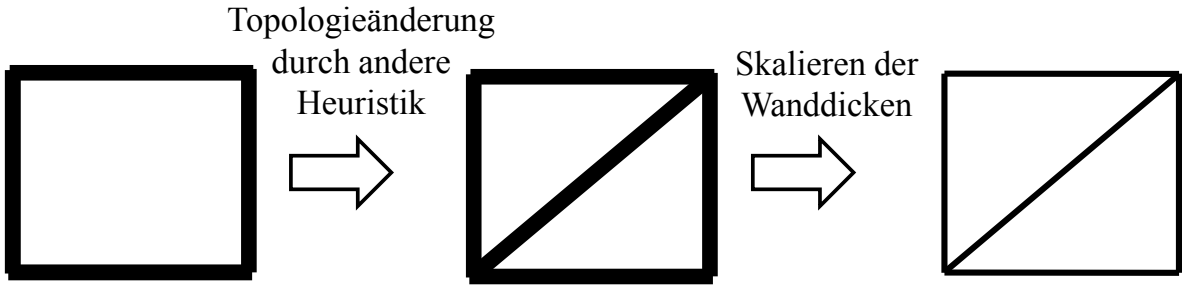


Abbildung 4-23: Ziel und Anwendungsbereich der Heuristik „Skalieren der Wanddicken“

Der notwendige Skalierungsfaktor für die Wanddicken ergibt sich aus dem Quotienten der Zielmasse der Struktur m_{soll} und der aktuellen Masse der Struktur m_{ist}. Wenn möglich, soll bei der Skalierung das Verhältnis der einzelnen Wanddicken der Wände zueinander erhalten bleiben. Dies könnte allerdings aufgrund der Festlegung einer minimalen und maximalen Wanddicke als Fertigungsrestriktion nicht möglich sein. Soll beispielsweise die Masse einer Struktur durch das Skalieren der Wanddicken reduziert werden und die Wanddicke einer Wand entspricht bereits der minimalen Wanddicke, so sollen die Wanddicken der anderen Wände dennoch skaliert werden, um die Zielmasse zu erreichen.
Aus diesem Grund wird die Skalierung in einem iterativen Schema durchgeführt und alle Wände, deren Wanddicke durch die Skalierung an die minimale oder maximale Wanddicke stoßen, werden in einem Set als fixe Wände gespeichert. Die Masse aller fixen Wände m_{fix} wird bei der Bestimmung des Skalierungsfaktors s_m ignoriert, da die Wanddicken dieser Wände nicht weiter modifiziert werden können:

$$s_m = \frac{m_{soll} - m_{fix}}{m_{ist} - m_{fix}}. \tag{4-14}$$

In jeder Iteration der Skalierungsprozedur wird zunächst nach Gleichung (4-14) der Skalierungsfaktor berechnet. Anschließend werden alle Wände durchlaufen, welche nicht zu der Gruppe der fixen Wände gehören. Die Wanddicke der aktuell betrachteten Wand wird mit s_m multipliziert. Wird dabei die minimale Wanddicke unter- oder die maximale Wanddicke überschritten, wird die Wanddicke auf den entsprechenden Grenzwert gesetzt. Zusätzlich dazu wird die aktuell betrachtete Wand zu der Gruppe der fixen Wände hinzugefügt und ihre Masse wird zu der Masse aller fixen Wände m_{fix} addiert.
Die Prozedur endet, wenn die Zielmasse der Struktur erreicht wird, die Fertigungsrestriktionen in einer Iteration verletzt werden oder alle Wände der Struktur zu der Gruppe der fixen Wände gehören. In letzterem Fall kann die Zielmasse nicht exakt erreicht werden, aber die Wanddicken wurden derart skaliert, dass die aktuelle Masse der Struktur unter Berücksichtigung der Topologie und Form der Struktur sowie der minimalen und maximalen Wanddicke der Zielmasse möglichst nahe kommt. Sollten hingegen die Fertigungsrestriktionen verletzt werden, wird keine Modifikation der Wanddicken durch die Heuristik vorgenommen.

Abbildung 4-24 veranschaulicht den Algorithmus dieser Heuristik. Die Wanddicke einer Wand n_w wird dabei durch t_{n_w} gekennzeichnet und die minimale bzw. maximale Wanddicke der Struktur hinsichtlich der Fertigungsrestriktionen mit t_{min} bzw. t_{max}.

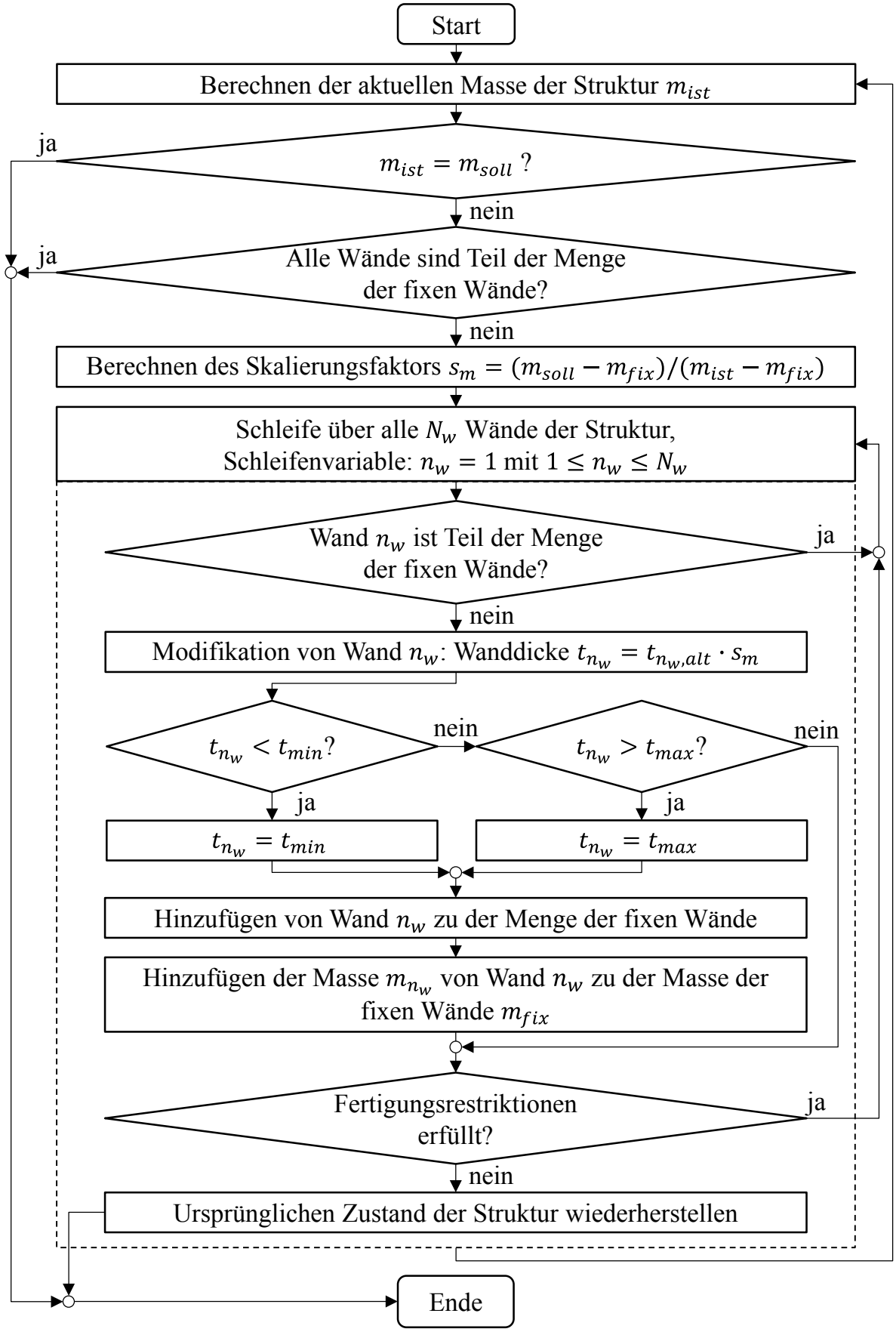


Abbildung 4-24: Algorithmus der Heuristik „Skalieren der Wanddicken“

5 Methode der Graphen- und Heuristikbasierten Topologieoptimierung

In diesem Kapitel wird die Methode der *Graphen- und Heuristikbasierten Topologieoptimierung (GHT)* vorgestellt, welche für die Topologieoptimierung des Profilquerschnitts einer crashbelasteten Struktur eingesetzt werden kann [Ortmann und Schumacher 2012, 2013a, 2013b, 2014a], [Schumacher und Ortmann 2012a, 2012b, 2012c, 2013b].

Der erste Abschnitt dieses Kapitels beschreibt die Funktionsweise und allgemeine Prinzipien der *GHT* wie z.B. die Trennung des Optimierungsproblems in zwei ineinander geschachtelte Optimierungsschleifen. Abschnitt 5.2 und 5.3 behandeln den Ablauf dieser beiden Optimierungsschleifen. Die Möglichkeiten und Grenzen der *GHT* werden in Abschnitt 5.4 diskutiert. In Abschnitt 5.5 wird die Softwareumsetzung dieser Optimierungsmethode vorgestellt.

5.1 Funktionsweise der Optimierungsmethode

Die Methode der *Graphen- und Heuristikbasierten Topologieoptimierung* weist vier grundlegende Prinzipien auf:

1. Die Verwendung von mathematischen Graphen zur Beschreibung der Geometrie der zu optimierenden Struktur
Die Geometrie der zu optimierenden Struktur wird durch die in Abschnitt 3.2 behandelte Graphensyntax beschrieben. Alle Modifikationen der Struktur werden nicht an der Struktur selbst, sondern an dem mathematischen Graphen durchgeführt, welcher die Struktur beschreibt. Graphenbasierte Algorithmen werden zur Überprüfung von Fertigungsrestriktionen und zur geometrischen Modifikation der Struktur verwendet. Auch komplexe geometrische Modifikationen wie eine Topologieänderung können so durchgeführt werden. Zu jedem Zeitpunkt kann aus dem Graphen ein *FE-Modell* der Struktur zur Durchführung von Funktionsaufrufen generiert werden.

2. Die Verwendung von Heuristiken zur Modifikation der zu optimierenden Struktur
Aus Expertenwissen abgeleitete Heuristiken werden für die geometrische Modifikation der Struktur eingesetzt (siehe Kapitel 4). Diese Veränderungen basieren sowohl auf Informationen über das mechanische Verhalten der Struktur aus Crashsimulationen wie z.B. Verschiebungsvektoren von *FE-Knoten* als auch auf der aktuellen Geometrie der Struktur.

In jeder Iteration darf die Struktur nur eine einzige Topologieänderung erfahren, also stehen die Heuristiken zur Topologieänderung in Konkurrenz zueinander. Die Heuristiken zur Form- und Wanddickenänderung hingegen werden nacheinander auf einen Entwurf angewendet, der durch eine Heuristik zur Topologieänderung erzeugt wurde.
Es ist möglich, dass während der Optimierung in einer Iteration eine oder mehrere der Heuristiken keine Änderungsvorschläge für die Struktur haben und daher dann in dieser Iteration inaktiv sind. Dies kann eintreten, wenn die Voraussetzungen für die Aktivierung der Heuristik nicht gegeben sind, wenn z.B. keine kleinen Kammern in der Struktur existieren, welche die Heuristik *Entfernen kleiner Kammern* entfernen könnte. Eine weitere Ursache hierfür kann sein, dass die durch eine Heuristik durchgeführte Topologieänderung zu einem bereits bekannten Entwurf, der früher in der Optimierung aufgetreten ist, führen würde.

3. Die Aufteilung des Optimierungsproblems in eine äußere und eine innere Schleife
Das eigentliche Optimierungsproblem der kombinierten Topologieoptimierung, Formoptimierung und Dimensionierung einer Struktur wird in zwei ineinander geschachtelte Optimierungsschleifen aufgeteilt.
In der äußeren Optimierungsschleife wird die zu optimierende Struktur ausschließlich mithilfe der Heuristiken modifiziert (siehe 2. Prinzip). Die Hauptaufgabe liegt hierbei in der Topologiemodifikation der zu optimierenden Struktur.
In der inneren Optimierungsschleife wird für einen aus der äußeren Optimierungsschleife stammenden Startentwurf entweder eine reine Dimensionierung oder eine Formoptimierung und Dimensionierung durchgeführt. Hierfür kann ein beliebiger universeller Optimierungsalgorithmus wie z.B. *Genetische Algorithmen* (siehe Abschnitt 2.2.4) verwendet werden. Die Topologieklasse der Struktur wird während der inneren Optimierungsschleife nicht verändert. Die innere Optimierungsschleife hat innerhalb der *GHT* drei Aufgaben:

(1) Die Durchführung von Funktionsaufrufen zur Bewertung eines in der äußeren Optimierungsschleife von den Heuristiken erzeugten Entwurfs. Diese Bewertung findet über den Zielfunktionswert des Entwurfs und die Überprüfung der Restriktionen statt. Dies kann i.d.R. jedoch nicht mit einem einzelnen Funktionsaufruf erfolgen, da dem Entwurf zumindest die Möglichkeit gegeben werden muss, steifer oder nachgiebiger zu werden, um Restriktionen wie Massen-, Steifigkeits- oder Beschleunigungsrestriktionen einhalten zu können. In diesem Fall wird daher nicht nur ein einzelner Funktionsaufruf durchgeführt, sondern eine Dimensionierung, wobei eine geringe Anzahl von Entwurfsvariablen verwendet wird, beispielsweise nur eine Wanddicke für die gesamte Struktur. Hierdurch ist eine geringe Anzahl von Funktionsaufrufen ausreichend.

(2) Die Erzeugung von Simulationsdaten, damit in der äußeren Optimierungsschleife die Heuristiken, basierend auf diesen Informationen, in der nächsten Iteration Geometriemodifikationen an der Struktur durchführen können.
(3) Die Feinabstimmung eines in der äußeren Optimierungsschleife erzeugten Entwurfs durch eine Formoptimierung und Dimensionierung. Je nach Komplexität der jeweiligen Struktur sind hier mehrere Entwurfsvariablen vorhanden, was eine hohe Anzahl von Funktionsaufrufen erforderlich macht. Die durch die Heuristiken in der äußeren Optimierungsschleife durchgeführten Geometriemodifikationen an der Struktur sind eher grober Art, das mechanische Verhalten einer Crashstruktur ist i.d.R. aber sensitiv gegenüber geringfügigen Änderungen von Wanddicken oder Positionen von einzelnen geometrischen Komponenten. Daher wird diese Formoptimierung und Dimensionierung verwendet, um entweder am Ende der Optimierung eine Feinabstimmung des finalen Entwurfs vorzunehmen oder aber der Optimierung einen neuen Impuls zu geben, wenn die Heuristiken keine Verbesserung gegenüber der vorherigen Iteration mehr erreichen können.

Das Prinzip der Trennung des Optimierungsproblems in zwei ineinander geschachtelte Optimierungsschleifen basiert auf der Grundidee der *Bubble-Methode* [Eschenauer et al. 1994] [Schumacher 2013a]. Diese Optimierungsmethode für die Topologieoptimierung von linear statisch belasteten Strukturen verwendet eine abwechselnde Folge von Formoptimierung und Lochpositionierung in der zu optimierenden Struktur. Die Lochpositionierung stellt hierbei die Topologieänderung dar und kann je nach Optimierungsproblem entweder mit analytischen Kriterien oder einem Optimierungsalgorithmus erfolgen.

4. Die parallele Verfolgung von konkurrierenden Entwürfen

Während der Optimierung wird nicht nur ein einzelner Entwurf verfolgt und sukzessive modifiziert, sondern eine Anzahl von miteinander konkurrierenden Entwürfen, die parallel zueinander verfolgt werden. Um ein exponentielles Wachstum der zu untersuchenden Entwürfe und dadurch auch der Funktionsaufrufe zu vermeiden, wird die Anzahl der konkurrierenden Entwürfe, die von einer Iteration zur nächsten übergehen können, beschränkt. Die maximale Anzahl wird durch den Parameter N_{ke} gesteuert, wobei N_{ke} eine Ganzzahl ist mit $N_{ke} \geq 1$ und vor Beginn der Optimierung festgelegt wird. Als Standardwert wird $N_{ke} = 5$ verwendet.

Die konkurrierenden Entwürfe entstehen durch Topologiemodifikationen, welche die Heuristiken zur Topologieänderung in der äußeren Optimierungsschleife durchführen und können vollkommen unterschiedlich voneinander sein. In jeder Iteration darf sich bei jedem Entwurf die Topologieklasse nur einmal ändern, also ist jeder neue Entwurf stets das Resultat der Anwendung einer der Heuristiken zur Topologieänderung.

Basierend auf den N_{ke} besten Entwürfen der vorherigen Iteration, entstehen in jeder Iteration maximal $N_{ke} \cdot N_h$ neue Entwürfe, wobei N_h die Anzahl der verwendeten Heuristiken zur Topologieänderung ist. Um entscheiden zu können, welche dieser neuen Entwürfe in der nächsten Iteration weiterverfolgt werden und welche ausscheiden, werden die Entwürfe entweder über einzelne Funktionsaufrufe oder über innere Optimierungsschleifen, bestehend aus einer Dimensionierung, bewertet (siehe 3. Prinzip).

Durch eine umfangreichere Abtastung des Entwurfsraums verbessert die Verwendung von konkurrierenden Entwürfen die Fähigkeit der *GHT* lokale Optima im Entwurfsraum zu überwinden. Je mehr konkurrierende Entwürfe verwendet werden, umso besser ist diese Fähigkeit, umso größer ist allerdings auch der Berechnungsaufwand.

5.2 Ablauf der äußeren Optimierungsschleife

Abbildung 5-1 (Seite 86) zeigt den Ablauf der äußeren Optimierungsschleife. Dabei wird n_{ke} als Index zur Nummerierung der konkurrierenden Entwürfe, die von einer Iteration in die nächste übergehen, n_h für die Nummerierung der Heuristiken zur Topologieänderung und n_i als Index für die Iterationen verwendet.

Zu Beginn jeder neuen Iteration werden die N_{ke} besten Entwürfe aus der Menge aller konkurrierenden Entwürfe der letzten Iteration ermittelt. Diese werden anhand des Zielfunktionswerts bewertet, wobei allerdings nur Entwürfe berücksichtigt werden, die alle Restriktionen erfüllen. In der ersten Iteration gilt $N_{ke} = 1$, da nur der Startentwurf vorhanden ist.
Für jeden dieser N_{ke} Entwürfe werden N_h neue konkurrierende Entwürfe erzeugt. Jeder dieser neuen Entwürfe entsteht durch die Anwendung von genau einer der N_h in dieser Optimierung verwendeten Heuristiken zur Topologieänderung und unterscheidet sich von dem ursprünglichen Entwurf durch die mit der jeweiligen Heuristik durchgeführte Topologieänderung. Die Heuristiken zur Form- und Wanddickenänderung modifizieren anschließend die Form und die Wanddicken jedes dieser Entwürfe, wobei stets alle dieser Heuristiken nacheinander ausgeführt werden.

Nach der Anwendung der Heuristiken wird für jeden der neuen konkurrierenden Entwürfe entweder ein einzelner Funktionsaufruf durchgeführt oder eine innere Optimierungsschleife gestartet, in welcher eine Dimensionierung mit einer geringen Anzahl von Funktionsaufrufen stattfindet. Das Ziel hierbei ist die Bewertung des neuen Entwurfs anhand des Zielfunktionswerts und der Überprüfung der Restriktionen. Welche der beiden Möglichkeiten verwendet werden kann, hängt von dem Optimierungsproblem ab. Bei einem simplen Optimierungsproblem, wie z.B. einer Maximierung der Steifigkeit der Struktur mit einer Massenrestriktion, kann ein einzelner Funktionsaufruf verwendet werden. Hier kann davon ausge-

gangen werden, dass bei einer solchen Zielfunktion die Massenrestriktion aktiv ist und die Wanddicken der Struktur daher in Abhängigkeit der Massenobergrenze definiert werden können. Sind hingegen mehrere Restriktionen zu erfüllen, muss i.d.R. eine innere Optimierungsschleife, bestehend aus einer Dimensionierung, zur Bewertung verwendet werden, damit über die Veränderung der Wanddicken die Struktur zumindest steifer oder nachgiebiger werden kann.
Die neuen Entwürfe werden anschließend der Menge der konkurrierenden Entwürfe der aktuellen Iteration hinzugefügt. Wurden innere Optimierungsschleifen verwendet, um die Entwürfe zu bewerten, wird der jeweils beste Entwurf aus den Dimensionierungen hierfür verwendet. Insgesamt enthält die Menge der konkurrierenden Entwürfe der aktuellen Iteration nun maximal $N_{ke} \cdot N_h$ Entwürfe, für die alle ein Zielfunktionswert und Informationen über die Einhaltung der Restriktionen zur Bewertung vorliegen.

Ist der Zielfunktionswert des besten Entwurfs der aktuellen Iteration geringer als derjenige des besten Entwurfs der letzten Iteration, konnten die Heuristiken eine Verbesserung der Struktur bewirken und eine neue Iteration wird gestartet. Ist dies nicht der Fall, konnten die Heuristiken allein keine Verbesserung der Struktur mehr erwirken.
In diesem Fall wird, sofern in der letzten Iteration nicht bereits eine solche Prozedur stattgefunden hat, eine innere Optimierungsschleife mit einer Formoptimierung und Dimensionierung für den besten Entwurf der letzten Iteration gestartet. Dieser ist auch gleichzeitig der beste bisher erzeugte Entwurf. In der Formoptimierung und Dimensionierung wird eine hohe Anzahl von Funktionsaufrufen verwendet. Der aus dieser inneren Optimierungsschleife resultierende Entwurf wird der Menge der Entwürfe der aktuellen Iteration hinzugefügt und anschließend startet eine neue Iteration.
Das Abbruchkriterium der *GHT* ist erfüllt, wenn eine Iteration nach der Durchführung einer solchen inneren Optimierungsschleife die Heuristiken erneut scheitern, die Struktur zu verbessern. Das Ergebnis aus der Formoptimierung und Dimensionierung ist dann der finale Entwurf.

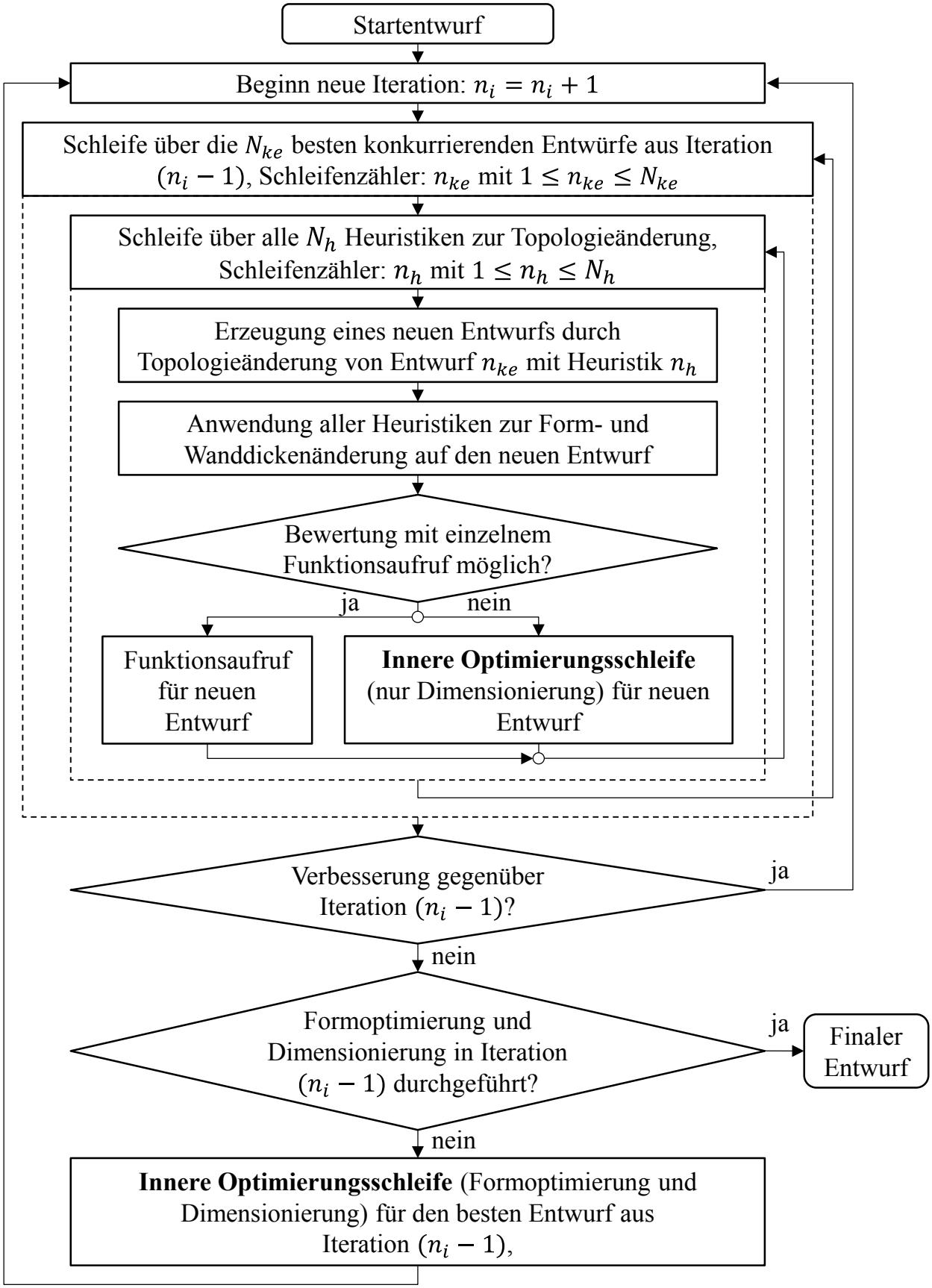


Abbildung 5-1: Ablauf der äußeren Optimierungsschleife

5.3 Ablauf der inneren Optimierungsschleife

Der Ablauf der inneren Optimierungsschleife ist in Abbildung 5-2 dargestellt. In der inneren Optimierungsschleife findet die Optimierung eines Entwurfs statt, der aus der äußeren Optimierungsschleife stammt. Ebenfalls aus der äußeren Optimierungsschleife wird die Information übergeben, ob nur eine Dimensionierung mit einer geringen Anzahl von Funktionsaufrufen oder eine Formoptimierung und Dimensionierung mit einer hohen Anzahl von Funktionsaufrufen stattfinden soll.

Für diesen Startentwurf der inneren Optimierungsschleife wird ein Optimierungsmodell erzeugt, welches alle notwendigen Informationen zum Optimierungsproblem und dem gewünschten Optimierungsalgorithmus enthält. Hierbei werden automatisiert für den Startentwurf die Entwurfsvariablen und die dazugehörigen Grenzen ermittelt. Der Prozess der Erzeugung des Optimierungsmodells wird in diesem Abschnitt näher erläutert.

In der folgenden Optimierungsschleife werden die Entwurfsvariablen durch den Optimierungsalgorithmus solange verändert, bis seine Abbruchkriterien erfüllt sind. Dies kann die Unterschreitung eines Schwellenwerts für die Verbesserung der Zielfunktion von einer Iteration zur nächsten sein (Konvergenz) oder das Erreichen der maximalen Anzahl von Funktionsaufrufen. Eine Einordnung von Optimierungsalgorithmen ist in Abschnitt 2.2.4 zu finden und die Anforderungen an einen Optimierungsalgorithmus zur Anwendung auf eine crashbelastete Struktur sind in Abschnitt 2.3 zusammengefasst. Prinzipiell kann jeder universelle Optimierungsalgorithmus, der diese Anforderungen erfüllt, verwendet werden. Als Standard werden in der inneren Optimierungsschleife der *GHT* entweder *Genetische Algorithmen* oder *SRSM* benutzt.

Das mechanische Verhalten der Struktur und insbesondere die Werte für Zielfunktion und Restriktionen werden dabei durch Funktionsaufrufe (hier *FE-Simulationen* für alle Lastfälle) ermittelt. Hierzu wird ein mathematischer Graph erzeugt, welcher den aktuellen Entwurf mit den variierten Entwurfsvariablen beschreibt. Anschließend werden aus diesem Graphen *FE-Modelle* für die einzelnen Lastfälle erzeugt, bevor letztendlich die *FE-Simulationen* durchgeführt werden.

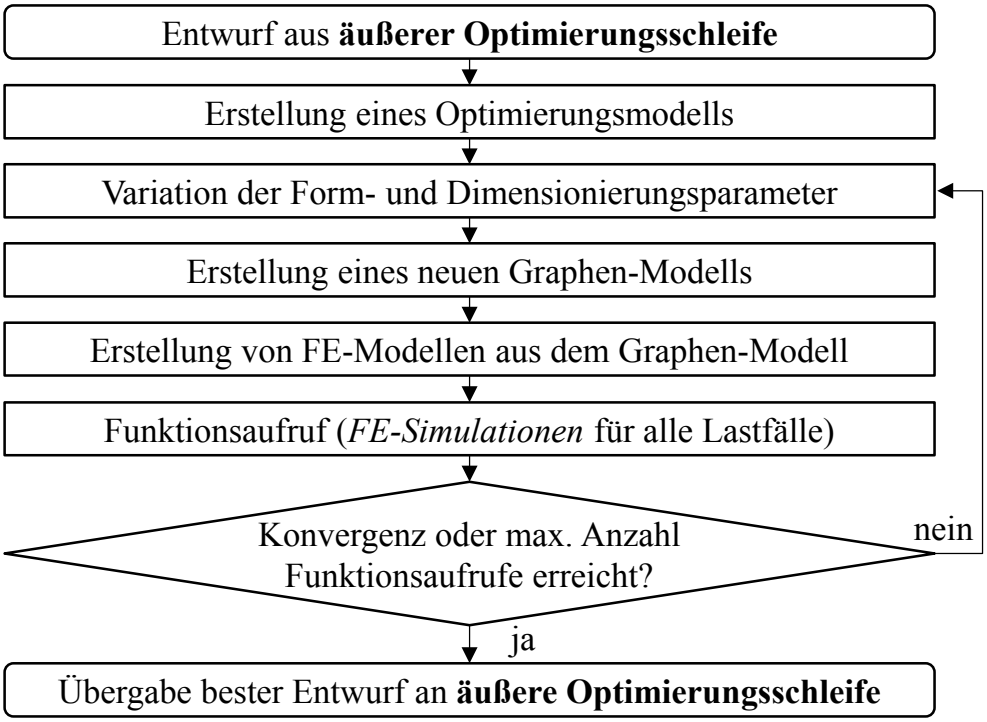


Abbildung 5-2: Ablauf der inneren Optimierungsschleife

Für die Durchführung der inneren Optimierungsschleife muss für ihren Startentwurf ein Optimierungsmodell generiert werden. Dies ist ein Prozess, den Anwender normalerweise manuell durchführen, wenn für eine Struktur eine Formoptimierung und Dimensionierung gestartet werden soll. In der *GHT* muss dieser Prozess aber automatisch ohne manuellen Eingriff erfolgen. Erforderlich ist die Definition der

- Entwurfsvariablen,
- Grenzen der Entwurfsvariablen,
- maximalen Anzahl von Funktionsaufrufen,
- Strukturantworten, die während der Optimierung ausgewertet werden, z.B. die Masse,
- Zielfunktion basierend auf den Strukturantworten,
- Restriktionen basierend auf den Strukturantworten,
- Kommandopfade für die Ausführung von FE-Simulationen zur Bestimmung der Strukturantworten,
- Streuungen von Parametern, falls Robustheit in die Optimierung integriert werden soll,
- Einstellungen des verwendeten Optimierungsalgorithmus.

Bis auf die ersten drei Punkte sind alle Definitionen unabhängig von der Geometrie der Struktur, für die eine Formoptimierung und/oder Dimensionierung durchgeführt werden soll, und können daher vor Beginn der *GHT* festgelegt werden. Die Entwurfsvariablen und

ihre Grenzen müssen aber automatisiert bestimmt werden und können dann zusammen mit den restlichen Informationen zu einem Optimierungsmodell kombiniert werden. Dieses kann dann für eine Formoptimierung und/oder Dimensionierung in der inneren Optimierungsschleife verwendet werden. Als Entwurfsvariablen einer Struktur werden Eigenschaften der Knoten des Graphen verwendet, welcher die Struktur beschreibt. Die Entwurfsvariablen lassen sich in drei Kategorien einteilen:

(1) Dimensionierungsvariablen basierend auf Wanddicken,
(2) Formvariablen basierend auf Positionen von Wänden,
(3) Formvariablen basierend auf Krümmungen von Wänden.

Eine detailliertere Erläuterung der Bestimmung der Entwurfsvariablen und ihrer Grenzen für Dimensionierungsvariablen basierend auf Wanddicken folgt in Abschnitt 5.3.1. Für Formvariablen basierend auf Positionen von Wänden bzw. auf Krümmungen von Wänden folgt dies in Abschnitt 5.3.2 bzw. 5.3.3.
Ist die Anzahl der Entwurfsvariablen bestimmt, wird diese benutzt, um die maximale Anzahl von Funktionsaufrufen festzulegen, die in der inneren Optimierungsschleife verwendet werden darf. Dieser Prozess wird in Abschnitt 5.3.4 beschrieben.

5.3.1 Generierung von Dimensionierungsvariablen basierend auf Wanddicken

Für die Dimensionierungsvariablen werden die in den *BEAMG-Knoten* des Graphen gespeicherten Wanddicken verwendet. Hierbei existieren drei mögliche Verfahrensweisen:

(1) Jede Wand des Profilquerschnitts verfügt über eine eigene Wanddicke,
(2) Die zu den Bauraumgrenzen des Profilquerschnitts der Struktur gehörenden und damit außen liegenden Wände haben eine Wanddicke und die innen liegenden Wände der Struktur besitzen eine andere Wanddicke,
(3) Alle Wände des Profilquerschnitts besitzen eine gemeinsame Wanddicke.

Die erste Verfahrensweise bietet das größte Optimierungspotenzial, da hier die Struktur am variabelsten ist. Der gravierende Nachteil dieser Variante ist jedoch die hohe Anzahl an Entwurfsvariablen, da die Profilquerschnitte komplexerer Strukturen durchaus mehr als 20 einzelne Wände aufweisen können. Verfahrensweise 3 resultiert in nur einer einzigen Entwurfsvariablen, allerdings wird die eventuell vorhandene Variabilität der Struktur hinsichtlich unterschiedlicher Wanddicken einzelner Wände nicht ausgenutzt. Ein Kompromiss ist die zweite Variante, welche zu zwei Entwurfsvariablen führt, einer äußeren und einer inneren Wanddicke. Trotz der geringen Anzahl von Entwurfsvariablen wird hier der Tatsache Rechnung getragen, dass es in vielen Fällen aus mechanischer Sicht sinnvoll ist, den Wän-

den im äußeren Bereich des Profilquerschnitts der Struktur eine andere Wanddicke zuzuweisen als den Wänden im Inneren. Die Variante der Bestimmung der Dimensionierungsvariablen sollte entsprechend der Art der mechanischen Belastung der zu optimierenden Struktur und der verfügbaren Berechnungsressourcen gewählt werden. Als Standard wird Variante 3 verwendet.

Für die Grenzen der auf Wanddicken basierenden Entwurfsvariablen können die Fertigungsrestriktionen herangezogen werden. Diese können unter Umständen jedoch einen zu großen Spielraum an möglicher Wanddickenänderung zulassen und dadurch bei einer Dimensionierung zu einer hohen Anzahl von Entwürfen führen, deren Wanddicken sich nicht mehr in einem sinnvollen Bereich befinden. Daher können die Grenzen, basierend auf den Wanddicken des Startentwurfs der aktuellen inneren Optimierungsschleife, zusätzlich eingeschränkt werden. Standardmäßig darf die Obergrenze der Dimensionierungsvariablen nicht größer sein als das Doppelte der höchsten Wanddicke des Startentwurfs dieser inneren Optimierungsschleife. Analog gilt für die Untergrenze der Dimensionierungsvariablen, dass sie standardmäßig nicht geringer sein darf als die Hälfte der geringsten Wanddicke des Startentwurfs dieser inneren Optimierungsschleife.

5.3.2 Generierung von Formvariablen basierend auf Positionen von Wänden

Die Definition der Entwurfsvariablen, welche die Form einer Struktur bestimmen, ist aufwändiger als die Definition von Dimensionierungsvariablen. Prinzipiell werden hierfür die in den *LINK-Knoten* des Graphen (siehe Abschnitt 3.2) gespeicherten kartesischen Koordinaten als Entwurfsvariablen verwendet. Der komplexe Teil ist die Definition der Grenzen der Entwurfsvariablen, denn die Variabilität, welche die aktuelle Topologieklasse bietet, soll möglichst umfassend ausgenutzt werden. Gleichzeitig sollen während der Formoptimierung und Dimensionierung der inneren Optimierungsschleife möglichst wenige Entwürfe entstehen, welche die Fertigungsrestriktionen verletzen oder bei denen sich gar einzelne Wände überschneiden. Für die Bestimmung der Grenzen werden die *LINK-Knoten* in drei unterschiedliche Typen eingeteilt. Diese Typen von *LINK-Knoten* sind beispielhaft in Abbildung 5-3 bei einem Graphen eingekreist.

Typ 1:
LINK-Knoten, welche zu den Bauraumgrenzen des Profilquerschnitts gehören und die gleichzeitig Ecken des Profilquerschnitts darstellen. Diese können nicht verschoben werden, ohne dass sich die Bauraumgrenzen des Profilquerschnitts ändern und müssen daher nicht näher betrachtet werden.

Typ 2:
LINK-Knoten, die zu den Bauraumgrenzen des Profilquerschnitts gehören, aber in eine Richtung verschoben werden können, ohne dass die Bauraumgrenzen des Profilquerschnitts modifiziert werden. Dies ist z.B. der Fall, wenn ein *LINK-Knoten* sich auf einer geraden Linie zwischen zwei *LINK-Knoten* des Typs 1 befindet und mit diesen über *Graphen-Balkenelemente* verbunden ist.

Typ 3:
Im Profilquerschnitt innen liegende *LINK-Knoten*, die prinzipiell in alle Richtungen bis zu den Bauraumgrenzen des Profilquerschnitts verschoben werden können.

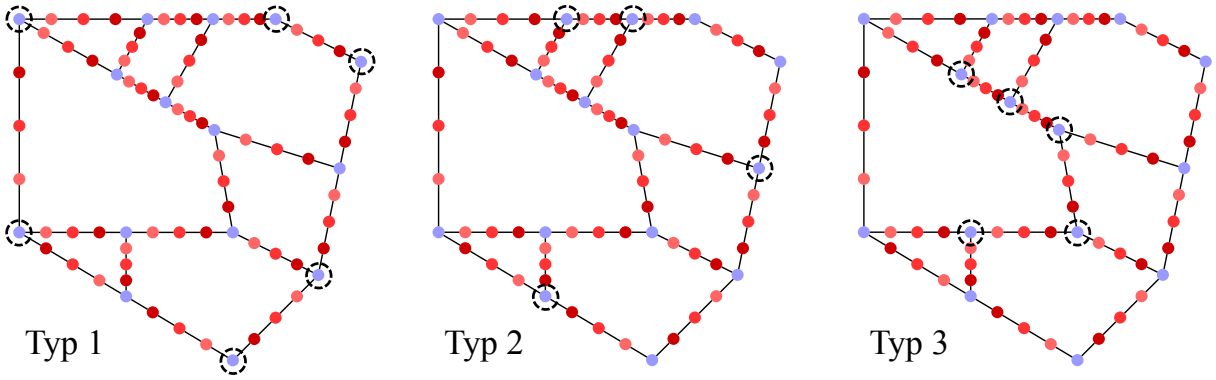


Abbildung 5-3: Typen von LINK-Knoten für die Generierung von Formvariablen basierend auf Positionen von Wänden

Die auf Positionen von Wänden basierenden Entwurfsvariablen samt ihrer Grenzen sind für eine Profilstruktur beispielhaft in Abbildung 5-4 dargestellt. Im linken Teil der Abbildung befindet sich der mathematische Graph und auf der rechten Seite der durch den Graphen beschriebene Profilquerschnitt mit Entwurfsvariablen und ihren Grenzen. Letztere sind durch gestrichelte Linien angedeutet.
Die Bestimmung der Grenzen einer auf einem *LINK-Knoten* des Typs 2 basierenden Entwurfsvariablen kann durch die beiden *LINK-Knoten* des Typs 1 geschehen, welche über *Graphen-Balkenelemente* mit dem *LINK-Knoten* des Typs 2 verbunden sind. Mithilfe der beiden *LINK-Knoten* des Typs 1 wird ein lokales Koordinatensystem erzeugt, bei welchem eine Achse von einem dieser *LINK-Knoten* zum anderen zeigt. Die Bewegung entlang dieser Achse ist die Entwurfsvariable. Die dazugehörigen Grenzen werden durch die Fertigungsrestriktion *Mindestabstand von Wänden* definiert. Diese Prozedur lässt sich auch anwenden, wenn sich auf einer geraden Linie zwischen zwei *LINK-Knoten* des Typs 1 mehrere *LINK-Knoten* des Typs 2 befinden und somit auch mehrere Entwurfsvariablen definiert werden müssen.

Die Grenzen der Entwurfsvariablen, welche auf *LINK-Knoten* des Typs 3 basieren, werden durch eine Rechteck-Wachstumsstrategie ermittelt. An den Positionen der *LINK-Knoten* des Typs 3 werden im Profilquerschnitt Grenzrechtecke mit einer Länge und Breite von 0 positioniert. In mehreren Tausend Iterationen wachsen diese Rechtecke dann in kleinen Schritten Seite für Seite. Kommt ein Rechteck in Kontakt mit einem Offset der Bauraumgrenzen des Profilquerschnitts, wird die jeweilige Seite des Rechtecks fixiert und darf nicht weiterwachsen. Das Offset hat einen Abstand von den Bauraumgrenzen in Höhe des Werts der Fertigungsrestriktion *Mindestabstand von Wänden*. Kommen zwei Rechtecke in Kontakt zueinander, werden die jeweiligen Seiten der Rechtecke um jeweils den halben Wert der Fertigungsrestriktion *Mindestabstand von Wänden* zurückgefahren und anschließend fixiert.

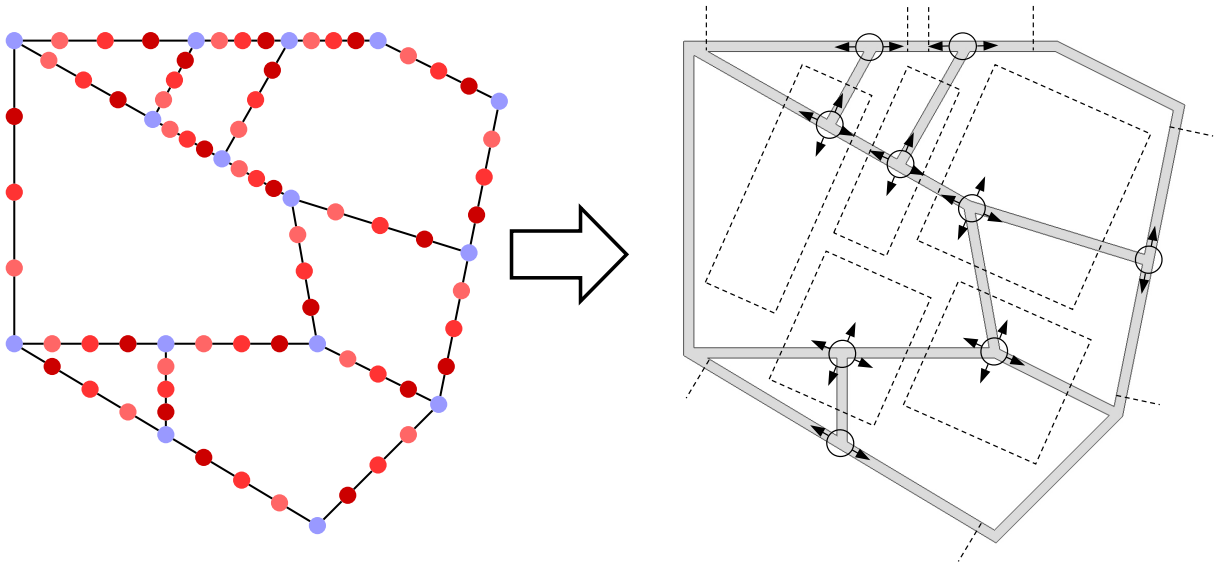


Abbildung 5-4: Beispielhafte Ermittlung von Entwurfsvariablen und ihren Grenzen

Die Bestimmung der Grenzen von Entwurfsvariablen, welche auf *LINK-Knoten* des Typs 3 basieren, ist abhängig von dem verwendeten Koordinatensystem. Um eine möglichst optimale Definition der Entwurfsvariablen und ihrer Grenzen zu gewährleisten, werden diese daher nicht nur in dem Koordinatensystem des Graphen definiert, sondern in 88 weiteren Koordinatensystemen, welche jeweils um 1 ° zueinander versetzt sind. Damit wird eine Rotation des Koordinatensystems des Graphen von 0 ° bis 89 ° dargestellt.
Die Flächeninhalte aller Grenzrechtecke, welche die Grenzen der Entwurfsvariablen bestimmen, werden für jedes Koordinatensystem aufsummiert. Am Ende wird dasjenige Koordinatensystem für die finale Definition der Grenzen und ihrer Entwurfsvariablen ausgewählt, welches den höchsten Flächeninhalt der Grenzrechtecke aufweist. Dieses Koordinatensystem bietet den Entwurfsvariablen den größten Spielraum.

Für die in Abbildung 5-4 dargestellte Struktur zeigt Abbildung 5-5 den Flächeninhalt der Grenzrechtecke in Abhängigkeit von dem Drehwinkel des Koordinatensystems. Die 89 Stützstellen sind dabei durch Linien miteinander verbunden. Der Verlauf ist nicht konvex und weist mehrere lokale Maxima auf. Das Maximum der Stützstellen liegt bei einem Rotationswinkel von 66°.

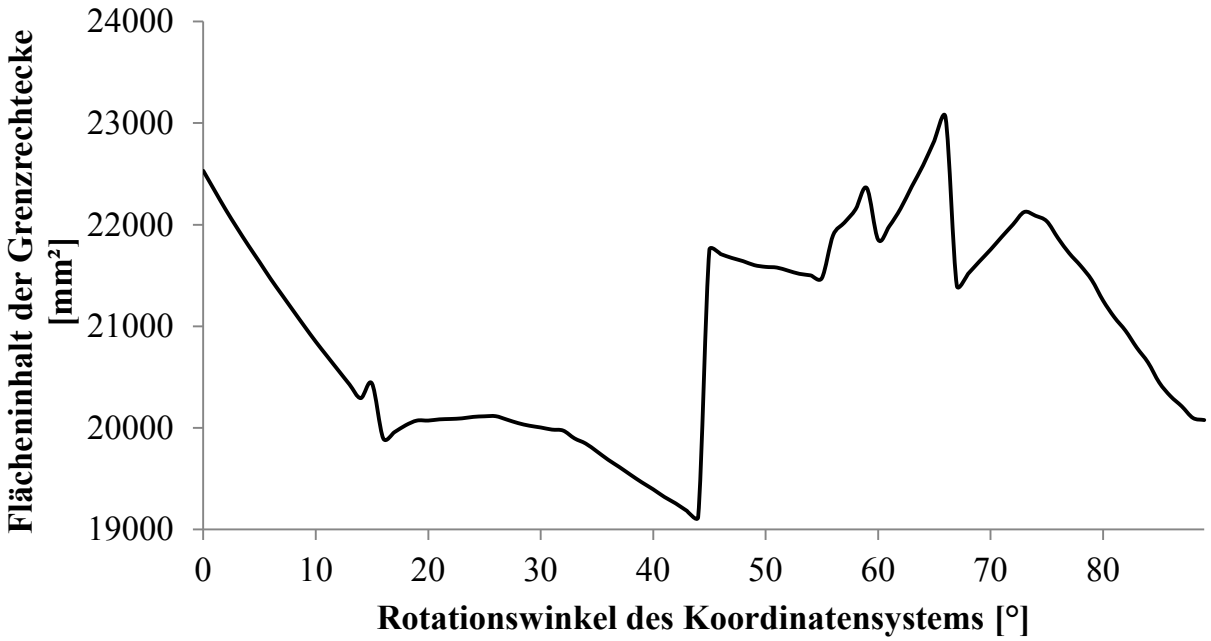


Abbildung 5-5: Flächeninhalt der Grenzrechtecke in Abhängigkeit der Rotation des Koordinatensystems

Es existiert die Option im Bedarfsfall die Grenzen der Formvariablen künstlich einzuschränken. In diesem Fall werden die Grenzen dieser Entwurfsvariablen definiert, indem zu dem Startwert der jeweiligen Entwurfsvariablen ein fester Wert hinzuaddiert bzw. von dem Startwert abgezogen wird, sofern nicht die in diesem Abschnitt beschriebene reguläre Vorgehensweise noch engere Grenzen ermittelt hat. Die Verwendung dieser Option kann Sinn machen, wenn z.B. nur eine geringe Anzahl von Funktionsaufrufen für die Optimierung zur Verfügung steht und auf eine Abtastung des gesamten Entwurfsraums zugunsten einer genaueren Abtastung des Bereichs des Entwurfsraums um den Startentwurf herum verzichtet werden soll.

5.3.3 Generierung von Formvariablen basierend auf Krümmungen von Wänden

In den *BEAMG-Knoten* werden die Krümmungen von Wänden gespeichert. Diese können ebenfalls als Entwurfsvariablen verwendet werden. Die Grenzen dieser Entwurfsvariablen sind gewöhnlich 0 (keine Krümmung) und 1 (Halbkreis). Die Obergrenze kann aber optional weiter eingeschränkt werden. Dies ist sinnvoll, wenn bereits vor Beginn der Optimierung bekannt ist, dass lediglich eine leichte Krümmung der Wände positiv sein kann (um z.B. die Beullast und damit auch Kraftspitzen zu reduzieren), aber stark gekrümmte Wände mechanisch nicht sinnvoll sind.
Diese Art der Formvariablen werden in der *GHT* zwar mitsamt ihrer Grenzen ermittelt und definiert, werden aber standardmäßig in den inneren Optimierungsschleifen nicht verwendet, da die Anzahl der Entwurfsvariablen hierdurch stark vergrößert wird.

5.3.4 Bestimmung der maximalen Anzahl von Funktionsaufrufen

Aufgrund der in Abschnitt 2.3 beschriebenen Herausforderungen bei der Formoptimierung und Dimensionierung von crashbelasteten Strukturen ist es wahrscheinlich, dass eine Konvergenz des in der inneren Optimierungsschleife verwendeten Optimierungsalgorithmus eine zu hohe Anzahl an Funktionsaufrufen benötigen würde. Daher ist es notwendig, die maximale Anzahl von Funktionsaufrufen zu begrenzen. Dabei ist eine dynamische Festlegung dieser Maximalanzahl in Abhängigkeit von der Anzahl der Entwurfsvariablen sinnvoll, damit Entwürfen mit vielen Entwurfsvariablen eine höhere Anzahl von Funktionsaufrufen zugestanden wird, als Entwürfen mit einer geringen Anzahl von Entwurfsvariablen.
Bei einer gleichbleibenden Abtastung des Entwurfsraums in Relation zu der Größe des Entwurfsraums ist der Zusammenhang zwischen der Anzahl der Funktionsaufrufe und der Anzahl der Entwurfsvariablen annähernd exponentiell. Beispielsweise beträgt die notwendige Anzahl von Funktionsaufrufen bei einem *3-level Full Factorial* Versuchsplan 3^n, wobei n die Anzahl der Entwurfsvariablen ist (siehe Abschnitt 2.2.4).

In der inneren Optimierungsschleife ist es möglich, einen beliebigen universellen Optimierungsalgorithmus zu verwenden, der die in Abschnitt 2.3 beschriebenen Anforderungen erfüllt. Beispielsweise können alle für eine innere Optimierungsschleife verfügbaren Funktionsaufrufe in einer einzigen Iteration verwendet werden, um ein Metamodell aufzubauen. Anschließend kann eine Optimierung auf dem Metamodell durchgeführt werden, ohne weitere Funktionsaufrufe zu verbrauchen (siehe Abschnitt 2.2.4). Es ist aber auch möglich, einen Optimierungsalgorithmus wie z.B. *Genetische Algorithmen* (siehe Abschnitt 2.2.4) zu verwenden, wobei dann die verwendeten Funktionsaufrufe auf mehrere Iterationen aufgeteilt werden.

Als Standardwerte werden die folgenden Einstellungen verwendet:

- Anzahl der Iterationen: 3 · Anzahl der Entwurfsvariablen
- Anzahl der Funktionsaufrufe pro Iteration: 10 · Anzahl der Entwurfsvariablen
- Maximale Anzahl von Iterationen: 30
- Maximale Anzahl von Funktionsaufrufen pro Iteration: 100

Diese Standardwerte berücksichtigen nur einen linearen Einfluss der Anzahl der Entwurfsvariablen auf die Anzahl der Funktionsaufrufe, da ein exponentieller Einfluss zu einer zu hohen Anzahl von Funktionsaufrufen führen würde. Selbst Problemstellungen mit einem geringen Rechenaufwand pro einzelnem Funktionsaufruf wären dann nicht mehr zu lösen. Dies führt allerdings dazu, dass sich die Abtastung des Entwurfsraums in Relation zu der Größe des Entwurfsraums mit steigender Anzahl der Entwurfsvariablen immer weiter verschlechtert.

Die Parameter zur Bestimmung der Anzahl der Funktionsaufrufe sind stark von der Problemstellung und dem in der inneren Optimierungsschleife verwendeten Optimierungsalgorithmus abhängig und sollten vor dem Beginn der *GHT* angepasst werden.

5.4 Möglichkeiten und Grenzen der Optimierungsmethode

Die in diesem Kapitel beschriebene Methode der *Graphen- und Heuristikbasierten Topologieoptimierung* (*GHT*) ist nicht auf bestimmte Kombinationen von Zielfunktion und Restriktionen festgelegt. Allerdings wird sie aufgrund der Nutzung von auf Crash-Expertenwissen basierenden Heuristiken nur dann sinnvolle Ergebnisse erzeugen, wenn die maßgebende Belastung der zu optimierenden Struktur Crashlastfälle sind.
Eine weitere grundlegende Einschränkung ist, dass die geometrische Veränderung der Struktur nur am zweidimensionalen Profilquerschnitt stattfindet und daher auch nur Strukturen optimiert werden können, für die ein Profilquerschnitt definiert werden kann. Lediglich unter dieser Voraussetzung kann die in Kapitel 3 beschriebene Graphensyntax zur Beschreibung der Geometrie der Struktur verwendet werden.

Aufgrund der in Abschnitt 2.3 beschriebenen Herausforderungen bei der Optimierung einer Crashstruktur wird bei einer Formoptimierung und Dimensionierung i.d.R. nicht das globale Optimum gefunden. Dies gilt umso mehr für die Topologieoptimierung von solchen Strukturen, da wegen der größeren Freiheit bei der Gestaltung eines Entwurfs auch der Entwurfsraum größer und somit auch die Anzahl der lokalen Optima höher ist. Die in Abschnitt 5.1 beschriebene Verwendung von konkurrierenden Entwürfen verbessert die Fähigkeit der *GHT* lokale Optima zu überspringen, aber dennoch ist es unwahrscheinlich, dass mit dieser

Optimierungsmethode das globale Optimum gefunden wird. Aus diesem Grund hat der Startentwurf ebenfalls Einfluss auf das Ergebnis einer Optimierung mit der *GHT*.
Robustheit wird in der *GHT* nicht inhärent berücksichtigt, kann aber in der inneren Optimierungsschleife wie bei einer gewöhnlichen Formoptimierung und Dimensionierung integriert werden.

Im Rahmen der beschriebenen Grenzen kann mit der *GHT* die kombinierte Topologieoptimierung, Formoptimierung und Dimensionierung des Profilquerschnitts einer crashbelasteten Struktur durchgeführt werden. Hierfür können die für die Auslegung von Crashstrukturen tatsächlich relevanten Strukturantworten für die Definition der Zielfunktion und der Restriktion verwendet werden. Die Benutzung von Ersatzzielgrößen ist nicht notwendig.
Während der Optimierung mit der *GHT* werden für alle zu berechnenden Entwürfe die graphenbasierten Fertigungsrestriktionen (siehe Abschnitt 3.3) überprüft. Dies stellt nicht nur sicher, dass der finale Entwurf diese Fertigungsrestriktionen erfüllt, sondern auch, dass in der Optimierung nur Funktionsaufrufe für Entwürfe durchgeführt werden, welche diese ebenfalls erfüllen.

5.5 Softwareumsetzung

Für die praktische Durchführung der *GHT* ist das *JAVA-Programm TOC* (*Topology Optimizer for Crashworthiness structures*) entwickelt worden. *TOC* besitzt Schnittstellen zu *GRAMB* (inkl. *Altair HyperMesh*®, *Dassault Systèmes CATIA*® und *SFE CONCEPT*®), *LS-DYNA*® und *LS-OPT*®. Vor dem Start von *TOC* können Optionen in einer *ASCII-basierten* Konfigurationsdatei festgelegt werden. Dazu zählen z.B. die Definition von Fertigungsrestriktionen (siehe Abschnitt 3.3), die in Kapitel 4 beschriebenen Parameter der einzelnen Heuristiken oder die Parameter zur Steuerung der Generierung der Entwurfsvariablen in den inneren Optimierungsschleifen (siehe Abschnitt 5.3.1 bis 5.3.4).
Die Aufgaben von *TOC* während der Optimierung sind:

(1) Die Steuerung des Dateimanagements. Hierzu zählen das Erstellen von neuen Verzeichnissen, das Löschen von nicht mehr benötigten Simulationsdaten und das Ordnen von relevanten Simulationsdaten.
(2) Die Extraktion und Analyse von Simulationsdaten. Die Ausgabedateien des *FE-Solvers LS-DYNA*®, welcher für die Simulationen verwendet wird, werden nach relevanten Ergebnisdaten wie z.B. den Geschwindigkeitsvektoren der *Finiten Elemente* des *FE-Modells* der Struktur durchsucht und diese Daten werden extrahiert. Anschließend werden diese Ergebnisdaten den Heuristiken zur Verfügung gestellt.

(3) Die Modifikation der Struktur durch die Heuristiken in der äußeren Optimierungsschleife. Alle Heuristiken sind als Sub-Programme in *TOC* implementiert und werden von *TOC* für das Verändern der zu optimierenden Struktur verwendet.
(4) Die Erzeugung eines Optimierungsmodells für die innere Optimierungsschleife. Hierzu zählt auch die Generierung der Entwurfsvariablen und ihrer Grenzen. Diese Informationen werden zusammen mit allgemeinen Informationen über das Optimierungsproblem wie z.B. der Art der Zielfunktion und der Restriktionen zu einem ausführbaren Optimierungsmodell für *LS-OPT*® kombiniert (siehe Abschnitt 5.3).
(5) Die Durchführung der inneren Optimierungsschleife durch das Ansteuern und die Kontrolle von *LS-OPT*®.

6 Darstellung der Effizienz der Methode anhand praktischer Anwendungen

In diesem Kapitel erfolgt die Anwendung der *Graphen- und Heuristikbasierten Topologieoptimierung (GHT)* auf unterschiedliche Beispiele. Hierbei handelt es sich um:

1) Eine Fahrzeugschweller-Substruktur in einem Pfahlaufprall-Lastfall sowie zwei linear statischen Lastfällen,
2) Einen Aluminiumrahmen, auf welchen eine Stahlkugel trifft,
3) Einen Fahrzeugschweller in einem industriellen Gesamtfahrzeugmodell, angelehnt an den *Euro NCAP* Pfahlaufprall (siehe Abschnitt 2.1.2).

Für die beiden erstgenannten Beispiele werden jeweils mehrere unterschiedliche Optimierungsprobleme verwendet, um den Einfluss der Kombination von Zielfunktion und Restriktionen auf das Optimierungsergebnis zu untersuchen. Die Optimierungsergebnisse werden diskutiert und falls möglich, wird ihr Grad an Optimalität anhand von analytischen Abschätzungen ermittelt. Die Effizienz der Optimierungsmethode im Sinne der benötigten Funktionsaufrufe wird ebenfalls thematisiert. Das dritte Beispiel ist eine rechenintensive industrielle Problemstellung und Maßnahmen zur Effizienzsteigerung werden angewendet, um die *GHT* bei diesem Beispiel erfolgreich mit einer stark begrenzten Anzahl von Funktionsaufrufen anwenden zu können.
In Anwendungsbeispiel 1a (Abschnitt 6.1.1) findet im Vergleich zu den anderen Beispielen eine detailliertere Beschreibung der durchgeführten Optimierung statt, um typische Effekte, die bei einer Anwendung der *GHT* auftreten, zu beschreiben.

Alle Funktionsaufrufe während der Optimierungen werden mit *LS-DYNA*® durchgeführt. Bei der Erstellung der *FE-Modelle* wird die Schnittstelle von *GRAMB* zu *Altair HyperMesh*® (siehe Abschnitt 3.5) verwendet. Die Formoptimierungen und Dimensionierungen in den inneren Optimierungsschleifen werden mit der Schnittstelle von *TOC* zu *LS-OPT*® (siehe Abschnitt 5.5) durchgeführt.

Anwendungsbeispiel 1 und 2 verwenden die Materialdaten einer mit Magnesium und Silizium legierten Aluminiumknetlegierung, welche lösungsgeglüht und warmausgelagert wird. Dieses Material wird in der Automobilindustrie häufig für Aluminiumstrangpressprofile verwendet. Die exakte Werkstoffbezeichnung ist EN AW-6005 T6. In den Crashsimulationen wird der plastische Bereich des Materials mit einem abschnittsweise linearen Zusammenhang zwischen Dehnung und Spannung abgebildet. Das verwendete Materialmodell

berücksichtigt dabei keine Schädigungsmechanismen. Die Spannung-Dehnung-Kurve des Materials ist in Abbildung 6-1 dargestellt. Weitere Kennwerte sind in Tabelle 6-1 zusammengefasst.

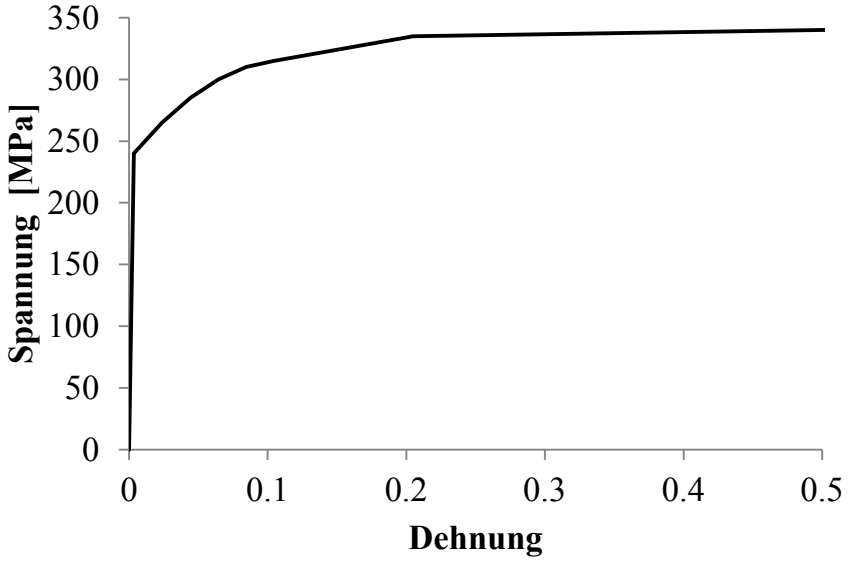


Abbildung 6-1: Spannung-Dehnung-Kurve des Materials EN AW-6005 T6

Elastizitätsmodul E	**Fließspannung** σ_f	**Querkontraktionszahl** ν	**Dichte** ρ
70000 MPa	240 MPa	0,33	$2{,}7 \cdot 10^{-9}$ t/mm³

Tabelle 6-1: Weitere Kennwerte des Materials EN AW-6005 T6

In den Formoptimierungen und Dimensionierungen der inneren Optimierungsschleifen werden *Genetische Algorithmen* eingesetzt (siehe Abschnitt 2.2.4). In den reinen Dimensionierungen der inneren Optimierungsschleifen zur Bewertung der in der äußeren Optimierungsschleife durch die Heuristiken erzeugten Entwürfe wird der Optimierungsalgorithmus *SRSM* (siehe Abschnitt 2.2.4) verwendet, da er bei einem reinen Dimensionierungsproblem aufgrund der nur mäßig ausgeprägten Nichtlinearitäten bei den Strukturantworten besonders geeignet ist.

6.1 Anwendungsbeispiel 1: Schwellerausschnitt

Die zu optimierende Struktur in diesem Anwendungsbeispiel ist ein Ausschnitt aus einem Aluminium-Fahrzeugschweller mit einer Länge von 600 mm, welcher in drei Lastfällen belastet wird.

Im ersten Lastfall, welcher an den *Euro NCAP* Pfahlaufprall (siehe Abschnitt 2.1.2) angelehnt ist, ist der Schwellerausschnitt mit einem Ausschnitt des Sitzquerträgers verbunden und wird mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 29 km/h in negative y-Richtung gegen einen starren Pfahl bewegt (siehe Abbildung 6-2). Der Sitzquerträger ist dabei ebenfalls aus Aluminium und weist eine Wanddicke von 2,5 mm auf. Um dem Lastfall noch zusätzliche Energie hinzuzufügen, befindet sich an dem freien Ende des Sitzquerträgerausschnitts eine starre Wand, welche sich ebenfalls mit 29 km/h und einer Masse von 85 kg in negative y-Richtung bewegt. Aufgrund der geringen Modellgröße dieser Substruktur muss die Bewegung des Schwellerausschnitts geführt werden, damit ein ähnliches Belastungsverhalten für den Schwellerausschnitt erreicht werden kann, wie für einen Schweller in einem Gesamtfahrzeug in dem *Euro NCAP* Pfahlaufprall. Hierfür werden an dem Ende des Sitzquerträgerausschnitts, an welchem sich auch die starre Wand befindet, alle Translationen und Rotationen mit Ausnahme der Translation in y-Richtung gesperrt. Außerdem werden an den Enden des Schwellerausschnitts an den dem Pfahl zugewandten Seiten die Translationen in z-Richtung restringiert, damit ein Abknicken des Schwellerausschnitts in z-Richtung verhindert wird. Die gesamte Struktur wird mit *unterintegrierten Schalenelementen* vom Typ *Belytschko-Tsay* mit einer Elementkantenlänge von 5 mm diskretisiert.
Die anderen beiden Lastfälle sind linear statisch. Ein Ende des Schwellerausschnitts ist hierbei eingespannt, während an dem anderen Ende über eine Spinne aus starren Balkenelementen in Lastfall 2 (Biegung) eine Last von 1000 N in negative z-Richtung und in Lastfall 3 (Torsion) ein Moment von 500 Nm um die x-Achse aufgebracht wird (siehe Abbildung 6-3).

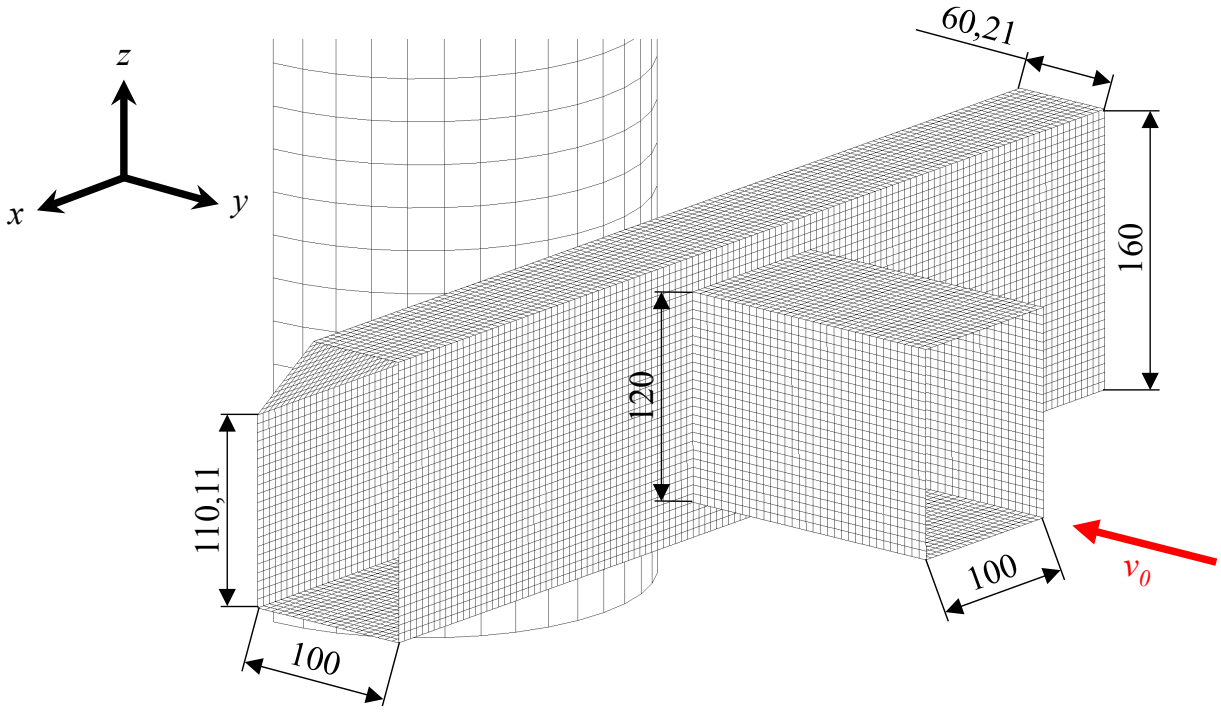


Abbildung 6-2: Anwendungsbeispiel 1 – Aufbau des Lastfalls Pfahlaufprall

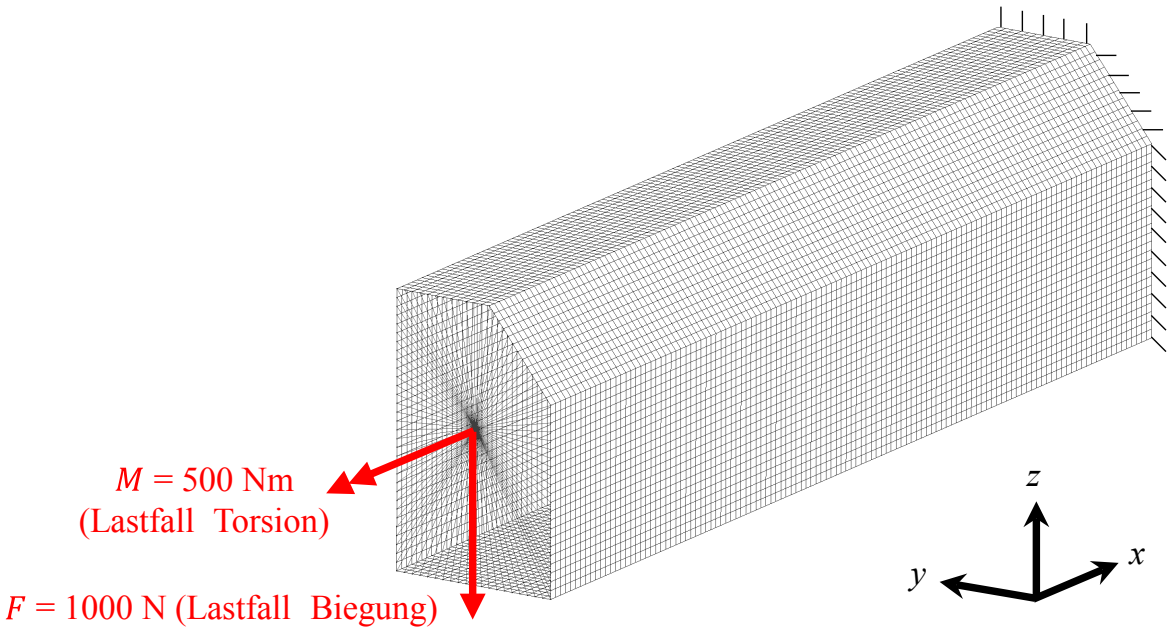


Abbildung 6-3: Anwendungsbeispiel 1 – Aufbau der Lastfälle Biegung und Torsion

Das Deformationsverhalten des Startentwurfs im Lastfall Pfahlaufprall ist in Abbildung 6-4 veranschaulicht. Die Betrachtungsebene ist die yz-Ebene und die maximale Deformation der Struktur findet bei 16 ms statt. Der Sitzquerträger und der Pfahl sind nur teilweise in der Abbildung dargestellt.

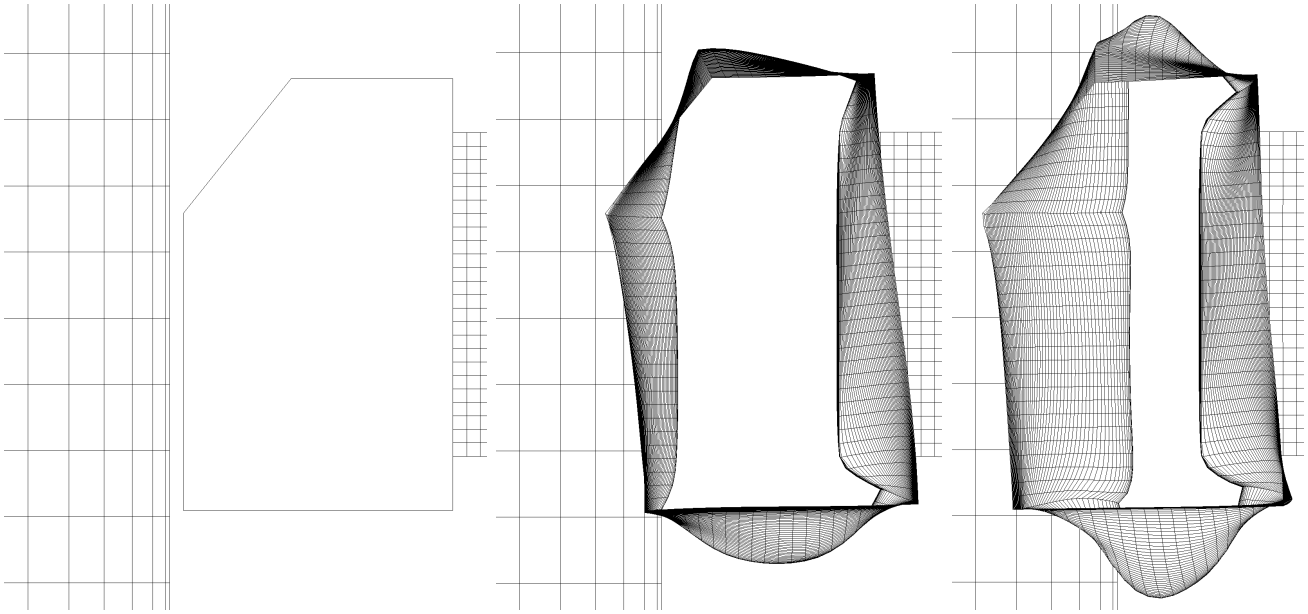


Abbildung 6-4: Anwendungsbeispiel 1 – Deformationsverhalten des Startentwurfs im Lastfall Pfahlaufprall

Die Fertigungsrestriktionen (siehe Abschnitt 3.3) orientieren sich an dem Herstellungsprozess der Legierung EN AW-6005 T6 (siehe Abbildung 6-1) der für den Schweller und den Sitzquerträger verwendeten Aluminium-Strangpressprofile. Die minimale Wanddicke beträgt 1,6 mm und die maximale 3,5 mm. Der minimale Verbindungswinkel zwischen zwei Wänden beträgt 15° und der Mindestabstand 10 mm. Das maximale Größenverhältnis von der größten zur kleinsten Kammer des Profilquerschnitts beträgt 20.
Die Bauraumgrenzen des Profilquerschnitts sind in diesem Anwendungsbeispiel identisch mit der äußeren Kontur der Struktur. Diese darf sich daher während der Optimierung nicht verändern, da bei dem Graphen des Startentwurfs alle *Graphen-Balkenelemente* zu den Bauraumgrenzen des Profilquerschnitts zählen (siehe Abschnitt 3.2).
Der mit dem Schweller im Lastfall Pfahlaufprall verbundene Sitzquerträger wird in der Optimierung nicht verändert.

6.1.1 Anwendungsbeispiel 1a: Minimierung der Reaktionskraft

Das Ziel der Optimierung ist die Minimierung der maximalen Reaktionskraft $|f_{max}|$ an der schiebenden, starren Wand, welche sich an dem freien Ende des Sitzquerträgerausschnitts im Lastfall Pfahlaufprall befindet. Durch dieses Optimierungsziel wird ein möglichst gleichmäßiger Kraft-Zeit-, bzw. Kraft-Weg-Verlauf angestrebt, da die Struktur gezwungen ist, die gesamte kinetische Energie des Lastfalls aufzunehmen, aber das Kraftmaximum möglichst gering sein soll.
Die funktionalen Restriktionen orientieren sich an dem Startentwurf der Optimierung, also an einem hohlen Schwellerprofil mit einer Wanddicke von 3,5 mm. Dessen Masse m von 2,801 kg darf während der Optimierung nicht überschritten werden.
Außerdem muss die Steifigkeit des optimalen Entwurfs in den Lastfällen 2 und 3 mindestens 50 % der Steifigkeit des Startentwurfs betragen. Dieser Spielraum bei der Steifigkeit ist notwendig, da die Steifigkeit in diesen beiden Lastfällen während der Optimierung zwangsläufig abnehmen wird. Bei dem Startentwurf ist das gesamte zur Verfügung stehende Material außen auf den Bauraumgrenzen des Profilquerschnitts angelagert. Dies maximiert die Flächenträgheitsmomente in Relation zu dem Materialeinsatz. Wird nun durch das Hinzufügen von neuen Wänden im Inneren des Profilquerschnitts Material von außen nach innen verlagert, nehmen die Flächenträgheitsmomente und damit auch die Steifigkeit in den Lastfällen 2 und 3 zwangsläufig ab.
Die relative Steifigkeit in Lastfall 2 (Biegung) k_b ist definiert als der Quotient der Verschiebung des Lastangriffspunkts in z-Richtung des Startentwurfs (0,19108 mm) und der Verschiebung des Lastangriffspunkts in z-Richtung des aktuellen Entwurfs d_b:

$$k_b = \frac{0{,}19108\ \text{mm}}{d_b}. \tag{6-1}$$

Analog gilt für die relative Steifigkeit in Lastfall 3 (Torsion) k_t und die Rotation des Lastangriffspunkts um die x-Achse r_t des aktuellen Entwurfs:

$$k_t = \frac{1{,}7744 \cdot 10^{-3}}{r_t}. \tag{6-2}$$

Die maximale Intrusion des Schwellerausschnitts im Lastfall Pfahlaufprall $d_{int,max}$ wird ebenfalls als Restriktion verwendet, um zu berücksichtigen, dass in der Auslegung von crashbelasteten Strukturen im Sinne der Robustheit i.d.R. nicht der gesamte zur Verfügung stehende Deformationsraum genutzt wird. Als Grenzwert für $d_{int,max}$ wird 70 mm festgelegt. Der Startentwurf weist hier einen Wert von 69,03 mm auf.
Die Spezifikationsliste dieser Optimierung ist in Tabelle 6-2 zusammengefasst.

Optimierungsziel:	Minimierung des maximalen Betrags der Reaktionskraft an der starren, schiebenden Wand in Lastfall 1 (Pfahlaufprall) $\lvert f_{max} \rvert$
Funktionale Restriktionen:	Masse des Schwellerausschnitts $m \leq 2{,}801$ kg
	Maximale Intrusion des Schwellerausschnitts in Lastfall 1 (Pfahlaufprall) $d_{int,max} \leq 70$ mm
	Relative Steifigkeit in Lastfall 2 (Biegung) $k_b \geq 0{,}5$
	Relative Steifigkeit in Lastfall 3 (Torsion) $k_t \geq 0{,}5$
Fertigungsrestriktionen:	1,6mm ≤ Wanddicke der Struktur ≤ 3,5 mm
	Verbindungswinkel zwischen zwei Wänden ≥ 15°
	Abstand zwischen zwei Wänden ≥ 10 mm
	Größenverhältnis von größter zu kleinster Kammer ≤ 20

Tabelle 6-2: Anwendungsbeispiel 1a – Spezifikationsliste

Für die *GHT* werden die Standardeinstellungen verwendet, mit Ausnahme der Bestimmung der auf Wanddicken basierenden Entwurfsvariablen für die innere Optimierungsschleife. Hierbei wird für die außen liegenden Wände des Profilquerschnitts eine andere Wanddicke verwendet als für die innen liegenden Wände (siehe Abschnitt 5.3.1). Diese Unterscheidung zwischen innen und außen bei der Wanddicke ist besonders für die linear statischen Lastfälle Biegung und Torsion sinnvoll, da die Flächenträgheitsmomente des Profilquerschnitts durch eine im Außenbereich höhere Wanddicke positiv beeinflusst werden.
Diese Einstellung gilt auch für die Bewertung der von den Heuristiken in der äußeren Optimierungsschleife erzeugten Entwürfe durch innere Optimierungsschleifen, bestehend aus Dimensionierungen. Da für die Bewertung durch die Verwendung von zwei Entwurfsvariablen allerdings auch mehr Funktionsaufrufe benötigt werden, dürfen nur drei anstelle von

fünf konkurrierenden Entwürfen während der Optimierung von einer Iteration in die nächste übergehen (siehe Abschnitt 5.1). Der Parameter N_{ke} hat also einen Wert von 3.

Die Optimierungshistorie ist in Tabelle 6-3 zusammengefasst und zeigt die Werte des jeweils besten Entwurfs der einzelnen Iterationen und die Anzahl der verwendeten Funktionsaufrufe pro Iteration.
In der ersten Iteration werden, basierend auf dem Startentwurf, durch die Heuristiken vier neue konkurrierende Entwürfe erzeugt. Es sind lediglich vier Entwürfe, da von den sechs Heuristiken zur Topologieänderung die beiden Heuristiken *Entfernen unbelasteter Wände* und *Entfernen kleiner Kammern* keinen Änderungsvorschlag für die Struktur haben. Insgesamt werden in dieser Iteration zur Bewertung der vier neuen Entwürfe 109 Funktionsaufrufe durchgeführt, welche sich annähernd gleichmäßig auf die vier inneren Optimierungsschleifen, bestehend aus Dimensionierungen, verteilen. Die besten drei konkurrierenden Entwürfe aus Iteration 1 gehen in die zweite Iteration über. Basierend auf diesen, werden elf neue konkurrierende Entwürfe erzeugt. Für deren Bewertung werden insgesamt 351 Funktionsaufrufe verwendet.
In der dritten Iteration scheitern die Heuristiken daran, die Struktur weiter zu verbessern. Alle neuen konkurrierenden Entwürfe, welche basierend auf den besten drei konkurrierenden Entwürfen aus Iteration 2 erzeugt werden, weisen nach ihrer Dimensionierung einen schlechteren Zielfunktionswert auf als der beste Entwurf aus der zweiten Iteration. Daher wird für diesen eine innere Optimierungsschleife, bestehend aus einer Formoptimierung und Dimensionierung, mit 500 Funktionsaufrufen durchgeführt (Iteration 3b). Der daraus resultierende Entwurf weist einen Zielfunktionswert von 42,78 kN auf, was einer Verbesserung von 23,4 % gegenüber dem Startentwurf (Zielfunktionswert 55,82 kN) entspricht. Als Nebeneffekt hat sich die Masse der Struktur von 2,801 kg auf 2,329 kg verringert. Die maximale Intrusion dieses Entwurfs befindet sich dicht an dem Grenzwert der Intrusionsrestriktion. Dies ist plausibel, da für die Minimierung von $|f_{max}|$ bei konstanter Energieaufnahme der gesamte zur Verfügung stehende Deformationsraum genutzt werden muss. Die Biegesteifigkeit und die Torsionssteifigkeit nehmen erwartungsgemäß im Laufe der Optimierung immer weiter ab, da mit fortschreitender Optimierung immer mehr Material vom Außenbereich der Struktur in den Innenbereich der Struktur transferiert wird, was die für die Steifigkeitswerte ausschlaggebenden Flächenträgheitsmomente reduziert.
Im Vergleich zu der zweiten Iteration kann in der rechenintensiven Formoptimierung und Dimensionierung in Iteration 3b nur noch eine marginale Verbesserung der Zielfunktion von 1,1 % erreicht werden. Eine solch geringe Veränderung liegt im Streubereich einer beschleunigungs- oder kraftbasierten Strukturantwort in einer Crashsimulation.
In der vierten Iteration können die Heuristiken, basierend auf den besten drei konkurrierenden Entwürfen aus Iteration 3 (inkl. des Ergebnisses der Formoptimierung und Dimensio-

nierung), erneut keine weitere Verbesserung der Struktur im Sinne der Zielfunktion mehr erreichen und die Optimierung wird beendet.

	Werte des besten Entwurfs der Iteration							Funktions-aufrufe
	$\|f_{max}\|$ [kN]	k_b [%]	k_t [%]	m [kg]	$d_{int,max}$ [mm]	t_a [mm]	t_i [mm]	
Startentwurf	55,82	100	100	2,801	69,03	3,50	3,50	-
Iteration 1	47,26	81,94	80,07	2,461	69,98	2,70	1,85	109
Iteration 2	43,24	67,95	66,69	2,337	69,39	2,24	1,91	351
Iteration 3a	44,78	57,90	54,22	2,042	69,96	1,88	1,66	488
Iteration 3b (finaler Entwurf)	42,78	67,54	66,31	2,329	69,85	2,22	1,91	500
Iteration 4	47,14	54,89	50,39	2,114	69,76	1,73	1,65	169

Tabelle 6-3: Anwendungsbeispiel 1a – Zusammenfassung der Optimierungshistorie

Die Graphen der drei besten konkurrierenden Entwürfe jeder Iteration und damit auch die Entwicklung vom Startentwurf zum finalen Entwurf sind in Abbildung 6-5 dargestellt. In der Abbildung ist ebenfalls angegeben, welche der Heuristiken zur Topologieänderung für die Erzeugung welcher Entwürfe verantwortlich ist. Dabei werden die folgenden Abkürzungen verwendet:

EntWän - Entfernen unbelasteter Wände,
AbsWän - Abstützen sich schnell deformierender Wände,
AusEne - Ausgleichen der Energiedichte,
DefZug - Ausnutzen des Deformationsraums Zug,
DefDru - Ausnutzen des Deformationsraums Druck,
EntKam - Entfernen kleiner Kammern.

Alle Heuristiken zur Topologieänderung sind während der Optimierung des Schwellerausschnitts mindestens einmal aktiv und haben durch eine Topologieänderung einen neuen konkurrierenden Entwurf erzeugt. Allerdings gehört der neue Entwurf nicht zwingend zu den besten drei konkurrierenden Entwürfen der jeweiligen Iteration und daher sind in Abbildung 6-5 keine Entwürfe dargestellt, welche auf eine Anwendung der Heuristiken *Entfernen unbelasteter Wände* und *Entfernen kleiner Kammern* zurückzuführen sind.
Anhand der Graphen des finalen Entwurfs und des besten Entwurfs der zweiten Iteration wird deutlich, dass in der Formoptimierung und Dimensionierung in Iteration 3b nur eine

geringfügige Veränderung der Struktur stattgefunden hat. Die maximale Veränderung der Koordinaten eines *LINK-Knotens* beträgt hier lediglich 0,76 mm.

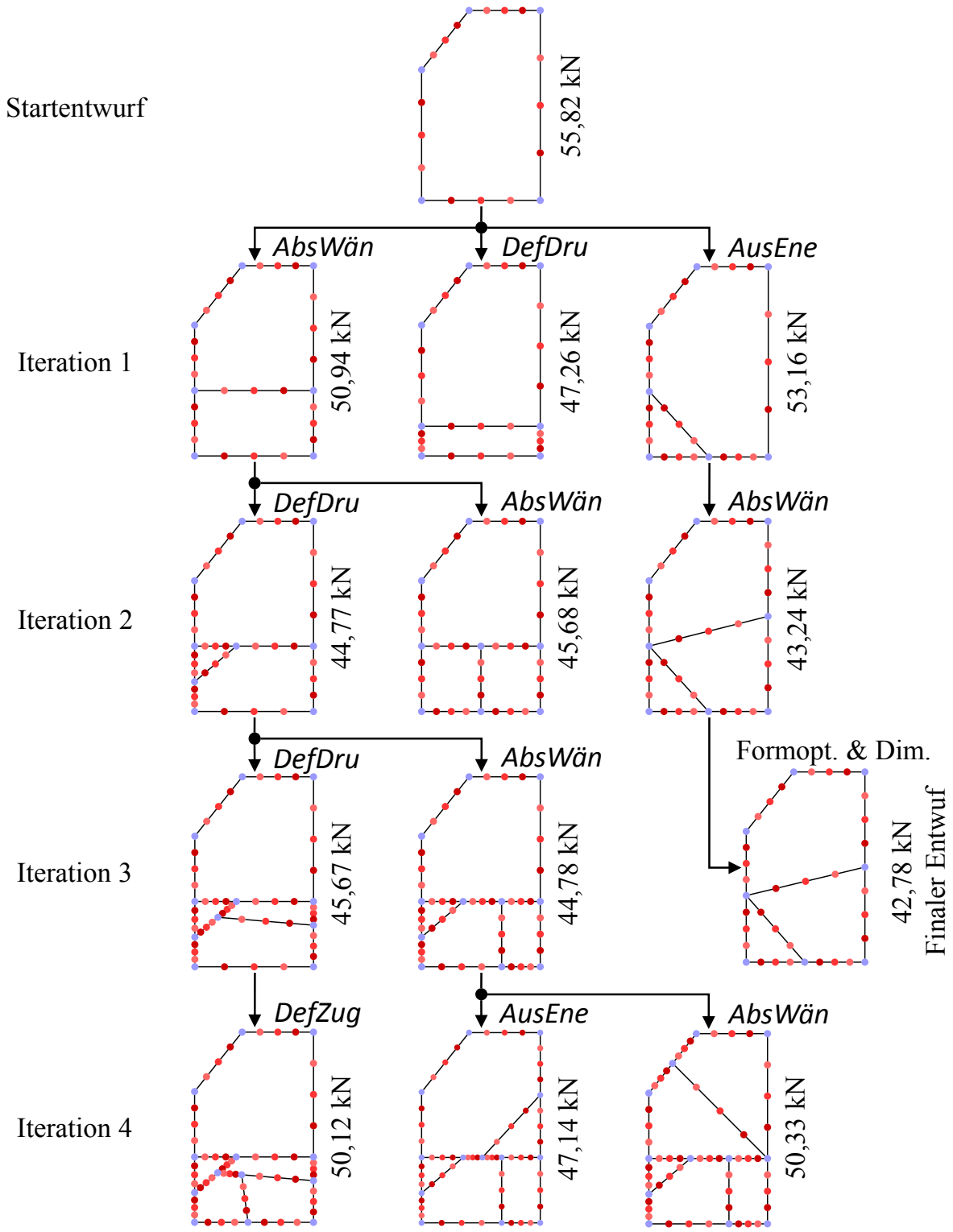
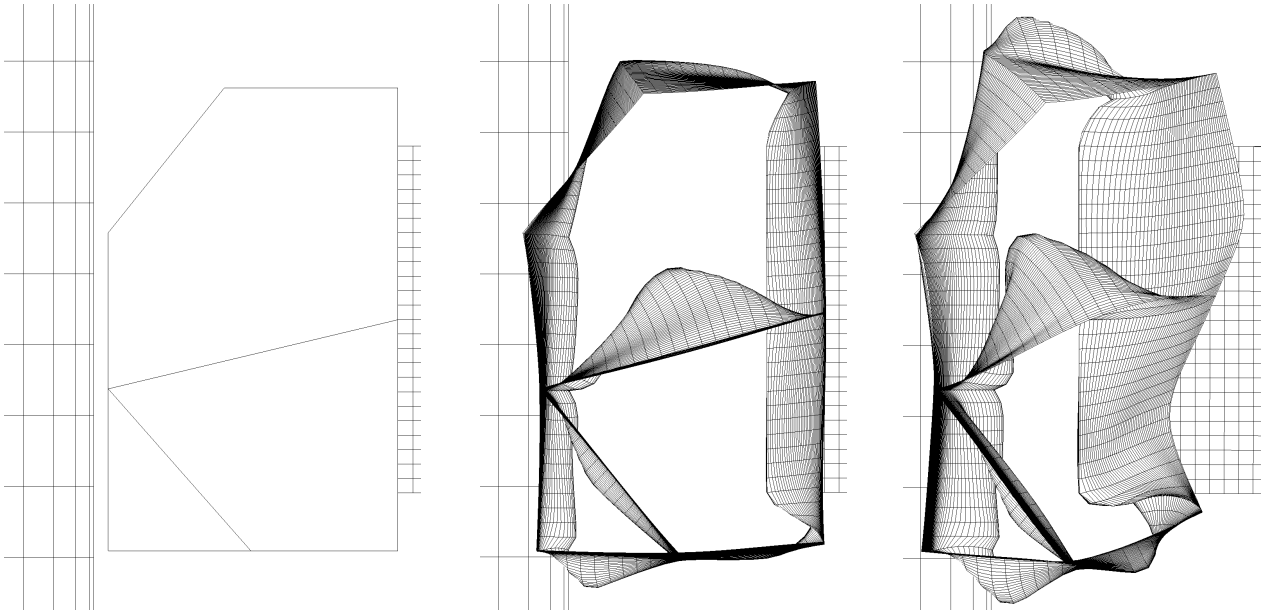


Abbildung 6-5: Anwendungsbeispiel 1a – Entwicklung vom Startentwurf zum finalen Entwurf

Abbildung 6-6 veranschaulicht das Deformationsverhalten des finalen Entwurfs im Lastfall Pfahlaufprall. Die Betrachtungsebene ist die yz-Ebene und die maximale Deformation tritt bei 17,80 ms auf. Der Sitzquerträger und der Pfahl sind nur teilweise in der Abbildung dargestellt. Der finale Entwurf weist einen effizienten Mechanismus zur Energieabsorption aus zwei diagonal aufeinander zulaufenden und im Inneren des Profilquerschnitts liegenden Wänden auf. Der größte Teil der Energie wird durch die sich in der Mitte des Profilquerschnitts befindende, stark beulende Wand aufgenommen, indem der Sitzquerträger in diese beulende Wand treibt. Die zweite innere Wand ist mit der untersten Wand des Profilquerschnitts verbunden. Hier wirkt sie als Verstärkung und verhindert ein übermäßiges Beulen der untersten Wand.



t = 0 ms t = 5 ms t = 17,80 ms

Abbildung 6-6: Anwendungsbeispiel 1a – Deformationsverhalten des finalen Entwurfs im Lastfall Pfahlaufprall

Ein Vergleich der Reaktionskräfte an der starren, schiebenden Wand zwischen dem Startentwurf und dem finalen Entwurf ist in Abbildung 6-7 zu finden. Der Kraft-Weg-Verlauf des Startentwurfs weist deutlich ausgeprägte Minima und Maxima mit unterschiedlichen Kraftniveaus auf und ist daher suboptimal. Bei dem finalen Entwurf hingegen steigt die Kraft rasch auf ein Niveau von ca. 43 kN an und dieses Kraftniveau wird dann solange nahezu konstant aufrechterhalten, bis die Entlastung der Struktur einsetzt und die Reaktionskraft an der starren, schiebenden Wand wieder den Wert 0 annimmt.
Das theoretische Optimum dieses Optimierungsproblems F^*, einen ideal plastischen Stoß vorausgesetzt, lässt sich aus der kinetischen Energie U_k in dem Lastfall Pfahlaufprall sowie dem zur Verfügung stehenden Deformationsweg $d_{int,max}$ von 70 mm berechnen und ist als

Rechteckverlauf ebenfalls in Abbildung 6-7 dargestellt. Die kinetische Energie ergibt sich dabei aus der Gesamtmasse m_g des Schwellerausschnitts, des Sitzquerträgerausschnitts und der starren, schiebenden Wand, sowie der initialen Geschwindigkeit v_0 dieser drei Objekte. Die theoretisch optimale Kraft F^* kann berechnet werden als:

$$F^* = \frac{U_k}{d_{int,max}} = \frac{0{,}5 \cdot m_g \cdot {v_0}^2}{d_{int,max}} = \frac{0{,}5 \cdot 87{,}854\ \text{kg} \cdot \left(8{,}0556\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{0{,}07\ \text{m}} = 40722\ \text{N}\,. \tag{6-3}$$

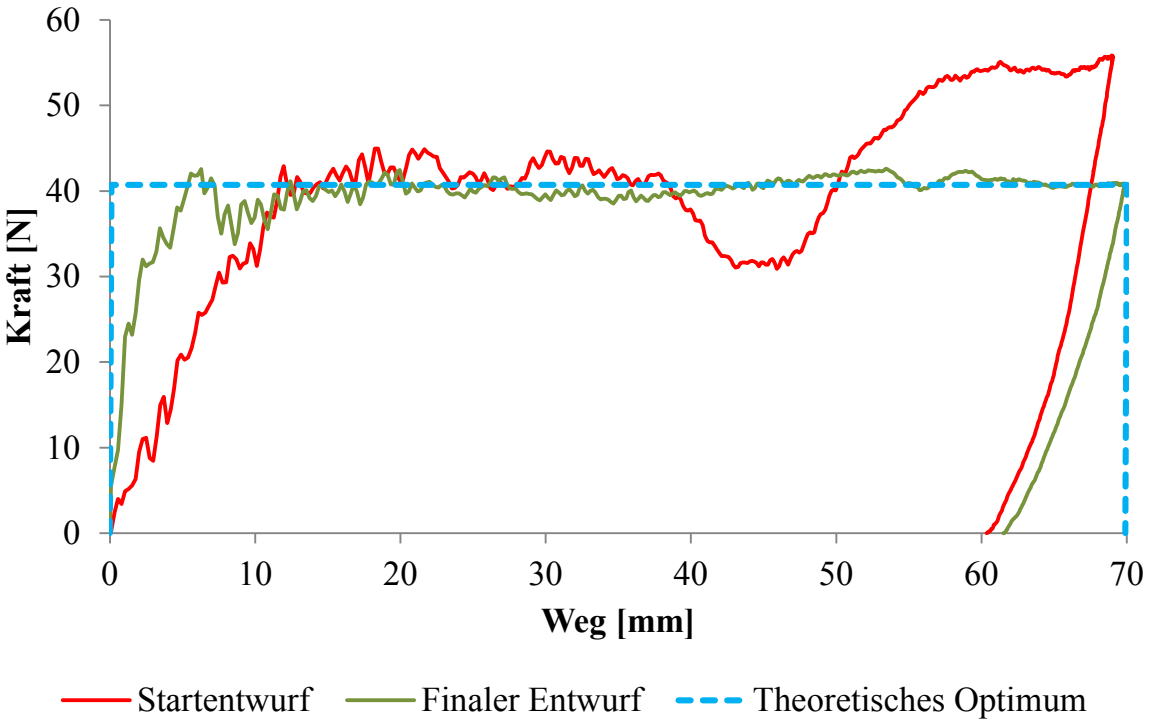


Abbildung 6-7: Anwendungsbeispiel 1a – Kraft-Weg-Verlauf

Der Kraftverlauf des finalen Entwurfs der Optimierung liegt dicht an dem rechteckförmigen Kraftverlauf des theoretischen Optimums. Lediglich in den ersten 5 mm Deformationsweg existiert eine signifikante Abweichung, da bei dem finalen Entwurf der Optimierung das Kraftniveau langsamer steigt. Bei dem Verlauf des theoretischen Optimums tritt keine elastische Rückfederung auf, da hier ein ideal plastischer Stoß vorausgesetzt wird.
Der Kraftverlauf des finalen Entwurfs verdeutlicht, warum in der Formoptimierung und Dimensionierung in Iteration 3b nur noch eine marginale Verbesserung der Zielfunktion gegenüber Iteration 2 erreicht werden kann (43,24 kN auf 42,78 kN). Der Zielfunktionswert des besten Entwurfs der zweiten Iteration befindet sich bereits derart nah an dem theoretischen Optimum, dass das weitere Optimierungspotenzial gering ist. Der beste Entwurf aus Iteration 2 wird bereits nach 460 Funktionsaufrufen erreicht.

Die meisten der in Abschnitt 2.4 im Rahmen der Darstellung des Stands der Technik vorgestellten Optimierungsmethoden zur Topologieoptimierung von crashbelasteten Strukturen, wie z.B. die *HCA-Methode,* verwenden ein Optimalitätskriterium, welches eine gleichmäßige Verteilung der inneren Energiedichte in der Struktur vorsieht.
Der finale Entwurf dieser Optimierung befindet sich nahe an dem theoretischen Optimum und weist dennoch eine vollkommen andere Verteilung der inneren Energiedichte auf (siehe Abbildung 6-8). In Längsrichtung des Schwellers ist die Verteilung besonders ungleichmäßig, da an der Position des Pfahlaufpralls erwartungsgemäß die größte Energieabsorption stattfindet. Aber auch in diesem Bereich ist die Verteilung der inneren Energiedichte inhomogen, da der Großteil der Energie in Eckbereichen sowie an den Stellen größter Krümmung von Beulen und Falten absorbiert wird. Das von vielen Optimierungsmethoden verwendete Optimalitätskriterium einer homogen verteilten inneren Energiedichte würde eine solche Lösung nicht finden.

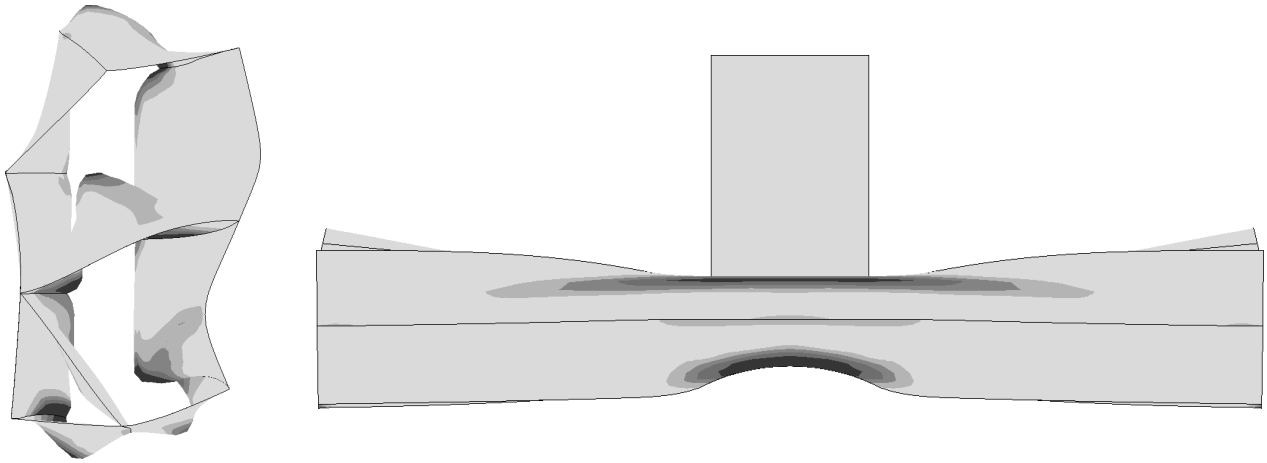


Abbildung 6-8: Verteilung der inneren Energiedichte des finalen Entwurfs zum Zeitpunkt der maximalen Deformation im Lastfall Pfahlaufprall, dunkel: hohe innere Energiedichte, hell: geringe innere Energiedichte

6.1.2 Anwendungsbeispiel 1b: Minimierung der Intrusion

Das Optimierungsziel in diesem Anwendungsbeispiel ist die Minimierung der maximalen Intrusion im Lastfall Pfahlaufprall $d_{int,max}$. Es handelt sich also um eine Steifigkeitsmaximierung in einem Crashlastfall, was eine hohe Energieaufnahme mit einem geringen Deformationsweg erfordert. Das Optimierungsziel ist verglichen mit dem vorherigen Anwendungsbeispiel 1a komplett gegensätzlich. Die Minimierung der Intrusion anstatt der Minimierung von Beschleunigungen und Kräften kann sinnvoll sein, wenn nicht hohe Beschleunigungen und Kräfte ein Problem in der Auslegung darstellen, sondern hohe Intrusionen in die Fahrgastzelle. Dies trifft besonders für einen seitlichen Crash zu, da die Größe der Knautschzone und somit auch der maximale Deformationsweg an der Seite eines Fahrzeugs

wesentlich geringer sind als z.B. an der Vorderseite. In solchen Fällen wird häufig versucht, den sog. „Überlebensraum der Insassen“ zu maximieren.
Die Restriktionen sind identisch mit denen des Anwendungsbeispiels 1a mit Ausnahme der Intrusionsrestriktion, da die Intrusion als Zielfunktion verwendet wird. Die Spezifikationsliste dieser Optimierung ist in Tabelle 6-4 zu finden.

Optimierungsziel:	Minimierung der maximalen Intrusion des Schwellerausschnitts in Lastfall 1 (Pfahlaufprall) $d_{int,max}$
Funktionale Restriktionen:	Masse des Schwellerausschnitts $m \leq 2{,}801$ kg
	Relative Steifigkeit in Lastfall 2 (Biegung) $k_b \geq 0{,}5$
	Relative Steifigkeit in Lastfall 3 (Torsion) $k_t \geq 0{,}5$
Fertigungsrestriktionen:	1,6mm ≤ Wanddicke der Struktur ≤ 3,5 mm
	Verbindungswinkel zwischen zwei Wänden ≥ 15°
	Abstand zwischen zwei Wänden ≥ 10 mm
	Größenverhältnis von größter zu kleinster Kammer ≤ 20

Tabelle 6-4: Anwendungsbeispiel 1b – Spezifikationsliste

Für die Optimierung mit der *GHT* werden weitestgehend Standardeinstellungen verwendet. Wie in dem vorherigen Anwendungsbeispiel 1a wird bei der Generierung der auf Wanddicken basierenden Entwurfsvariablen für die Formoptimierungen und Dimensionierungen der inneren Optimierungsschleifen zwischen außen liegenden und innen liegenden Wänden des Profilquerschnitts unterschieden (siehe Abschnitt 5.3.1).
Bei der Bewertung der von den Heuristiken in der äußeren Optimierungsschleife erzeugten Entwürfe können einzelne Funktionsaufrufe verwendet werden, da davon auszugehen ist, dass die Massenrestriktion für den optimalen Entwurf aktiv sein muss. Eine möglichst hohe Masse trägt auch zu der Einhaltung der Steifigkeitsrestriktionen in den beiden linear statischen Lastfällen Biegung und Torsion bei. In der äußeren Optimierungsschleife sorgt die Heuristik *Skalieren der Wanddicken* (siehe Abschnitt 4.2.2) dafür, dass die Masse der Struktur sich trotz der durchgeführten Modifikationen nicht verändert und damit an der Grenze der Massenrestriktion bleibt.

In Tabelle 6-5 (Seite 112) ist die Optimierungshistorie zusammengefasst. In der ersten Iteration werden lediglich vier Funktionsaufrufe verwendet, da von den sechs Heuristiken zur Topologieänderung nur vier einen Änderungsvorschlag für den Startentwurf haben und daher dementsprechend auch nur vier neue und miteinander konkurrierende Entwürfe erzeugt werden. In den darauffolgenden Iterationen werden 21 – 23 Funktionsaufrufe pro Iteration verwendet, da basierend auf den fünf besten Entwürfen der vorherigen Iteration neue konkurrierende Entwürfe erzeugt werden. Die Anzahl der Funktionsaufrufe schwankt, da nicht

zu jedem Entwurf alle Heuristiken Änderungsvorschläge haben. Verglichen mit dem vorherigen Anwendungsbeispiel 1a werden deutlich weniger Funktionsaufrufe für die Bewertung der neuen konkurrierenden Entwürfe verwendet, da die Bewertung mit einzelnen Funktionsaufrufen vorgenommen werden kann.
In der sechsten Iteration weist keiner der neuen konkurrierenden Entwürfe einen geringeren Zielfunktionswert auf als der beste Entwurf der vorherigen Iteration. Für den besten Entwurf der fünften Iteration wird daher eine Formoptimierung und Dimensionierung mit 3000 Funktionsaufrufen durchgeführt. Bei dem daraus entstehenden Entwurf kann die maximale Intrusion im Lastfall Pfahlaufprall gegenüber dem Startentwurf um 62,5 % von 69,03 mm auf 25,87 mm reduziert werden. Die Wanddicke der inneren Wände des Profilquerschnitts dieses Entwurfs ist signifikant höher als die Wanddicke der äußeren Wände. Durch die in Lastrichtung angeordneten Wände im Inneren kann im Lastfall Pfahlaufprall mehr Steifigkeit generiert werden als durch die außen liegenden Wände des Profilquerschnitts.
Bis zu der Formoptimierung und Dimensionierung in Iteration 6b werden insgesamt nur 104 Funktionsaufrufe verwendet. Der beste Entwurf der fünften Iteration weist bereits eine Verringerung der maximalen Intrusion gegenüber dem Startentwurf von 50,94 % auf und wurde nach lediglich 81 Funktionsaufrufen gefunden.
In der siebten Iteration können die Heuristiken erneut keinen neuen Entwurf erzeugen, der zu einer Verbesserung der Zielfunktion führt und die Optimierung wird beendet, da bereits in Iteration 6 eine Formoptimierung und Dimensionierung durchgeführt wurde.

Abbildung 6-9 zeigt die Entwicklung vom Startentwurf zum finalen Entwurf anhand der dazugehörigen Graphen und der verwendeten Heuristiken zur Topologieänderung. Die Entwürfe, welche zum finalen Entwurf führen, sind nicht zwingend die besten Entwürfe der jeweiligen Iteration, da andere konkurrierende Entwürfe bessere Zielfunktionswerte aufweisen können. Dies ist hier z.B. in den Iterationen 1 – 4 der Fall. Dabei handelt es sich aber größtenteils um geringfügige Unterschiede. Beispielsweise beträgt die Differenz des Zielfunktionswerts zwischen dem besten Entwurf aus Iteration 1 und dem Entwurf, der zu der Entwicklungslinie des finalen Entwurfs gehört, lediglich 0,58 mm.
In der Formoptimierung und Dimensionierung in Iteration 6b, basierend auf dem besten Entwurf aus Iteration 5, findet eine deutliche Änderung der Form der Struktur statt. Der Hauptlastpfad der Struktur, welcher sich vorher auf der gleichen z-Position befand wie die Unterseite des Sitzquerträgerausschnitts, hat seine Position innerhalb der Struktur verändert. Außerdem hat sich eine Aufnahme in Form des Buchstabens Y an der dem Pfahl zugewandten Seite ausgebildet.

	Werte des besten Entwurfs der Iteration						Funktions-aufrufe
	$d_{int,max}$ [mm]	k_b [%]	k_t [%]	m [kg]	t_a [mm]	t_i [mm]	
Startentwurf	69,03	100	100	2,801	3,50	3,50	-
Iteration 1	47,52	85,74	83,74	2,801	2,91	2,91	4
Iteration 2	39,27	81,48	76,58	2,801	2,66	2,66	14
Iteration 3	37,08	75,47	68,46	2,801	2,31	2,31	21
Iteration 4	35,69	77,04	64,03	2,801	2,16	2,16	22
Iteration 5	33,86	77,11	69,15	2,801	2,20	2,20	20
Iteration 6a	33,94	77,96	64,52	2,801	2,05	2,05	23
Iteration 6b (finaler Entwurf)	25,87	68,41	56,10	2,801	2,13	3,21	3000
Iteration 7	28,27	67,07	53,30	2,801	1,71	2,57	24

Tabelle 6-5: Anwendungsbeispiel 1b – Zusammenfassung der Optimierungshistorie

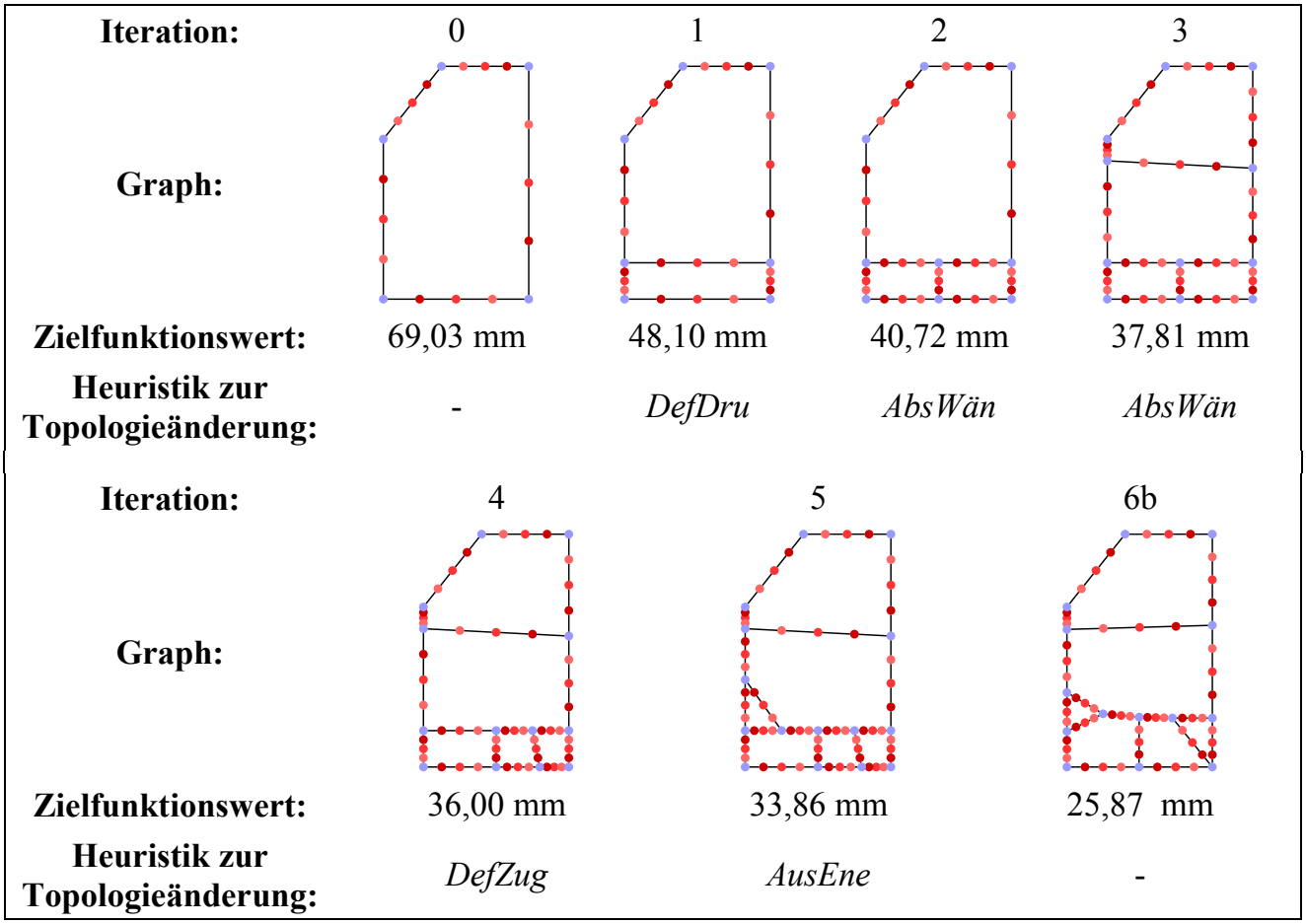


Abbildung 6-9: Anwendungsbeispiel 1b – Entwicklungshistorie vom Startentwurf zum finalen Entwurf

Das Deformationsverhalten des finalen Entwurfs im Lastfall Pfahlaufprall veranschaulicht Abbildung 6-10. Der Hauptlastpfad der Struktur befindet sich im unteren Teil des Profilquerschnitts und besteht aus einer horizontalen Wand, die durch mehrere andere Wände unterteilt und abgestützt wird. Hierdurch wird die Beullänge dieses Lastpfads reduziert und die ertragbare Beulkraft erhöht. Im oberen Teil des Profilquerschnitts der Struktur befindet sich noch eine zweite innere Wand in Lastrichtung, welche allerdings nicht durch andere Wände abgestützt wird und daher wesentlich geringere Kräfte übertragen kann ohne zu beulen. Die Hauptaufgabe dieser Wand in der Struktur ist das Verhindern einer Rotation des Mittelbereichs des Schwellerausschnitts um die x-Achse, welches geschehen könnte, wenn nur der Hauptlastpfad im unteren Teil des Profilquerschnitts der Struktur vorhanden wäre.
In der Nähe des Hauptlastpfads beginnt die Unterseite des Sitzquerträgers aufgrund der hohen lokalen Belastung zu beulen.

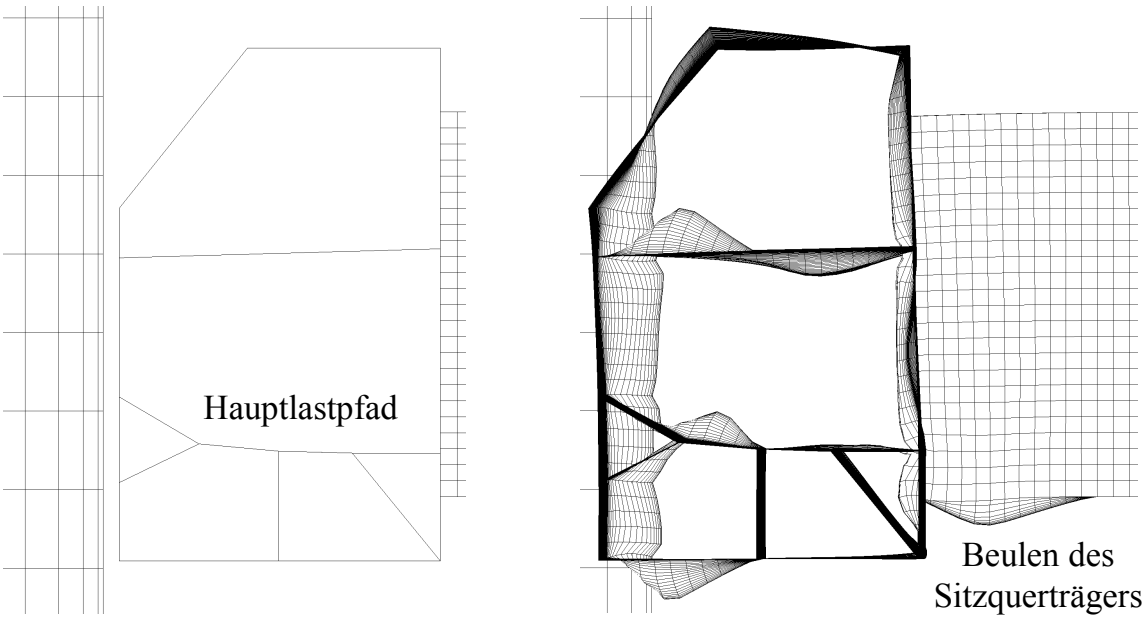


Abbildung 6-10: Anwendungsbeispiel 1b – Deformationsverhalten des finalen Entwurfs im Lastfall Pfahlaufprall

6.1.3 Anwendungsbeispiel 1c: Minimierung der Masse

In dieser Optimierung ist das Ziel die Minimierung der Masse der Struktur m. Dabei muss sowohl eine Kraft- als auch eine Verschiebungsrestriktion eingehalten werden. Der maximal auftretende Betrag der Reaktionskraft an der starren, schiebenden Wand im Lastfall Pfahlaufprall darf nicht größer sein als 47 kN und die maximale Intrusion des Schwellerausschnitts in diesem Lastfall nicht größer als 75 mm. Die Kombination dieser beiden Restriktionen sorgt dafür, dass nur eine geringe Menge von Entwürfen überhaupt gültig ist. Die

Struktur befindet sich im Lastfall Pfahlaufprall zwischen einem starren Pfahl und einer starren Wand und ist damit gezwungen, die gesamte kinetische Energie zu absorbieren. Hierbei wird sowohl der Deformationsweg als auch die Maximalkraft begrenzt, was einen effizienten Mechanismus zur Energieabsorption zur Einhaltung dieser Restriktionen erfordert.
In Anwendungsbeispiel 1a wurde bei der Minimierung von $|f_{max}|$ als Nebeneffekt die Masse gegenüber dem Startentwurf bereits um 16,9 % reduziert. Der finale Entwurf dieser Optimierung befindet sich dicht an der Grenze der Steifigkeitsrestriktionen in den beiden Lastfällen Biegung und Torsion sowie der Fertigungsrestriktion *minimale Wanddicke*. Damit in Anwendungsbeispiel 1c mehr Optimierungspotenzial bezüglich der Massenreduktion vorhanden ist und damit auch ein anderes Optimierungsergebnis entstehen kann, werden die Steifigkeitsrestriktionen nicht verwendet und die Fertigungsrestriktion *minimale Wanddicke* wird auf 0,8 mm reduziert.
Tabelle 6-6 zeigt die Spezifikationsliste dieser Optimierung.

Optimierungsziel:	Minimierung der Masse des Schwellerausschnitts m
Funktionale Restriktionen:	Maximaler Betrag der Reaktionskraft an der starren, schiebenden Wand in Lastfall 1 (Pfahlaufprall) $\|f_{max}\| \leq 47$ kN
	Maximale Intrusion des Schwellerausschnitts in Lastfall 1 (Pfahlaufprall) $d_{int,max} \leq 75$ mm
Fertigungsrestriktionen:	0,8mm ≤ Wanddicke der Struktur ≤ 3,5 mm
	Verbindungswinkel zwischen zwei Wänden ≥ 15°
	Abstand zwischen zwei Wänden ≥ 10 mm
	Größenverhältnis von größter zu kleinster Kammer ≤ 20

Tabelle 6-6: Anwendungsbeispiel 1c – Spezifikationsliste

Es werden wieder die Standardeinstellungen der *GHT* mit Ausnahme der Bestimmung der auf Wanddicken basierenden Entwurfsvariablen für die innere Optimierungsschleife verwendet. Wie in Anwendungsbeispiel 1a wird bei der Wanddicke zwischen außen und innen liegenden Wänden des Profilquerschnitts der Struktur unterschieden (siehe Abschnitt 5.3.1). Bei der Bewertung der von den Heuristiken in der äußeren Optimierungsschleife erzeugten Entwürfe durch innere Optimierungsschleifen, bestehend aus Dimensionierungen, stehen hierdurch zwei Entwurfsvariablen zur Verfügung. Dies erleichtert eine Anpassung der Entwürfe an die Restriktionen. Da die Bewertung hierdurch allerdings auch rechenintensiver wird, dürfen wie in Anwendungsbeispiel 1a nur drei anstelle von fünf konkurrierenden Entwürfen während der Optimierung von einer Iteration in die nächste übergehen (siehe Abschnitt 5.1).

Die Optimierungshistorie dieser Optimierung fasst Tabelle 6-7 zusammen. Der Startentwurf ist ungültig, da die Kraftrestriktion verletzt wird. Die Erzeugung eines die Restriktionen einhaltenden Referenzentwurfs, basierend auf dem Startentwurf, ist nicht möglich, ohne die Topologie oder die Form der äußeren Kontur der Struktur zu verändern.
In der ersten Iteration werden, basierend auf dem Startentwurf, vier neue konkurrierende Entwürfe durch die Heuristiken erzeugt. Nach der Durchführung von Dimensionierungen zur Bewertung der neuen Entwürfe sind nur 2 der 4 konkurrierenden Entwürfe gültig. In Iteration 2 tritt ein ähnlicher Effekt auf und nur 5 der 11 konkurrierenden Entwürfe dieser Iteration verletzen nicht die Restriktionen. Dies verdeutlicht die Schwierigkeit, sowohl die Kraftrestriktion als auch die Intrusionsrestriktion zu erfüllen.
In der dritten Iteration können die Heuristiken keinen Entwurf mehr erzeugen, welcher zu einer Verringerung der Zielfunktion führt und daher wird für den besten Entwurf aus der zweiten Iteration eine Formoptimierung und Dimensionierung durchgeführt. Der daraus entstehende Entwurf weist eine Masse von 1,467 kg auf, was einer Verbesserung gegenüber dem Startentwurf (Masse von 2,801 kg) von 47,6 % entspricht. Dieser Entwurf wird nach 2407 Funktionsaufrufen erreicht. Die Wanddicke der inneren Wände des Profilquerschnitts t_i ist um den Faktor 2,6 höher als die Wanddicke der außen liegenden Wände t_a, da durch die innen liegenden Wände mehr Steifigkeit generiert werden kann.
In der zweiten Iteration, nach bereits 449 Funktionsaufrufen, wird ein Entwurf gefunden, der eine Verringerung der Masse gegenüber dem Startentwurf von 44,7 % aufweist. Die in der Formoptimierung und Dimensionierung in Iteration 3b erreichte Verbesserung ist also eher gering.
Alle durch die Heuristiken erzeugten, neuen Entwürfe der vierten Iteration weisen einen höheren Zielfunktionswert als der beste Entwurf der dritten Iteration auf. Da bereits in Iteration 3 eine Formoptimierung und Dimensionierung durchgeführt wurde, wird die Optimierung daher an dieser Stelle beendet.

Die Entwicklungshistorie vom Startentwurf hin zu dem finalen Entwurf der Optimierung anhand der dazugehörigen Graphen zeigt Abbildung 6-11. In der Formoptimierung und Dimensionierung in Iteration 3b findet neben einer deutlichen Veränderung der Wanddicken auch eine Modifikation der Form der Struktur statt. Die vertikale Wand im Inneren des Profilquerschnitts der Struktur wird schräg gestellt, wodurch der unterste Bereich des Profilquerschnitts in zwei ungleich lange Wände unterteilt wird.

	Werte des besten Entwurfs der Iteration					Funktions-aufrufe
	m [kg]	$\lvert f_{max} \rvert$ [kN]	$d_{int,max}$ [mm]	t_a [mm]	t_i [mm]	
Startentwurf	2,801	55,82	69,03	3,50	3,50	-
Iteration 1	2,274	45,69	74,93	2,43	2,02	139
Iteration 2	1,550	44,81	74,99	1,04	2,86	310
Iteration 3a	1,625	45,88	74,59	1,18	2,39	558
Iteration 3b (finaler Entwurf)	1,467	45,61	74,80	1,01	2,61	1400
Iteration 4	1,522	45,17	74,30	1,05	3,32	429

Tabelle 6-7: Anwendungsbeispiel 1c – Zusammenfassung der Optimierungshistorie

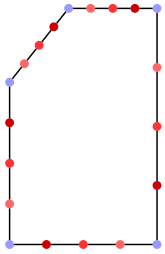
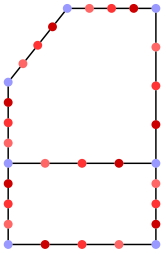
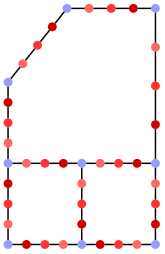
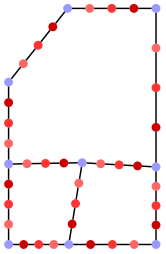
Iteration:	0	1	2	3b
Graph:				
Zielfunktionswert:	2,801 kg	2,401 kg	1,550 kg	1,467 kg
Heuristik zur Topologieänderung:	-	*AbsWän*	*AbsWän*	-

Abbildung 6-11: Anwendungsbeispiel 1c – Entwicklungshistorie vom Startentwurf zum finalen Entwurf

Abbildung 6-12 zeigt das Deformationsverhalten des finalen Entwurfs zu unterschiedlichen Zeitpunkten. Die maximale Deformation des Schwellerausschnitts tritt bei 18,4 ms auf.
Es kommt zu starken Deformationen der Struktur, da diese trotz der geringen Masse die gesamte kinetische Energie des Aufpralls absorbieren muss. Der Großteil der Energieabsorption findet in den horizontalen inneren Wänden des Profilquerschnitts statt. Der Sitzquerträger wölbt sich um diesen Hauptlastpfad herum, wodurch ebenfalls eine große Menge an Energie absorbiert werden kann. Der Hauptlastpfad wird durch eine vertikale Verstärkungswand abgestützt, um ein globales Ausbeulen zu verhindern.

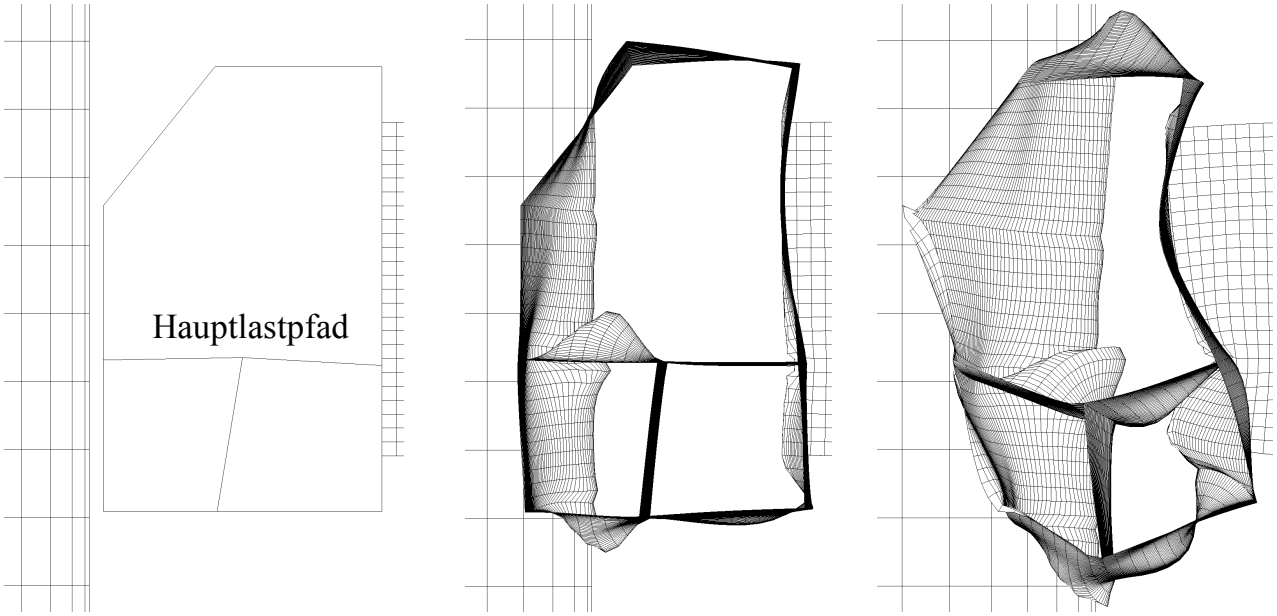
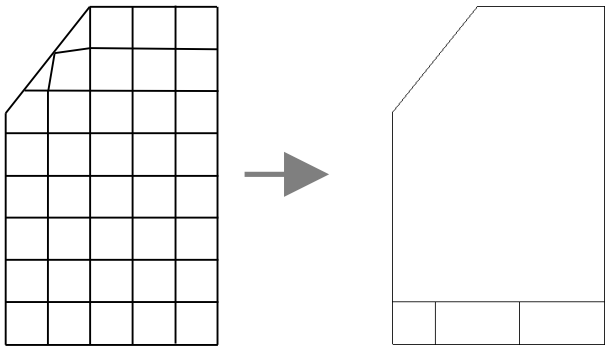


Abbildung 6-12: Anwendungsbeispiel 1c – Deformationsverhalten des finalen Entwurfs im Lastfall Pfahlaufprall

Hunkeler [2013] hat in seiner Dissertation ebenfalls dieses zuerst von Ortmann und Schumacher [2012] veröffentlichte Crashmodell verwendet. Mit seiner an die *HCA-Methode* angelehnten und speziell für dünnwandige Profilstrukturen angepassten *HCATWS-Methode* (siehe Abschnitt 2.4.2) hat er ein ähnliches Optimierungsproblem, wie in diesem Abschnitt vorgestellt, bearbeitet. Als Kraftrestriktion wird jedoch 48 kN anstelle der 47 kN verwendet, die minimale Wanddicke beträgt 0,4 mm anstatt 0,8 mm und es werden keine Fertigungsrestriktionen berücksichtigt.
Zwei sich in der Diskretisierung des Bauraums unterscheidende Optimierungsergebnisse der *HCATWS-Methode* sind in Abbildung 6-13 dargestellt.

Ein Vergleich zwischen den Optimierungsergebnissen der *HCATWS-Methode* und der *GHT* findet sich in Tabelle 6-8. Der finale Entwurf der *GHT* weist eine um 16,3 % geringere Masse auf als das Ergebnis der *HCATWS-Methode* unter Verwendung von Rechteckzellen und eine um 24,3 % geringere Masse als das Ergebnis der *HCATWS-Methode* unter Verwendung von Dreieckzellen.

Diskretisierung des Bauraums mit Rechteckzellen



Diskretisierung des Bauraums mit Dreieckszellen

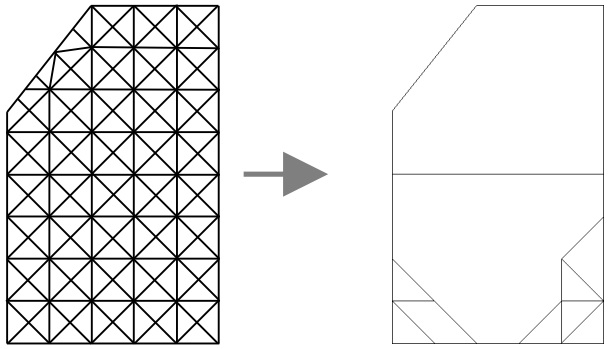


Abbildung 6-13: Optimierungsergebnisse mit der HCATWS-Methode, modifiziert aus [Hunkeler 2013]

	m [kg]	$\lvert f_{max} \rvert$ [kN]	$d_{int,max}$ [mm]
Startentwurf	2,801	55,82	69,03
GHT	1,477	45,61	74,80
***HCATWS* mit Rechteckzellen**	1,764	45,2	74,5
***HCATWS* mit Dreieckzellen**	1,951	46,3	71,4

Tabelle 6-8: Anwendungsbeispiel 1c – Vergleich der Optimierungsergebnisse zwischen der GHT und HCATWS-Methode

6.2 Anwendungsbeispiel 2: Rahmenstruktur

Die zu optimierende Struktur ist ein 150 mm breiter, 100 mm hoher und 5 mm tiefer Aluminiumrahmen. Alle Abmessungen beziehen sich hierbei auf die Mittelfläche des Rahmens. In einem akademischen Lastfall trifft eine Stahlkugel mit einem Radius von 15 mm und einer Geschwindigkeit von 36 km/h auf die Struktur. Eine Seite des Aluminiumrahmens ist hierbei eingespannt. Den Aufbau dieses Lastfalls zeigt Abbildung 6-14. Der Startentwurf weist eine Wanddicke von 3 mm auf.

Für die durchzuführenden Crashsimulationen wird der Rahmen mit *reduziert vollintegrierten Schalenelementen*, welche eine Elementkantenlänge von 2,5 mm aufweisen, vernetzt.

Die Kugel wird mit *Tetraeder-Volumenelementen* diskretisiert und ist ein Starrkörper.

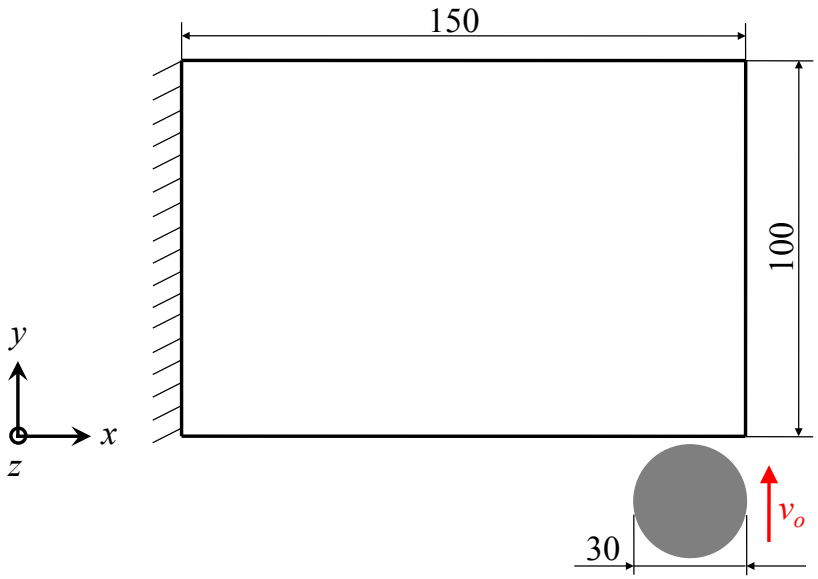
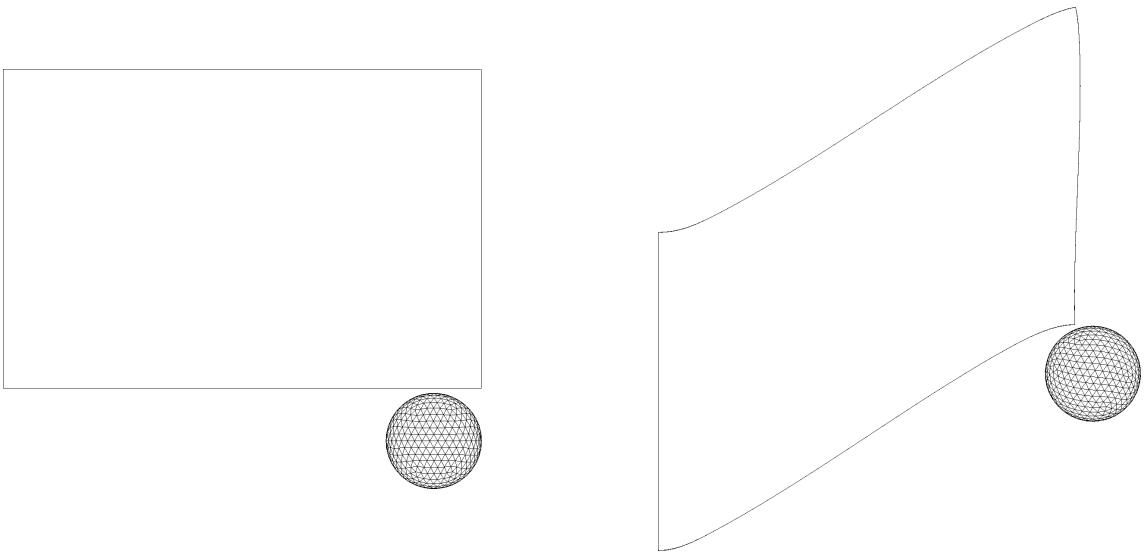


Abbildung 6-14: Anwendungsbeispiel 2 – Aufbau des Lastfalls

Abbildung 6-15 zeigt das Deformationsverhalten des Startentwurfs. Die maximale Intrusion des Rahmens durch die Kugel wird bei 14,1 ms erreicht. Der Rahmen wird überwiegend auf Biegung beansprucht und setzt der Intrusion durch die Kugel wenig Widerstand entgegen.



t = 0 ms t = 14,1 ms

Abbildung 6-15: Anwendungsbeispiel 2 – Deformationsverhalten des Startentwurfs

Als Fertigungsrestriktionen (siehe Abschnitt 3.3) werden eine minimale Wanddicke von 1 mm, eine maximale Wanddicke von 10 mm, ein minimaler Verbindungswinkel zwischen zwei Wänden von 15°, ein Mindestabstand zwischen den Wänden von 10 mm und ein maximales Größenverhältnis von der größten zur kleinsten Kammer des Profilquerschnitts von 20 verwendet.

Die Bauraumgrenzen des Profilquerschnitts sind ein Rechteck von der Größe des Rahmens, wobei die eingespannte Wand und die Wand, in welche die Kugel einschlägt, zu den Bauraumgrenzen gehören. Daher darf an diesen Seiten die äußere Kontur des Rahmens während der Optimierung nicht verändert werden.

6.2.1 Anwendungsbeispiel 2a: Minimierung der Verschiebung

Das Ziel dieser Optimierung ist die Verbesserung des Widerstands des Aluminiumrahmens gegen die Intrusion durch die Kugel. Als Zielfunktion wird daher die maximale Verschiebung der Kugel in y-Richtung $d_{y,max}$ verwendet. Als Restriktion dient die Masse des Rahmens m, diese darf die 20,25 g des Startentwurfs nicht überschreiten. Die Spezifikationsliste dieser Optimierung zeigt Tabelle 6-9.

Optimierungsziel:	Minimierung der maximalen Verschiebung der Kugel in y-Richtung $d_{y,max}$
Funktionale Restriktionen:	Masse des Rahmens $m \leq 20{,}25$ g
Fertigungsrestriktionen:	1 mm ≤ Wanddicke der Struktur ≤ 10 mm
	Verbindungswinkel zwischen zwei Wänden ≥ 15°
	Abstand zwischen zwei Wänden ≥ 10 mm
	Größenverhältnis von größter zu kleinster Kammer ≤ 20

Tabelle 6-9: Anwendungsbeispiel 2a – Spezifikationsliste

Für die Optimierung mit der *GHT* werden Standardeinstellungen verwendet, außer bei der Bestimmung der auf Wanddicken basierenden Entwurfsvariablen (siehe Abschnitt 5.3.1) für die Formoptimierungen und Dimensionierungen der inneren Optimierungsschleifen. Hier wird für jede Wand eine einzelne Wanddicke verwendet, um die Veränderung von Wanddicken lokal um die Einschlagstelle der Kugel im Vergleich zum Rest der Struktur zu ermöglichen.
Für die Bewertung der von den Heuristiken in der äußeren Optimierungsschleife erzeugten Entwürfe können wie in Anwendungsbeispiel 1b einzelne Funktionsaufrufe verwendet werden, da bei dem vorliegenden Optimierungsproblem davon auszugehen ist, dass die Massen-

restriktion für den optimalen Entwurf aktiv sein muss. In der äußeren Optimierungsschleife sorgt die Heuristik *Skalieren der Wanddicken* (siehe Abschnitt 4.2.2) dafür, dass die Masse der Struktur sich trotz der durchgeführten Modifikationen nicht verändert und damit an der Grenze der Massenrestriktion liegt.
Die Optimierung startet direkt mit einer inneren Optimierungsschleife, bestehend aus Formoptimierung und Dimensionierung der Struktur, und nicht mit Topologieänderungen durch Heuristiken, um das in der Topologieklasse des Startentwurfs bereits vorhandene Optimierungspotenzial auszunutzen.

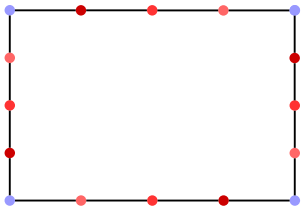
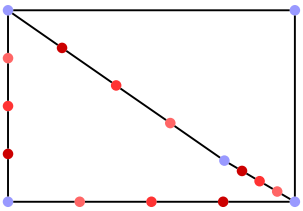
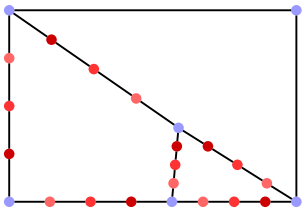
Die Optimierungshistorie ist in Tabelle 6-10 zusammengefasst und zeigt die Werte des jeweils besten Entwurfs der einzelnen Iterationen und die Anzahl der verwendeten Funktionsaufrufe pro Iteration.
In der reinen Formoptimierung und Dimensionierung in der ersten Iteration ist bereits eine Verbesserung der Zielfunktion $d_{y,max}$ gegenüber dem Startentwurf von 87,8 % erreicht worden. Dies zeigt, dass die Form der äußeren Kontur der Struktur sich stark auf den Widerstand gegen eine Intrusion durch die Kugel auswirkt, da in dieser Iteration die Struktur im Inneren noch keine Wände aufweist.
In den darauffolgenden Iterationen können die Heuristiken eine sukzessive Verbesserung der Struktur erreichen, wobei nur eine geringe Anzahl von Funktionsaufrufen verwendet wird, da die Bewertung der von den Heuristiken erzeugten Entwürfe mit einzelnen Funktionsaufrufen geschehen kann.
In der sechsten Iteration weisen alle neuen, von den Heuristiken erzeugten Entwürfe einen höheren Zielfunktionswert als der beste Entwurf der fünften Iteration auf und daher wird für diesen eine Formoptimierung und Dimensionierung mit 3000 Funktionsaufrufen durchgeführt. Der hierdurch erzeugte Entwurf weist eine Verringerung von $d_{y,max}$ gegenüber dem Startentwurf um 95,8 % von 72,19 mm auf 3,02 mm auf. Die Wanddicken der einzelnen Wände dieses Entwurfs sind dabei stark unterschiedlich. Die eingespannten Wände der Struktur weisen eine Wanddicke von 1 mm auf, was dem durch die Fertigungsrestriktionen festgelegten unteren Grenzwert entspricht. Dies ist plausibel, da diese Wände keinerlei mechanischer Belastung unterliegen und daher das dort verwendete Material an anderen Stellen der Struktur sinnvoller verwendet werden kann. Die Wand, in welche die Kugel direkt einschlägt, weist eine Wanddicke von 5,05 mm auf, um die lokale Deformation dieser hochbelasteten Wand zu verringern.
In der siebten Iteration können die Heuristiken erneut keinen neuen Entwurf erzeugen, der zu einer Verbesserung der Zielfunktion führt und da in Iteration 6 bereits eine Formoptimierung und Dimensionierung stattgefunden hat, wird die Optimierung beendet.

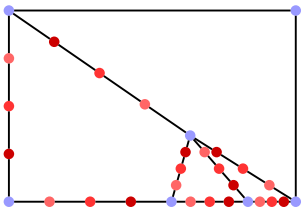
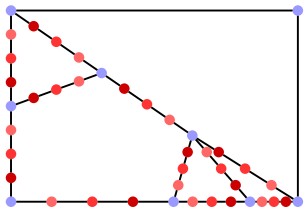
	Werte des besten Entwurfs der Iteration			Funktionsaufrufe
	$d_{y,max}$ [mm]	m [g]	t [mm]	
Startentwurf	72,19	20,25	3,00	-
Iteration 1	8,791	20,25	3,49	120
Iteration 2	6,949	20,25	3,28	4
Iteration 3	6,320	20,25	3,05	21
Iteration 4	5,880	20,25	2,57	28
Iteration 5	5,478	20,25	2,35	26
Iteration 6a	5,748	20,25	2,30	27
Iteration 6b (finaler Entwurf)	3,020	20,25	1,00 – 5,05	3000
Iteration 7	3,131	20,25	1,00 – 4,94	25

Tabelle 6-10: Anwendungsbeispiel 2a – Zusammenfassung der Optimierungshistorie

Abbildung 6-16 zeigt die Entwicklungshistorie vom Startentwurf zum finalen Entwurf anhand der Graphen der dazugehörigen Entwürfe. Bis auf Iteration 4 werden alle Änderungen der Topologie bei diesen Entwürfen mit der Heuristik *Ausnutzen des Deformationsraums Druck* (siehe Abschnitt 4.1.4) durchgeführt.
Anhand der Graphen der Iterationen 5 und 6b ist erkennbar, dass in der Formoptimierung und Dimensionierung in Iteration 6b nur eine geringfügige Änderung der Form der Struktur stattfindet. Die Verbesserung der Struktur entsteht hier durch die Anpassung der Wanddicken einzelner Wände, vor allem der eingespannten Seite des Rahmens und der Einschlagstelle der Kugel.

In Abbildung 6-17 (Seite 124) ist das Deformationsverhalten des finalen Entwurfs zu unterschiedlichen Zeitpunkten dargestellt. Die maximale Intrusion der Struktur durch die Kugel tritt bei 0,56 ms auf. Der finale Entwurf der Optimierung ist eine steife Fachwerkstruktur, bei welcher nur eine einzige Wand überhaupt sichtbare plastische Deformation aufweist und der Großteil der Wände primär einer Zug-/Druckbeanspruchung ausgesetzt ist. Knickgefährdete Wände werden hierbei mit anderen Wänden abgestützt, um die Knicklängen zu reduzieren und damit auch die ertragbaren Knicklasten zu erhöhen.

Iteration:	0	1	2
Graph:			
Zielfunktionswert:	72,19 mm	8,791 mm	8,574 mm
Heuristik zur Topologieänderung:	-	-	*DefDru*

Iteration:	3	4
Graph:		
Zielfunktionswert:	7,012 mm	5,920 mm
Heuristik zur Topologieänderung:	*DefDru*	*AusEne*

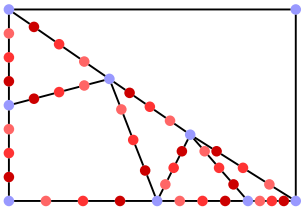
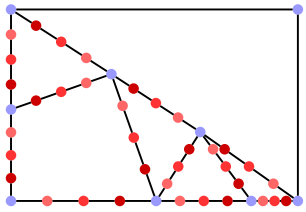
Iteration:	5	6b
Graph:		
Zielfunktionswert:	5,478 mm	3,020 mm
Heuristik zur Topologieänderung:	*DefDru*	-

Abbildung 6-16: Anwendungsbeispiel 2a – Entwicklungshistorie vom Startentwurf zum finalen Entwurf

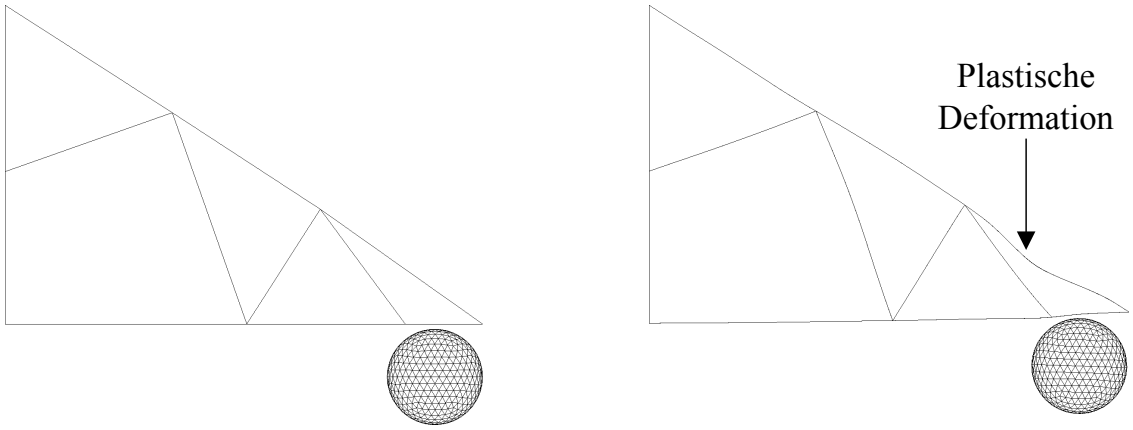


Abbildung 6-17: Anwendungsbeispiel 2a – Deformationsverhalten des finalen Entwurfs

6.2.2 Anwendungsbeispiel 2b: Minimierung der Verschiebung mit fixer äußerer Kontur

In diesem Anwendungsbeispiel sind Zielfunktion, Restriktionen und Einstellungen der *GHT* identisch mit denen in Anwendungsbeispiel 2a. Allerdings ist die äußere Kontur des Rahmens nicht mehr variabel und die rechteckige äußere Form muss während der gesamten Optimierung beibehalten werden, da bei dem Graphen des Startentwurfs nun alle *Graphen-Balkenelemente* zu den Bauraumgrenzen des Profilquerschnitts zählen (siehe Abschnitt 3.2). Diese Variation zu Anwendungsbeispiel 2a soll den Einfluss einer variablen oder fixen äußeren Kontur sowohl auf die Topologie und Form des finalen Entwurfs als auch auf den erreichten Zielfunktionswert untersuchen.

Tabelle 6-11 (Seite 126) fasst die Optimierungshistorie dieser Optimierung zusammen. Im Vergleich zu Anwendungsbeispiel 2a werden deutlich mehr Iterationen benötigt (zehn statt sieben). Außerdem werden in der Optimierung, verglichen mit allen vorherigen Anwendungsbeispielen, mehr innere Optimierungsschleifen, bestehend aus Formoptimierung und Dimensionierung, durchgeführt, da die Heuristiken in insgesamt drei Iterationen keinen neuen Entwurf erzeugen können, der zu einer Verringerung der Zielfunktion führt.
Dies tritt zum ersten Mal in der siebten Iteration auf und es wird eine Formoptimierung und Dimensionierung für den besten Entwurf aus der sechsten Iteration durchgeführt (Iteration 7b). Basierend auf dem Ergebnis dieser Formoptimierung und Dimensionierung, können in der darauffolgenden Iteration 8 die Heuristiken wieder eine Verbesserung der Struktur durch eine Topologieänderung erreichen. In Iteration 9 und 10 scheitern die Heuristiken jedoch abermals daran, den Zielfunktionswert durch eine Topologieänderung zu reduzieren. In Iteration 9b wird daher eine Formoptimierung und Dimensionierung für den besten Ent-

wurf der achten Iteration durchgeführt, was zu dem finalen Entwurf führt, da in Iteration 10 dann das Abbruchkriterium erfüllt und die Optimierung beendet wird.
Durch die Optimierung kann der Wert der Zielfunktion gegenüber dem Startentwurf um 95,4 % von 72,19 mm auf 3,333 mm verbessert werden. Verglichen mit dem Optimierungsergebnis von Anwendungsbeispiel 2a mit variabler äußerer Kontur (Zielfunktionswert 3,02 mm) ist die erreichte Verbesserung geringer, da aufgrund der fixen äußeren Kontur weniger Freiheitsgrade zur Verbesserung der Struktur zur Verfügung stehen. Für das Erreichen des finalen Entwurfs werden ca. doppelt so viele Funktionsaufrufe wie in Anwendungsbeispiel 2a benötigt, da mehr innere Optimierungsschleifen, bestehend aus Formoptimierung und Dimensionierung, durchgeführt werden.
In der Formoptimierung und Dimensionierung in Iteration 7b findet eine besonders deutliche Verbesserung der Zielfunktion statt. Der Grund hierfür ist weniger die Formänderung, als die Anpassung der Wanddicken einzelner Wände an die mechanische Belastung. Durch die fixe äußere Kontur kann sich die Position der äußeren Wände nicht verändern und sie befinden sich daher an für die vorliegende Belastung suboptimalen Positionen. Indem die Wanddicken in diesen Wänden deutlich reduziert werden, kann dieser negative Einfluss verringert werden. Außerdem wird bei der eingespannten Seite des Rahmens die Wanddicke bis zu dem Grenzwert von 1 mm der Fertigungsrestriktion *minimale Wanddicke* reduziert und bei der Wand, in welche die Kugel einschlägt, die Wanddicke erhöht.

Abbildung 6-18 und Abbildung 6-19 zeigen die Entwicklungshistorie vom Startentwurf hin zu dem finalen Entwurf der Optimierung anhand der dazugehörigen Graphen. In den beiden Formoptimierungen und Dimensionierungen in Iteration 7b und 9b finden nur geringfügige Änderungen an der Form der Struktur statt. Die wesentlichen Änderungen sind hier, wie bei der Diskussion der Optimierungshistorie bereits beschrieben, die Anpassungen der Wanddicken.
Obwohl insgesamt neun Iterationen durchgeführt werden, weist der finale Entwurf aus Iteration 9b nur vier innere Wände auf, da mehrmals während der Optimierung Wände durch die Heuristik *Entfernen unbelasteter Wände* (siehe Abschnitt 4.1.1) erfolgreich entfernt werden können.

	Werte des besten Entwurfs der Iteration			Funktionsaufrufe
	$d_{y,max}$ [mm]	m [g]	t [mm]	
Startentwurf	72,19	20,25	3,00	-
Iteration 1	37,59	20,25	2,36	4
Iteration 2	29,39	20,25	2,13	16
Iteration 3	18,81	20,25	2,13	24
Iteration 4	14,78	20,25	1,92	24
Iteration 5	11,89	20,25	1,83	26
Iteration 6	10,23	20,25	1,97	30
Iteration 7a	10,66	20,25	1,81	30
Iteration 7b	3,625	20,25	1,00 – 3,59	3000
Iteration 8	3,522	20,25	1,02 – 3,67	26
Iteration 9a	3,655	20,25	1,00 – 3,54	26
Iteration 9b (finaler Entwurf)	3,333	20,25	1,04 – 4,28	3000
Iteration 10	3,591	20,25	1,08 – 3,63	22

Tabelle 6-11: Anwendungsbeispiel 2b – Zusammenfassung der Optimierungshistorie

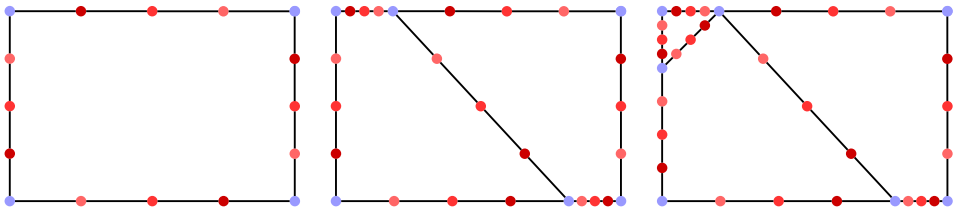
Iteration:	0	1	2
Graph:			
Zielfunktionswert:	72,19 mm	37,59 mm	31,91 mm
Heuristik zur Topologieänderung:	-	*DefDru*	*DefZug*

Abbildung 6-18: Anwendungsbeispiel 2b – Entwicklungshistorie vom Startentwurf zum finalen Entwurf, Iteration 0 – 2

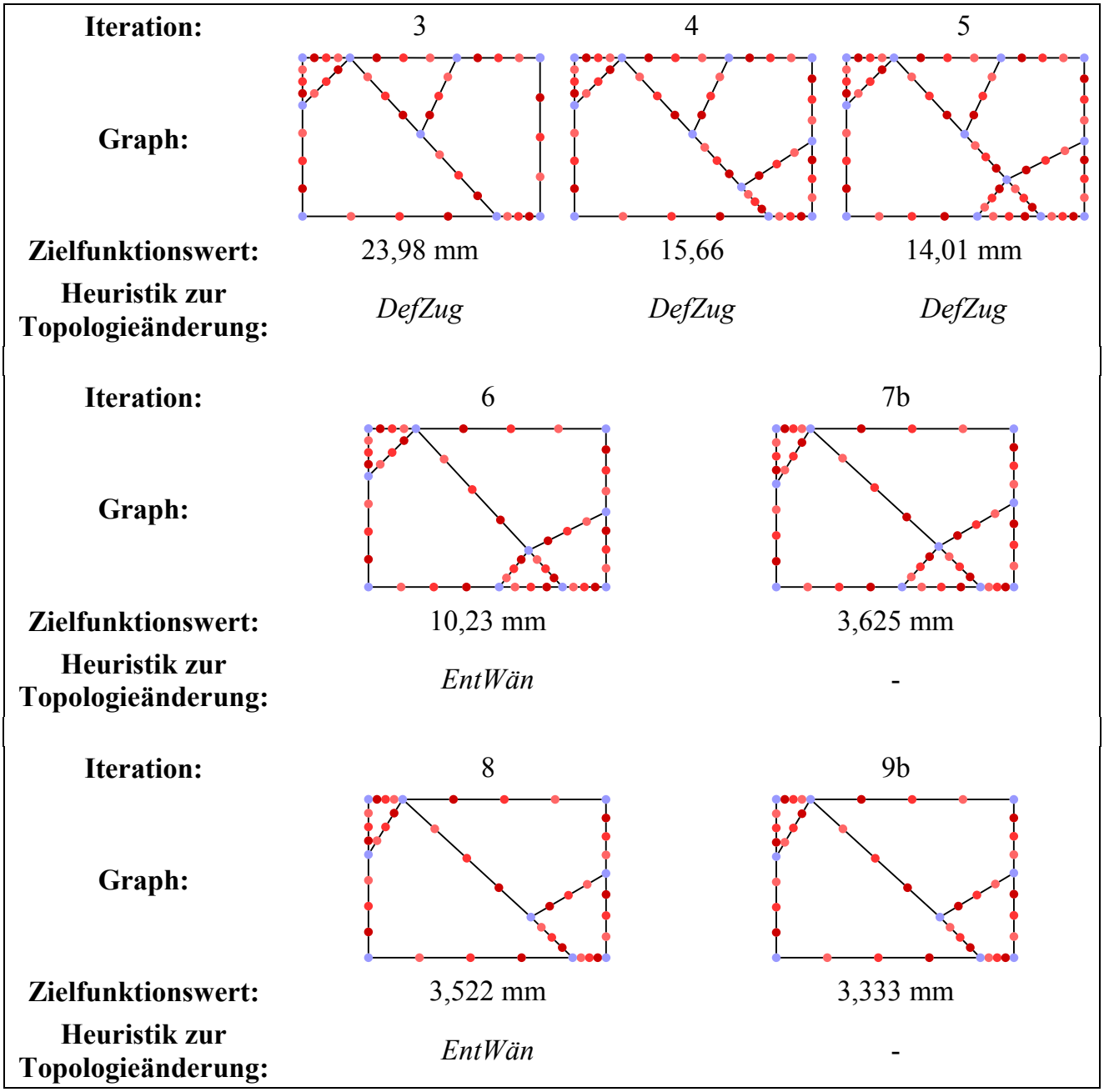
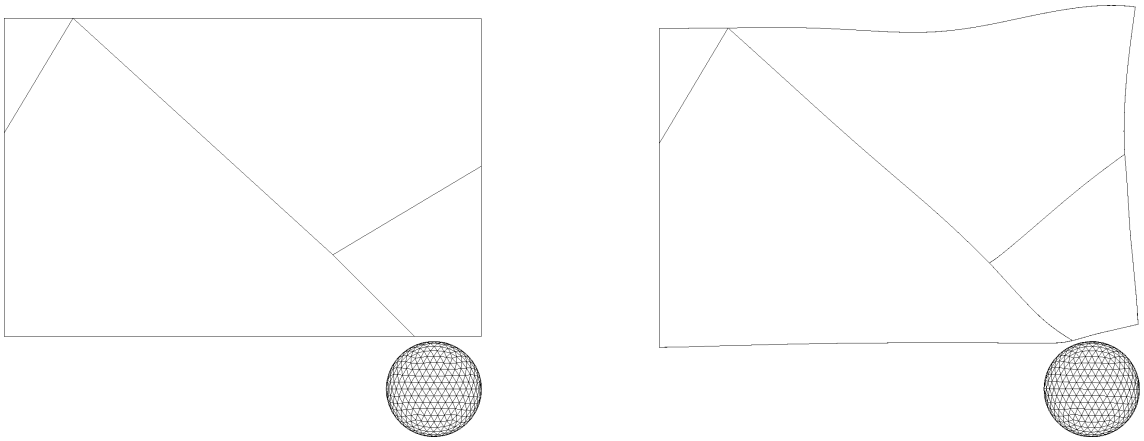


Abbildung 6-19: Anwendungsbeispiel 2b – Entwicklungshistorie vom Startentwurf zum finalen Entwurf, Iteration 3 – 9

In Abbildung 6-20 ist das Deformationsverhalten des finalen Entwurfs zu unterschiedlichen Zeitpunkten dargestellt. Bei 0,626 ms tritt die größte Intrusion des Rahmens durch die Kugel auf. Die hohe Steifigkeit des Rahmens bei dieser Belastung basiert vor allem auf dem diagonalen Lastpfad, welcher von der Einspannung bis zu der Einschlagstelle der Kugel reicht. Dieser erfährt vorwiegend eine Druckbelastung und weist daher auch die höchsten Wanddicken in der Struktur auf. Im Vergleich zu Anwendungsbeispiel 2a fällt vor allem die nachgiebigere äußere Kontur des Rahmens auf, die signifikant größere Deformationen erfährt als der Rest der Struktur.



t = 0 ms t = 0,626 ms

Abbildung 6-20: Anwendungsbeispiel 2b – Deformationsverhalten des finalen Entwurfs

6.2.3 Anwendungsbeispiel 2c: Minimierung der Beschleunigung

Diese Optimierung hat das Ziel, die maximale Beschleunigung, welche die Kugel erfährt, zu minimieren. Als Zielfunktion wird daher die maximale resultierende Beschleunigung der Kugel a_{max} verwendet. Die maximale Verschiebung der Kugel in y-Richtung $d_{y,max}$ wird als Restriktion verwendet und darf den Wert von 50 mm nicht überschreiten. Dieser Wert entspricht der halben Höhe des Rahmens. Der Startentwurf weist hier einen Wert von 72,19 mm auf und verletzt daher diese Restriktion.
Durch die Begrenzung des Deformationswegs und das Ziel der Minimierung der maximalen Beschleunigung der Kugel wird ein möglichst gleichmäßiger Beschleunigung-Zeit- bzw. Beschleunigung-Weg-Verlauf angestrebt, da der Rahmen gezwungen ist, den Großteil der kinetischen Energie der Kugel zu absorbieren, wenn die Kugel in y-Richtung durch den Rahmen gestoppt werden soll.

Für a_{max} wird ein 1000 Hz Filter verwendet, da aufgrund des Einschlags der Kugel mit hoher Geschwindigkeit in den Rahmen hochfrequente Schwingungen sowohl physikalischer Art (z.B. die Spannungswelle) als auch numerischer Art (z.B. Kontaktschwingungen in den Kontaktfedern) auftreten. Bei einer ungefilterten Verwendung der Beschleunigungswerte bestünde die Gefahr, dass die Minimierung der Beschleunigung während der Optimierung ausschließlich oder überwiegend an den Spitzen dieser Schwingungen stattfinden würde.
Die Spezifikationsliste dieser Optimierung zeigt Tabelle 6-12.

Optimierungsziel:	Minimierung der maximalen resultierenden Beschleunigung der Kugel a_{max} (1000 Hz Filter)
Funktionale Restriktionen:	Maximale Verschiebung der Kugel in y-Richtung $d_{y,max} \leq 50$ mm
Fertigungsrestriktionen:	1 mm ≤ Wanddicke der Struktur ≤ 10 mm
	Verbindungswinkel zwischen zwei Wänden ≥ 15°
	Abstand zwischen zwei Wänden ≥ 10 mm
	Größenverhältnis von größter zu kleinster Kammer ≤ 20

Tabelle 6-12: Anwendungsbeispiel 2c – Spezifikationsliste

Die Optimierung mit der *GHT* findet mit Standardeinstellungen statt, mit Ausnahme der Bestimmung der auf Wanddicken basierenden Entwurfsvariablen für die Formoptimierungen und Dimensionierungen der inneren Optimierungsschleifen (siehe Abschnitt 5.3.1).
In diesen wird, wie in den beiden vorherigen Anwendungsbeispielen 2a und 2b, für jede Wand eine einzelne Wanddicke verwendet. Hierdurch wird es der *GHT* ermöglicht, lokal um die Einschlagstelle der Kugel, die Wanddicken im Vergleich zum Rest der Struktur zu verändern.
Dies gilt jedoch nicht für innere Optimierungsschleifen, bestehend aus reinen Dimensionierungen, zur Bewertung der in der äußeren Optimierungsschleife von den Heuristiken erzeugten Entwürfe. Hier wird nur eine einzelne Wanddicke für die gesamte Struktur verwendet, um die Anzahl der notwendigen Funktionsaufrufe in diesen Dimensionierungen zu reduzieren. Die Verwendung von individuellen Wanddicken für jede einzelne Wand würde zu einem zu hohen Berechnungsaufwand führen. Im Gegensatz zu Anwendungsbeispiel 2a und 2b kann aufgrund des komplexeren Optimierungsproblems die Bewertung der in der äußeren Optimierungsschleife von den Heuristiken erzeugten Entwürfe nicht mehr mit einzelnen Funktionsaufrufen geschehen.
Die Optimierung startet direkt mit einer inneren Optimierungsschleife, bestehend aus Formoptimierung und Dimensionierung der Struktur, und nicht mit Topologieänderungen durch Heuristiken, da in der Topologieklasse des Startentwurfs bereits Optimierungspotenzial vorhanden ist.

Tabelle 6-13 fasst die Optimierungshistorie zusammen. Der Startentwurf ist identisch zu denen der vorigen Anwendungsbeispiele 2a und 2b und verletzt hier die Restriktionen, da die Intrusion des Rahmens durch die Kugel zu hoch ist. Für Vergleichszwecke wird daher ein Referenzentwurf erzeugt, welcher eine höhere Wanddicke aufweist und diese Restriktion erfüllt, ansonsten aber mit dem Startentwurf identisch ist.
In der Formoptimierung und Dimensionierung in der ersten Iteration kann verglichen mit dem Referenzentwurf bereits eine Verringerung der Zielfunktion von 4682 m/s² auf 2992

m/s² erreicht werden. Dies entspricht einer Verbesserung von 36,1 %. Wie in Anwendungsbeispiel 2a hat die äußere Kontur des Rahmens starken Einfluss auf die Zielfunktion.
In den nachfolgenden Iterationen kann eine sukzessive Verringerung von a_{max} erreicht werden, wobei die erreichte Verbesserung von Iteration zu Iteration stark unterschiedlich ist. Von Iteration 2 zu 3 beträgt diese 33,4 %, während sie von Iteration 3 zu 4 lediglich 1,6 % beträgt.
In der fünften Iteration können die Heuristiken keine neuen Entwürfe erzeugen, die zu einer Verringerung der Zielfunktion führen. Daher wird für den besten Entwurf aus Iteration 4 eine Formoptimierung und Dimensionierung durchgeführt (Iteration 5b). Der dadurch entstehende Entwurf weist mit 1217 m/s² einen um 74 % geringeren Zielfunktionswert als der Referenzentwurf mit 4682 m/s² auf. Die maximale Verschiebung der Kugel in y-Richtung befindet sich dicht an der durch die Restriktion definierten Grenze. Dies ist plausibel, da für die Minimierung der Beschleunigung der Kugel der zur Verfügung stehende Deformationsraum voll ausgenutzt werden muss. Die Masse dieses Entwurfs hat gegenüber dem Referenzentwurf um 36,9 % abgenommen, da die erforderliche Masse für einen ähnlichen Widerstand gegen die Intrusion des Rahmens durch die Kugel aufgrund der Veränderung der Struktur geringer ist.
In Iteration 6 weisen erneut alle neuen konkurrierenden Entwürfe einen schlechteren Zielfunktionswert als der beste Entwurf der vorherigen Iteration auf. Da bereits in der fünften Iteration eine Formoptimierung und Dimensionierung stattgefunden hat, wird das Abbruchkriterium erfüllt und die Optimierung beendet.

	Werte des besten Entwurfs der Iteration				**Funktionsaufrufe**
	a_{max} **[m/s²]**	$d_{y,max}$ **[mm]**	m **[g]**	t **[mm]**	
Referenzentwurf	4682	49,86	24,97	3,70	-
Startentwurf	3462	72,19	20,25	3,00	-
Iteration 1	2992	43,98	23,71	3,96	240
Iteration 2	2402	49,27	19,14	3,02	88
Iteration 3	1599	49,74	15,33	2,23	405
Iteration 4	1574	48,20	16,34	2,24	379
Iteration 5a	1585	49,88	15,34	2,22	649
Iteration 5b (finaler Entwurf)	1217	49,33	15,76	1,25 – 3,94	3000
Iteration 6	1415	49,48	15,45	2,17	514

Tabelle 6-13: Anwendungsbeispiel 2c – Zusammenfassung der Optimierungshistorie

Die Entwicklungshistorie vom Startentwurf zum finalen Entwurf ist anhand der Graphen der einzelnen Iterationen in Abbildung 6-21 dargestellt. Lediglich in der dritten Iteration ist der Entwurf, der zu der Entwicklungslinie des finalen Entwurfs gehört, nicht auch gleichzeitig der beste Entwurf der Iteration. In allen Entwürfen ist der starke Einfluss der Formoptimierung und Dimensionierung der ersten Iteration zu erkennen. Der dort entstandene Biegemechanismus mit einer dreiecksförmigen Spitze ist in allen Entwürfen sichtbar.
In der Formoptimierung und Dimensionierung in Iteration 5b findet eine deutliche Veränderung der Form und Wanddicken der Struktur statt. Die geringste Wanddicke des Entwurfs beträgt 1,25 mm und tritt im oberen, kaum belasteten Teil des Rahmens nahe der Einspannung auf. Die Wand an der Einschlagstelle der Kugel weist hingegen eine Wanddicke von 1,58 mm auf.

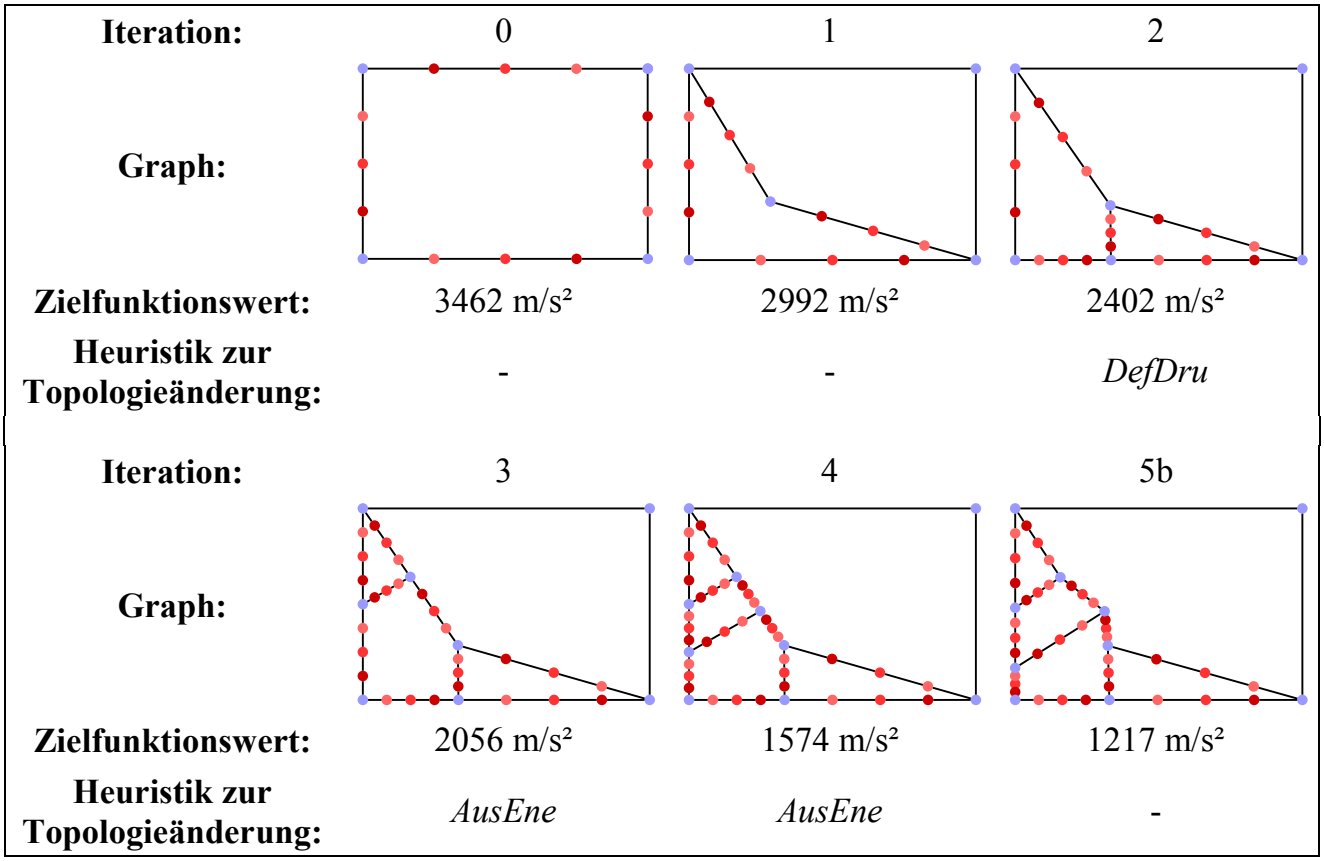
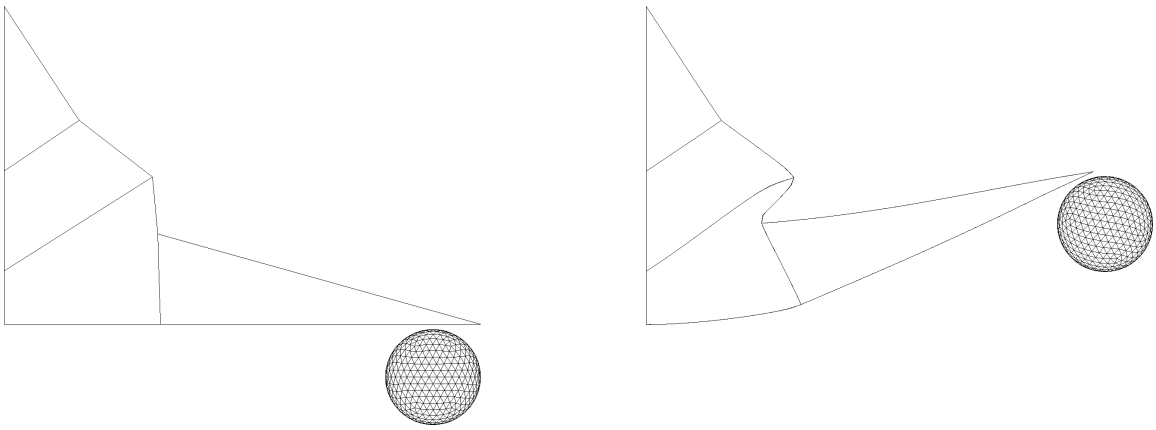


Abbildung 6-21: Anwendungsbeispiel 2c – Entwicklungshistorie vom Startentwurf zum finalen Entwurf

In Abbildung 6-22 ist das Deformationsverhalten des finalen Entwurfs zu unterschiedlichen Zeitpunkten dargestellt. Die maximale Intrusion des Rahmens durch die Kugel tritt bei 11,6 ms auf. Der finale Entwurf weist an der Einschlagstelle der Kugel einen nachgiebigen, dreiecksförmigen Biegemechanismus auf. Der Rest des Rahmens ist so ausgebildet, dass die dreiecksförmige Spitze nachgiebig an den Rest der Struktur angebunden ist. Die Kugel wird durch den Rahmen lediglich in y-Richtung vollständig gestoppt und es findet eine Art Wei-

terleitung der Kugel in x-Richtung statt. Dies führt dazu, dass der Rahmen nicht die gesamte kinetische Energie der Kugel absorbieren muss, sondern lediglich maximal 95,6 %, was sich positiv auf die maximale Beschleunigung der Kugel auswirkt.



t = 0 ms t = 11,6 ms

Abbildung 6-22: Anwendungsbeispiel 2c – Deformationsverhalten des finalen Entwurfs

Der theoretische optimale Wert der Zielfunktion dieser Optimierung a^*, einen ideal plastischen Stoß vorausgesetzt, kann über die optimale Kraft F^* aus der kinetischen Energie der Kugel U_k, der Masse der Kugel m_k sowie dem zur Verfügung stehenden Deformationsweg in y-Richtung $d_{y,max}$ berechnet werden. Die kinetische Energie der Kugel U_k ergibt sich hierbei aus der Masse der Kugel m_k und der initialen Geschwindigkeit der Kugel v_0:

$$a^* = \frac{F^*}{m_k} = \frac{U_k}{m_k \cdot d_{y,max}} = \frac{0{,}5 \cdot m_k \cdot {v_0}^2}{m_k \cdot d_{y,max}} = \frac{0{,}5 \cdot \left(10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{0{,}05\ \mathrm{m}} = 1000 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}. \tag{6-4}$$

Abbildung 6-23 zeigt den Beschleunigung-Weg-Verlauf des Referenzentwurfs und des finalen Entwurfs sowie den Rechteckverlauf des theoretischen Optimums. Im unteren Teil sind die Beschleunigungen ungefiltert dargestellt, im oberen Teil hingegen mit dem auch in der Optimierung verwendeten 1000 Hz Filter.

Der Beschleunigung-Weg-Verlauf des Referenzentwurfs ist dadurch geprägt, dass es in den ersten 27 mm Deformationsweg mehrmals zu Kontaktabbrüchen zwischen der Kugel und dem Rahmen kommt. Hierdurch bleibt ein signifikanter Teil des Deformationswegs, der für eine gleichmäßige Verzögerung der Kugel verwendet werden könnte, ungenutzt. Die Kontaktabbrüche entstehen, weil der Aufprall der Kugel auf den Rahmen ein Stoßphänomen ist und der Rahmen der Intrusion durch die Kugel einen geringen Widerstand entgegensetzt. Dadurch hat der Rahmen direkt nach dem Stoß eine höhere Geschwindigkeit als die Kugel. Hohe Beschleunigungsspitzen kennzeichnen den initialen Aufprall der Kugel auf den Rah-

men sowie die weiteren Aufprallphänomene nach den Kontaktabbrüchen. Die Bereiche der Kontaktabbrüche mit einer Beschleunigung von 0 sind dafür verantwortlich, dass bei Anwendung des 1000 Hz Filters negative Beschleunigungswerte entstehen. Dies ist physikalisch unmöglich, da es sich hierbei um die resultierende Beschleunigung handelt.
Der Beschleunigung-Weg-Verlauf des finalen Entwurfs weist hochfrequente Schwingungen auf und oszilliert um einen Beschleunigungswert von ca. 1000 m/s², was dem Wert des theoretischen Optimums entspricht. Durch die Anwendung des 1000 Hz Filters wird der Verlauf geglättet, weist jedoch immer noch Schwingungen auf. Dennoch ist erkennbar, dass der Beschleunigung-Weg-Verlauf des finalen Entwurfs dem Rechteckverlauf des theoretischen Optimums stark ähnelt.

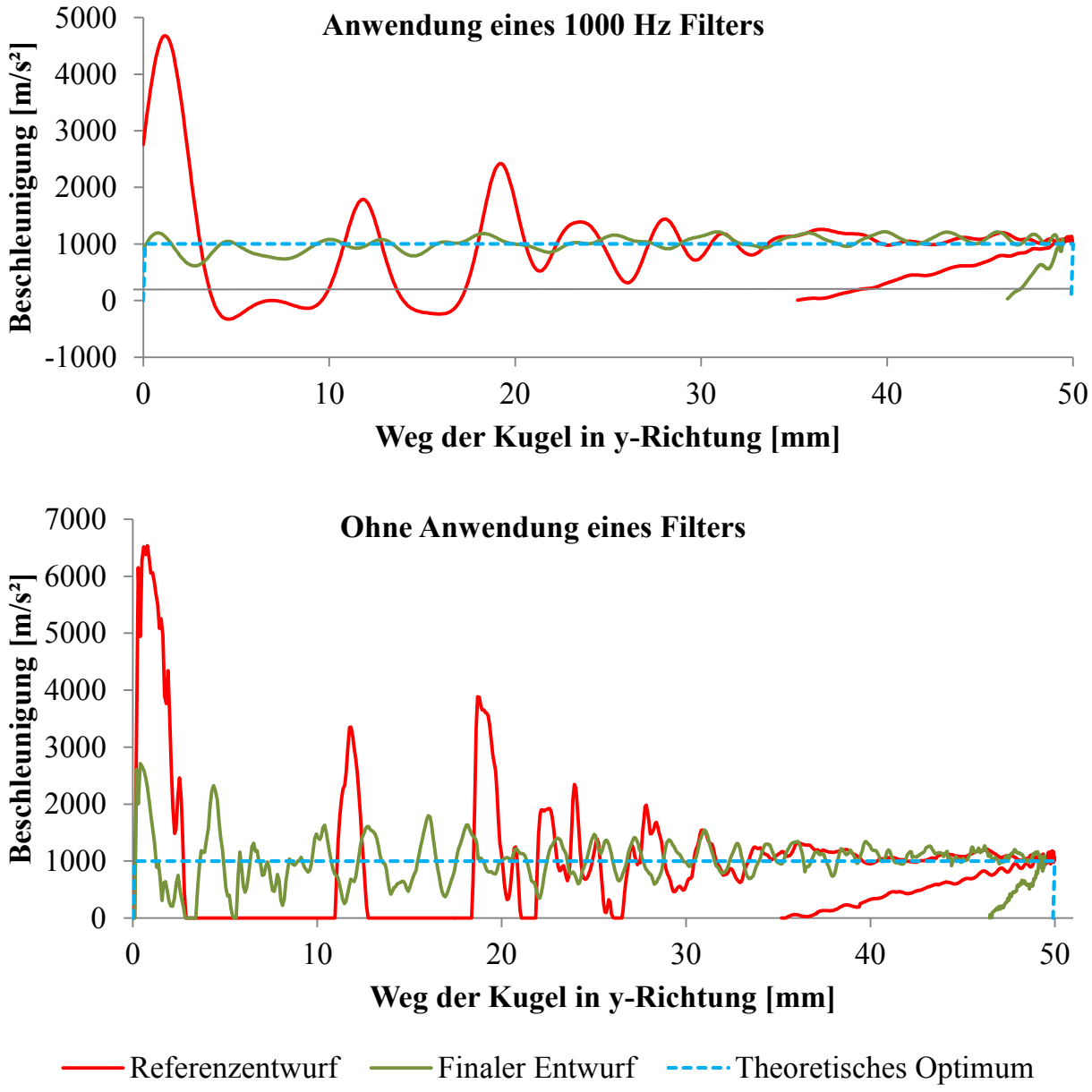


Abbildung 6-23: Anwendungsbeispiel 2c – Beschleunigung-Weg-Verlauf

6.3 Anwendungsbeispiel 3: Schweller in einem Gesamtfahrzeug

Bei diesem Anwendungsbeispiel handelt es sich um die Optimierung eines Fahrzeugschwellers in einem reduzierten Gesamtfahrzeugmodell eines Cabrios. Der Aufbau des Lastfalls ist angelehnt an den *Euro NCAP* Pfahlaufprall (siehe Abschnitt 2.1.2). Das Fahrzeug bewegt sich also mit 29 km/h seitlich gegen einen starren Pfahl. Sowohl der Dummy als auch die Sitzstrukturen sind in dem Analysemodell nicht berücksichtigt. Das Analysemodell wurde im Rahmen des *BMBF-Verbundprojekts Methodische und softwaretechnische Umsetzung der Topologieoptimierung crash-beanspruchter Fahrzeugstrukturen* von dem Projektpartner *Volkswagen Osnabrück GmbH* zur Verfügung gestellt. Abbildung 6-24 zeigt das *FE-Modell* aus der Draufsicht. Das Deformationsverhalten des Fahrzeugs zu unterschiedlichen Zeitpunkten ist in Abbildung 6-25 dargestellt. Da sich der Schwerpunkt des Fahrzeugs aufgrund der Aggregate im Motorraum in x-Richtung vor der Aufprallposition des Pfahles befindet, beginnt das Fahrzeug nach dem Kontakt mit dem Pfahl um die z-Achse zu rotieren.

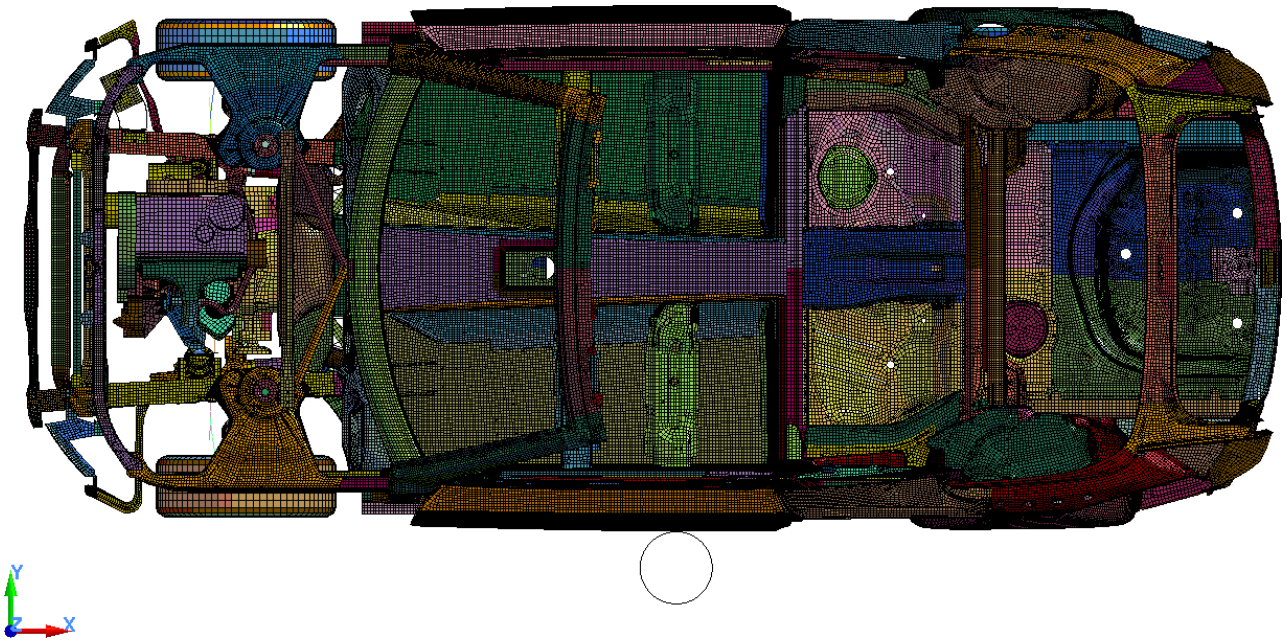
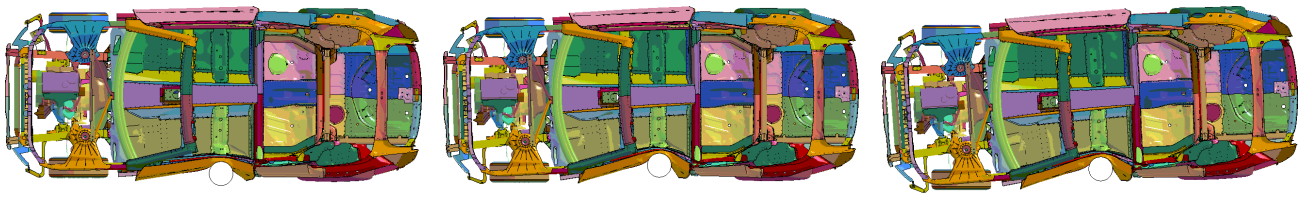


Abbildung 6-24: Anwendungsbeispiel 3 – FE-Modell aus der Draufsicht, mit freundlicher Genehmigung der Volkswagen Osnabrück GmbH

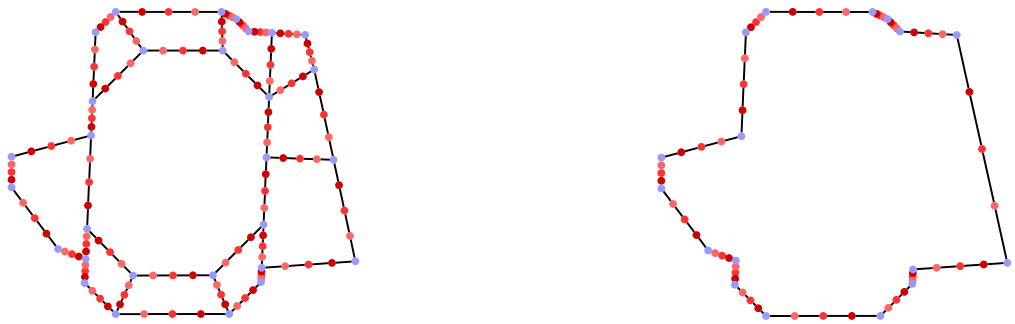


t = 30 ms t = 60 ms t = 90 ms

Abbildung 6-25: Anwendungsbeispiel 3 – Deformationsverhalten des Fahrzeugs, mit freundlicher Genehmigung der Volkswagen Osnabrück GmbH

Bei einem Pfahlaufprall-Lastfall sind zahlreiche Strukturantworten relevant. Diese werden z.B. an den Insassen-Dummys gemessen, wie Kräfte, Momente und Beschleunigungen, um Aussagen über Verletzungswahrscheinlichkeiten für die Insassen treffen zu können (siehe Abschnitt 2.1). Der Pfahlaufprall stellt aber auch für die Karosserie des Fahrzeugs eine enorme Belastung dar. Häufig kommt es bei dieser Beanspruchung zu großen Intrusionen in die Fahrgastzelle, was wiederrum das Verletzungsrisiko der Insassen erhöht oder sogar zu einem Verlust der strukturellen Integrität des Fahrzeugs führen kann. Daher wird in diesem Anwendungsbeispiel der den Insassen zur Verfügung stehende Überlebensraum als maßgebliches Auswertekriterium genutzt. Der Überlebensraum wird hierbei definiert als der minimale Abstand zwischen zwei Punkten des Türinnenblechs und des Tunnels.

Die zu optimierende Struktur innerhalb des Fahrzeugs ist der aus Aluminium bestehende Schweller. Es werden hierbei nicht die in den vorherigen Anwendungsbeispielen verwendeten Materialdaten des Werkstoffs EN AW-6005 T6 benutzt, sondern die im Fahrzeugmodell hinterlegten, um einen Vergleich der Zustände vor und nach der Optimierung zu ermöglichen. Das Materialmodell ist ähnlich wie das des Werkstoffs EN AW-6005 T6, ein signifikanter Unterschied ist jedoch die geringere Fließspannung σ_f von 230 statt 240 MPa. Es berücksichtigt ebenfalls keine Schädigung und der plastische Bereich wird auch mit einem abschnittsweise linearen Zusammenhang zwischen Dehnung und Spannung abgebildet.
Als Startentwurf für die Optimierung wird ein hohler Profilquerschnitt verwendet, dessen äußere Kontur während der Optimierung nicht verändert werden darf, da alle *Graphen-Balkenelemente* des Startentwurfs zu den Bauraumgrenzen des Profilquerschnitts zählen (siehe Abschnitt 3.2). Als Referenzentwurf wird der ursprüngliche Profilquerschnitt des Schwellers verwendet, welcher bereits eine Vielzahl von Kammern in seinem Inneren aufweist. Die Verstärkungswände im Inneren des Schwellers haben dabei eine Wanddicke von 2 mm und die außen liegenden Wände eine Wanddicke von 2,75 mm. Die Graphen des Referenzentwurfs und des Startentwurfs sind in Abbildung 6-26 dargestellt.



Referenzentwurf Startentwurf

Abbildung 6-26: Anwendungsbeispiel 3 – Graphen des Referenzentwurfs und des Startentwurfs

Das Deformationsverhalten des Referenzentwurfs zu unterschiedlichen Zeitpunkten als Schnitt durch das Fahrzeug normal zur x-Achse bei x = 1300 mm zeigt Abbildung 6-27. Dargestellt in der Abbildung sind der Schweller, der Fahrzeugboden und die Türstruktur sowie die Außenseite des Pfahls.
Die Intrusion durch den Pfahl führt zu starken Deformationen der kompletten Türstruktur und des Schwellers. Türinnenblech und Türaußenhaut kommen in Kontakt miteinander und der Seitenaufprallträger in der Tür wird vollständig komprimiert. Bei dem Schweller bleibt der dem Fahrzeug zugewandte, innere Teil weitestgehend intakt, während die andere Seite des Schwellers ebenfalls komplett zusammengedrückt wird. Der Fahrzeugboden erfährt eine Biegebelastung und wölbt sich in Richtung Erdboden aus.

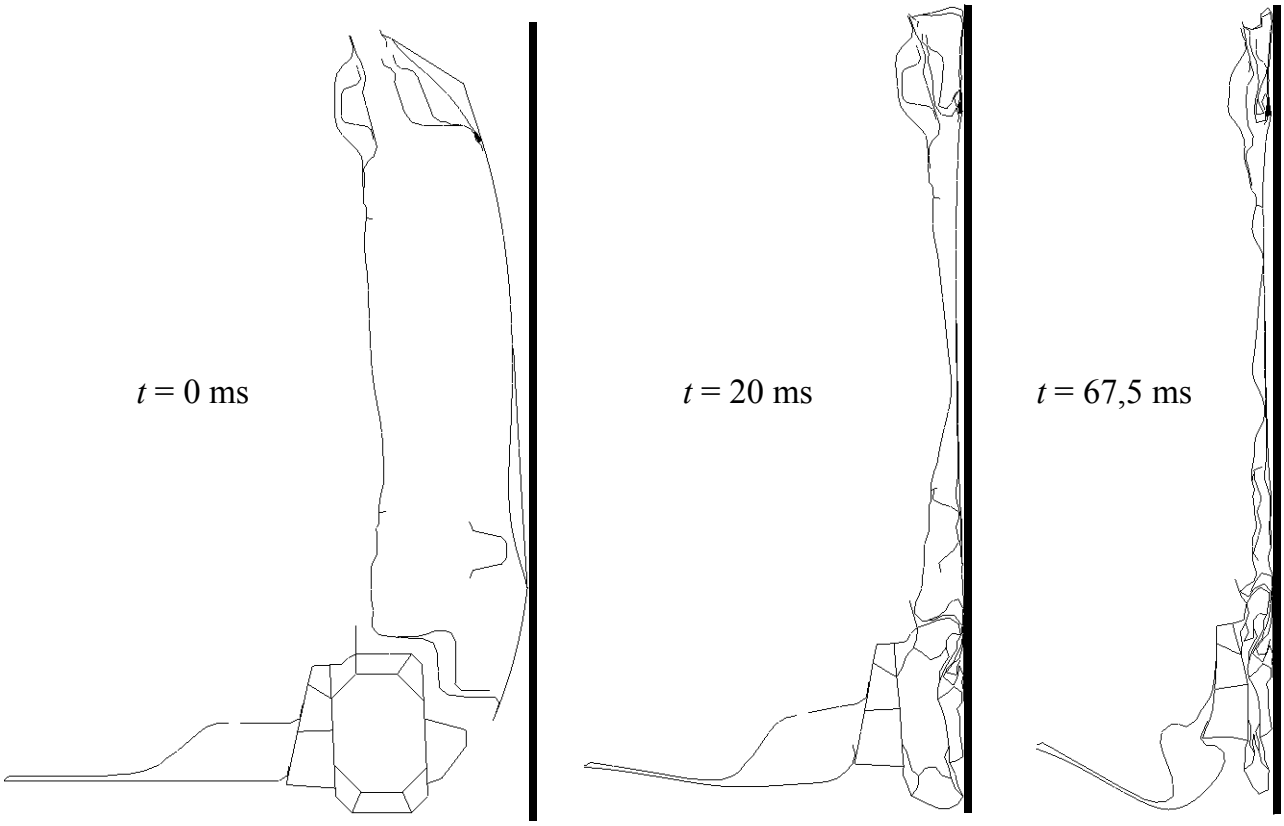


Abbildung 6-27: Anwendungsbeispiel 3 – Deformationsverhalten des Schwellers als Schnitt durch x=1300 mm, mit freundlicher Genehmigung der Volkswagen Osnabrück GmbH

Da der Profilquerschnitt des Schwellers nicht über die gesamte Länge der Struktur topologisch konstant ist, wird der Schweller für die Optimierung in drei Bereiche aufgeteilt. Diese Aufteilung ist in Abbildung 6-28 veranschaulicht. Der Hauptteil des Schwellers ist topologisch konstant und kann während der Optimierung verändert werden. Zwei in der Optimierung nicht modifizierbare Bereiche sind der Flansch (in der Abbildung dunkelgrau eingefärbt) und der an das Radhaus angebundene, hintere Bereich des Schwellers (in der Abbil-

dung hellgrau eingefärbt). Der Flansch ist mit dem Rest des Schwellers über eine Projektion der *FE-Knoten* der Unterseite des Flansches auf die *Finiten Elemente* des Schwellers verbunden. Der hintere Teil des Schwellers wird über eine Spinne aus starren Balkenelementen mit dem Hauptteil des Schwellers verbunden.
Das *FE-Modell* des Fahrzeugs besteht aus ca. 739000 *Finiten Elementen*, welche eine durchschnittliche Elementkantenlänge von 10 mm aufweisen. Die Crashsimulation benötigt bei einer Verwendung von 128 Prozessorkernen (*Intel Xeon CPU E5-2650®* mit einem Prozessortakt von 2 GHz) aufgrund des vorgegeben Zeitschritts von 0,65 µs und der Verwendung von Massenskalierung etwa 53 min bis zur Komplettierung.

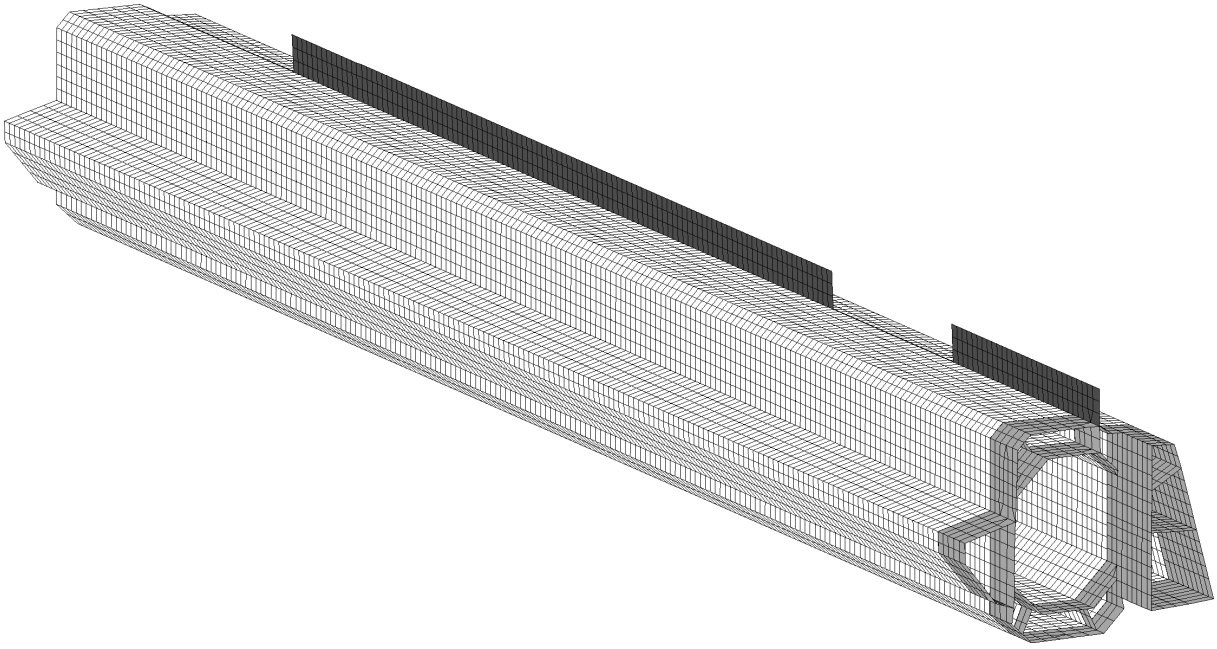


Abbildung 6-28: Anwendungsbeispiel 3 – Trennung des Schwellers in unterschiedliche Bereiche

Das Ziel der Optimierung ist die Minimierung der Masse des Schwellers m, wobei sich der Überlebensraum der Insassen d_{ue} gegenüber dem Referenzentwurf nicht verschlechtern darf. Dabei ist noch eine Reihe von Fertigungsrestriktionen (siehe Abschnitt 3.3) einzuhalten, die sich an Herstellungsprozessen von Aluminium-Strangpressprofilen orientieren.
In allen vorherigen Anwendungsbeispielen waren Effizienzbetrachtungen nur von untergeordneter Bedeutung. Aufgrund der hohen Rechenzeitkosten jedes einzelnen Funktionsaufrufs in diesem Anwendungsbeispiel, eignet es sich besonders, um Maßnahmen zur Effizienzsteigerung der GHT zu demonstrieren.
Die Optimierung mit der *GHT* wird hier zweiphasig durchgeführt und in der äußeren Optimierungsschleife wird ein anderes Optimierungsproblem verfolgt als in der inneren Optimierungsschleife. In der äußeren Optimierungsschleife wird der Überlebensraum der Insassen maximiert, während die Masse konstant bleibt und der des Startentwurfs entspricht (sie-

he Tabelle 6-14). Dies ermöglicht es, ähnlich wie in den Anwendungsbeispielen 1b und 2a, die Bewertung der von den Heuristiken in der äußeren Optimierungsschleife erzeugten Entwürfe mit einzelnen Funktionsaufrufen vorzunehmen. Hierdurch kann die Anzahl der notwendigen Funktionsaufrufe deutlich reduziert werden.
In der inneren Optimierungsschleife wird dann das eigentliche Optimierungsproblem verfolgt, die Minimierung der Masse mit Verwendung des Überlebensraums der Insassen als Restriktion. Die in der ersten Phase der Optimierung aufgebaute Reserve an Überlebensraum wird abgebaut und für eine Reduktion der Masse verwendet (siehe Tabelle 6-15). Außerdem findet in der inneren Optimierungsschleife keine Formoptimierung und Dimensionierung statt, sondern nur eine Dimensionierung mit zwei Wanddicken. Eine für die außen liegenden Wände des Profilquerschnitts und eine für die innen liegenden Wände, um die Anzahl der nötigen Funktionsaufrufe weiter zu reduzieren. Die Optimierung wird nach dem Durchlaufen der inneren Optimierungsschleife beendet.

Optimierungsziel:	Maximierung des Überlebensraums der Insassen d_{ue}
Funktionale Restriktionen:	Masse des Schwellers $m \leq 15{,}22$ kg
Fertigungsrestriktionen:	1,6 mm ≤ Wanddicke der Struktur ≤ 6 mm
	Verbindungswinkel zwischen zwei Wänden ≥ 15°
	Abstand zwischen zwei Wänden ≥ 10 mm
	Größenverhältnis von größter zu kleinster Kammer ≤ 20

Tabelle 6-14: Anwendungsbeispiel 3 – Spezifikationsliste der äußeren Optimierungsschleife

Optimierungsziel:	Minimierung der Masse des Schwellers m
Funktionale Restriktionen:	Überlebensraum der Insassen $d_{ue} \geq 471{,}8$ mm
Fertigungsrestriktionen:	1,6 mm ≤ Wanddicke der Struktur ≤ 6 mm
	Verbindungswinkel zwischen zwei Wänden ≥ 15°
	Abstand zwischen zwei Wänden ≥ 10 mm
	Größenverhältnis von größter zu kleinster Kammer ≤ 20

Tabelle 6-15: Anwendungsbeispiel 3 – Spezifikationsliste der inneren Optimierungsschleife

In der unendlich großen Menge der möglichen Entwürfe des zu optimierenden Schwellers existiert für jeden Wert der Masse m ein Entwurf, bei welchem der Überlebensraum der Insassen d_{ue} maximal ist. Eine weitere Verbesserung (Erhöhung) des Überlebensraums lie-

ße sich nur über eine Verschlechterung (Erhöhung) der Masse erreichen und eine Verbesserung (Verringerung) der Masse nur über eine gleichzeitige Verschlechterung (Verringerung) des Überlebensraums.
Die durch diese Wertepaare aus Masse und Überlebensraum gebildete Kurve aus optimalen Entwürfen ließe sich erzeugen, indem z.B. mit unterschiedlichen Werten der Masse Optimierungen mit dem Ziel der Maximierung des Überlebensraums durchgeführt werden würden. Diese optimalen Entwürfe können sich sowohl in Topologie, als auch in Form und Wanddicken voneinander unterscheiden.
Durch die beschriebene zweiphasige Vorgehensweise in der Optimierung findet ein Sprung auf dieser Kurve von einem optimalen Entwurf zu einem anderen optimalen Entwurf statt (siehe Abbildung 6-29), wobei es sich hierbei durch den Einsatz der *GHT* wahrscheinlich nur um lokale Optima handelt (siehe Abschnitt 5.4).

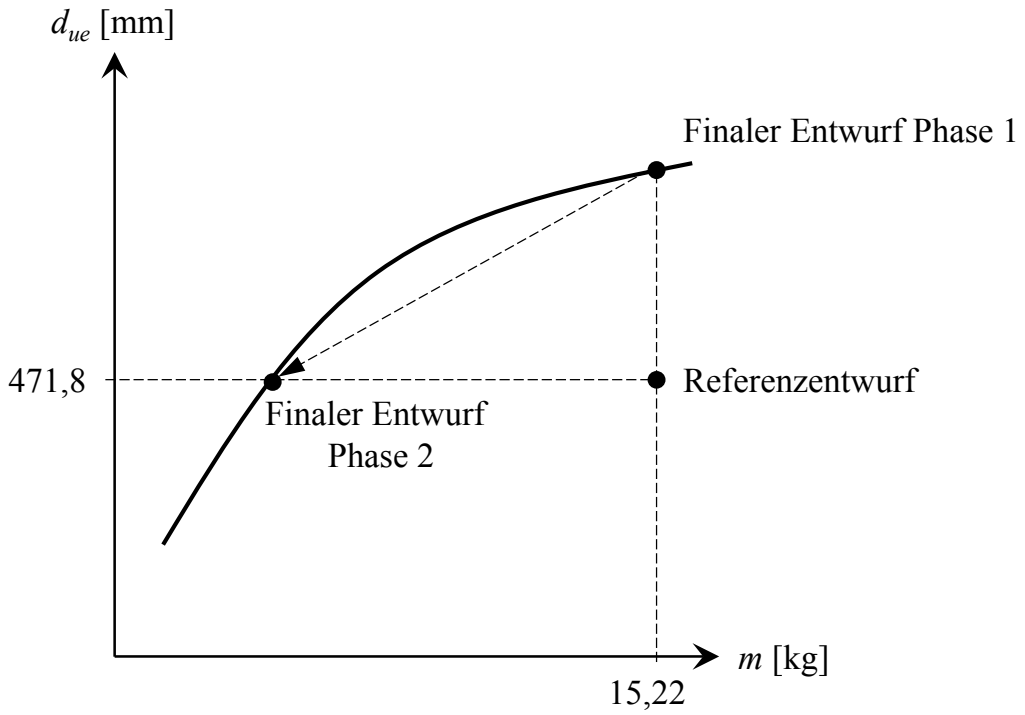


Abbildung 6-29: Anwendungsbeispiel 3 – Sprung auf der Kurve der optimalen Entwürfe

Tabelle 6-16 fasst die Optimierungshistorie zusammen. Der Startentwurf der Optimierung weist bei identischer Masse einen deutlich geringeren Überlebensraum der Insassen als der Referenzentwurf auf, da der Startentwurf über keine inneren Wände verfügt und lediglich aus der äußeren Kontur des Schwellers besteht (siehe Abbildung 6-26).
In der sechsten Iteration der ersten Phase der Optimierung kann der Überlebensraum der Insassen gegenüber dem Referenzentwurf bei gleichbleibender Masse von 471,8 mm auf

501,6 mm um 6,3 % verbessert werden. In der siebten Iteration können die Heuristiken keinen neuen Entwurf erzeugen, der zu einer Verbesserung der Zielfunktion führt.
Die erste Phase der Optimierung wird beendet und die zweite Phase der Optimierung beginnt, indem für den besten Entwurf der sechsten Iteration eine innere Optimierungsschleife durchgeführt wird. Hier kann durch die Veränderung der beiden Entwurfsvariablen „Wanddicke der außen liegenden Wände t_a“ und „Wanddicke der innen liegenden Wände t_i“ die Masse des Schwellers auf 12,87 kg reduziert werden. Dies entspricht einer Verbesserung von 15,4 %, verglichen mit dem 15,22 kg schweren Referenzentwurf. Der finale Entwurf der Optimierung liegt dabei dicht an der Grenze der Restriktion des Überlebensraums der Insassen. Durch die verwendeten Maßnahmen zur Effizienzsteigerung wurden für die Optimierung insgesamt nur 188 Funktionsaufrufe verwendet.

		Werte des besten Entwurfs der Iteration				**Funktions-aufrufe**
		m [kg]	**d_{ue} [mm]**	**t_a [mm]**	**t_i [mm]**	
	Referenz	15,22	471,8	2,75	2,00	-
Phase 1: Maximiere d_{ue}	**Startentwurf**	15,22	443,1	5,01	5,01	-
	Iteration 1	15,22	479,6	4,14	4,14	4
	Iteration 2	15,22	480,4	3,80	3,80	15
	Iteration 3	15,22	489,5	3,45	3,45	21
	Iteration 4	15,22	496,7	3,09	3,09	24
	Iteration 5	15,22	501,0	2,93	2,93	23
	Iteration 6	15,22	504,8	2,82	2,82	25
	Iteration 7	15,22	501,6	2,60	2,60	25
Phase 2: Minimere m	**Finaler Entwurf**	12,87	472,3	2,18	2,60	51

Tabelle 6-16: Anwendungsbeispiel 3 – Zusammenfassung der Optimierungshistorie

Die Entwicklung der Struktur vom Startentwurf zum finalen Entwurf der Optimierung anhand der dazugehörigen Graphen zeigt Abbildung 6-30. Es sind lediglich die Entwürfe der ersten Phase der Optimierung dargestellt, da in der zweiten Phase der Optimierung keine Veränderung der Topologie oder Form mehr stattfindet.
In den Iterationen 2 – 5 gehören die Entwürfe, die zu dem finalen Entwurf führen, nicht zu den besten Entwürfen der Iterationen, da in diesen Iterationen andere konkurrierende Entwürfe ein besseres mechanisches Verhalten zeigen.

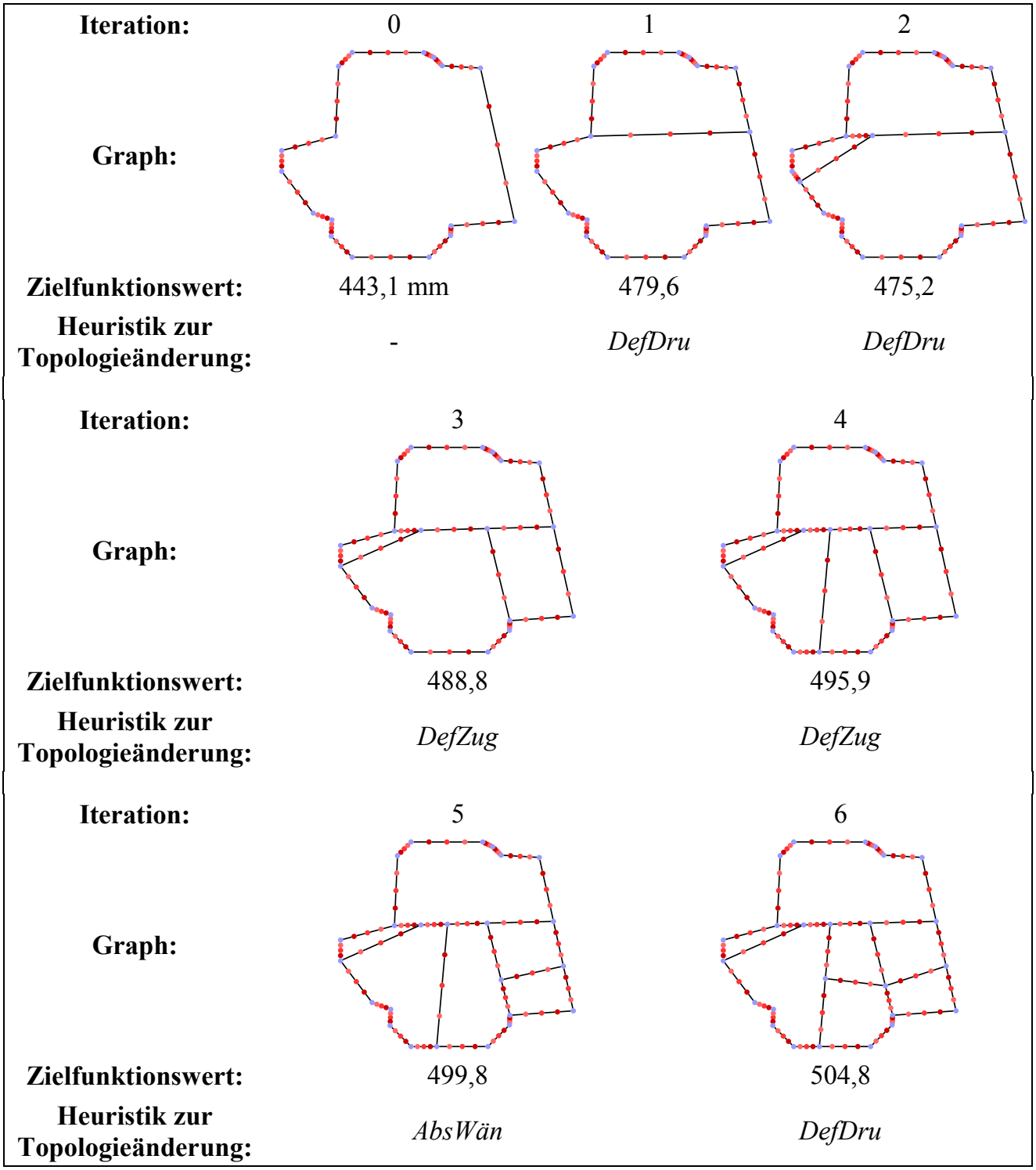


Abbildung 6-30: Anwendungsbeispiel 3 – Entwicklungshistorie vom Startentwurf zum finalen Entwurf

Abbildung 6-31 zeigt das Deformationsverhalten des finalen Entwurfs zu unterschiedlichen Zeitpunkten als Schnitt durch das Fahrzeug normal zur x-Achse bei x = 1300 mm. Es handelt sich hierbei um die Aufprallposition des Pfahls. In der Region, in welchem Bodenblech und Schweller miteinander verbunden sind, weist der Profilquerschnitt des Schwellers meh-

rere Kammern auf. Diese verbessern die strukturelle Integrität des Schwellers an dieser Stelle. Von der Verbindungsregion mit dem Bodenblech zu der äußersten, in Richtung Pfahl zeigenden Spitze des Schwellers zieht sich ein stark beanspruchter Lastpfad. Dieser faltet sich im Laufe der Simulation vollständig zusammen und weist dadurch von allen Wänden die größte Energieabsorption auf.
Verglichen mit dem Referenzentwurf deformiert sich der finale Entwurf der Optimierung wesentlich gleichmäßiger.

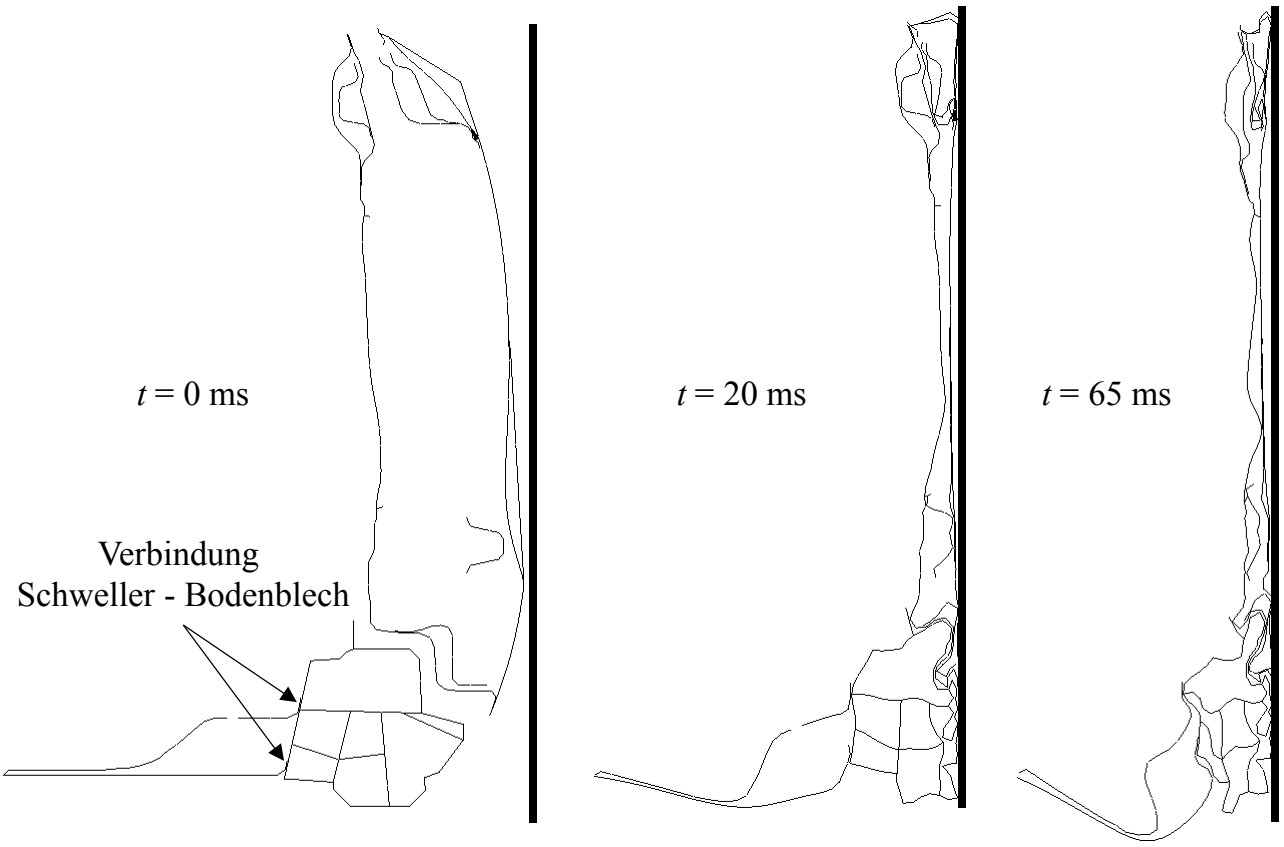


Abbildung 6-31: Anwendungsbeispiel 3 – Deformationsverhalten des finalen Entwurfs als Schnitt durch x=1300 mm

7 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Dissertation wird die Methode der *Graphen- und Heuristikbasierten Topologieoptimierung (GHT)* vorgestellt, welche für die Topologieoptimierung des Profilquerschnitts einer crashbelasteten Struktur verwendet werden kann. In der Optimierungsmethode wird das eigentliche Optimierungsproblem in zwei ineinander geschachtelte Optimierungsschleifen aufgeteilt. In der äußeren Optimierungsschleife werden aus Expertenwissen abgeleitete Heuristiken für die Topologieänderung der zu optimierenden Struktur eingesetzt. In der inneren Optimierungsschleife verändern universelle Optimierungsalgorithmen die Form und Wanddicken in einer herkömmlichen Formoptimierung und Dimensionierung. Miteinander konkurrierende Entwürfe werden in der Optimierung parallel zueinander verfolgt, was zu einer besseren Abtastung des Entwurfsraums führt. Die Geometrie der zu optimierenden Struktur wird während der Optimierung durch mathematische Graphen beschrieben, welche nach einer eigens hierfür entwickelten Syntax aufgebaut sind. Diese flexible geometrische Beschreibung ermöglicht auch komplexe geometrische Modifikationen wie Topologieänderungen und ermöglicht eine graphenbasierte Überprüfung von Fertigungsrestriktionen.
Die beiden grundlegenden Einschränkungen der *GHT* sind, dass nur Strukturen optimiert werden können, für welche ein Profilquerschnitt definiert werden kann und dass aufgrund des Ursprungs der Heuristiken sinnvolle Ergebnisse nur für Strukturen zu erwarten sind, bei denen Crashlastfälle die maßgebliche Belastung darstellen. Für andere Anwendungsgebiete müssten neue Heuristiken entwickelt und implementiert werden.

Die Effizienz dieser Optimierungsmethode wird an unterschiedlichen Anwendungen demonstriert. In allen Anwendungsbeispielen kann die *GHT* effiziente Crashstrukturen erzeugen, wobei aber angenommen werden muss, dass es sich bei den Lösungen um lokale Optima handelt und nicht um die globalen Optima. Für die Anwendungsbeispiele 1a (Schwellerausschnitt in Abschnitt 6.1.1) und 2c (Rahmenstruktur in Abschnitt 6.2.3) kann aufgrund der Verwendung von Kräften bzw. Beschleunigungen als Zielfunktion und mithilfe der Kraft-Weg-Verläufe bzw. Beschleunigung-Weg-Verläufe nachgewiesen werden, dass sich die Leistung der gefundenen Lösungen nahe an den theoretischen globalen Optima befindet. Beispielsweise ist bei Anwendungsbeispiel 1a der Zielfunktionswert des finalen Entwurfs der Optimierung lediglich um 5,1 % höher als der theoretische optimale Wert.

In den Anwendungsbeispielen werden größtenteils viele Funktionsaufrufe (über 2000) in den Optimierungen verwendet. Ursache hierfür sind die aufwändigen Formoptimierungen und Dimensionierungen, welche mit universellen Optimierungsalgorithmen durchgeführt werden. In Anwendungsbeispiel 3 (siehe Abschnitt 6.3), der industriellen Anwendung an

einem Gesamtfahrzeugmodell, wird eine Strategie aufgezeigt, um die Anzahl der benötigen Funktionsaufrufe zu reduzieren. Durch eine zweiphasige Optimierungsprozedur und eine Umstrukturierung des Optimierungsproblems kann die Bewertung der von den Heuristiken durch Topologieänderungen erzeugten Entwürfe mit einzelnen Funktionsaufrufen erfolgen. In diesem Anwendungsbeispiel wird auf eine Formoptimierung komplett verzichtet und lediglich eine Dimensionierung mit wenigen Entwurfsvariablen am Ende durchgeführt. Durch diese Maßnahmen werden insgesamt nur 188 Funktionsaufrufe benötigt.
Eine vielversprechende Möglichkeit der Effizienzsteigerung für zukünftige Erweiterungen der *GHT* ist die Verwendung von Heuristiken für die Formoptimierung und Dimensionierung in der inneren Optimierungsschleife. Hierdurch könnte auf herkömmliche, universelle Optimierungsalgorithmen, welche im Sinne der benötigten Funktionsaufrufe rechenintensiv sind, komplett verzichtet werden. In der *GHT* sind zwar bereits zwei Heuristiken implementiert, die keine Topologieänderungen durchführen, diese wirken allerdings eher im Zusammenspiel mit den Heuristiken zur Topologieänderung und können nicht für eine eigenständige Formoptimierung und Dimensionierung verwendet werden.

Ein wichtiger Faktor bei der Auslegung von Crashstrukturen ist Robustheit, also die Resistenz des mechanischen Verhaltens der Struktur gegenüber Streuungen von Parametern wie Materialwerten oder geometrischen Eigenschaften. Diese treten in der Realität in allen Bereichen auf. Robustheit wird in der *GHT* nicht inhärent berücksichtigt, allerdings besteht die Möglichkeit, bei der inneren Optimierungsschleife, in der Formoptimierung und/oder Dimensionierung, Robustheit durch die Streuung von Parametern zu integrieren. Eine effizientere, weil inhärente Berücksichtigung von Robustheit ließe sich erreichen, indem alle in einer Iteration der *GHT* durchgeführten Funktionsaufrufe zur Bewertung der Robustheit mit herangezogen werden. In einer einzelnen Iteration werden derart viele unterschiedliche Entwürfe untersucht, dass grundlegende Abschätzungen der Robustheit vielleicht bereits ohne die Durchführung von zusätzlichen Funktionsaufrufen getätigt werden können.

Diese beiden möglichen zukünftigen Erweiterungen (Nutzung von Heuristiken für die Formoptimierung und Dimensionierung sowie die inhärente Berücksichtigung von Robustheit) haben das Potenzial, die Effizienz der *GHT* im Sinne der benötigten Funktionsaufrufe weiter zu steigern und sie damit auch für den industriellen Gebrauch im Entwicklungsprozess interessanter zu machen.

Literaturverzeichnis

Allaire G, Jouve F, Toader AM (2004) Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method. J Comp Phys 104: 363-393

Baumgartner A, Harzheim L, Mattheck C (1992) SKO (soft kill option): the biological way to find an optimum structure topology. Int J Fatigue 14(6): 387-393

Bendsøe MP, Kikuchi N (1988) Generating Optimal Topologies in Structural Design using a Homogenization Method. Comput Methods Appl Mech Eng 71: 197-224

Bendsøe MP (1989) Optimal shape design as a material distribution problem. Struct Optim 1: 193-202

Choi WS, Park GJ (2002) Structural Optimization using Equivalent Static Loads at all the Time Intervals. Comput Methods Appl Math 191(19): 2077-2094

Diestel R (2010) Graph Theory. Springer-Verlag

Eschenauer H, Kobelev V, Schumacher A (1994) Bubble method for topology and shape optimization of structures. J Struct Optim 8: 42-51

Forsberg J, Nilsson L (2007) Topology optimization in crashworthiness design. Struct Multidisc Optim 33: 1-12

Haq M, Rudolph S (2004) „EWS-Car“: Eine Entwurfssprache für den Fahrzeugentwurf. VDI-Berichte Nr. 1846, VDI-Verlag

Hunkeler S (2013) Topology Optimisation in Crashworthiness Design via Hybrid Cellular Automata for Thin Walled Structures. Dissertation an der Queen Mary University of London, UK

Krige DG (1951) A Statistical Approach to Some Basic Mine Valuation Problems on the Witwatersrand. Journal of the Chemical, Metallurgical and Mining Society of South Africa 52: 119-139

Mayer RR, Kikuchi N, Scott RA (1996) Application of topological optimization techniques to structural crashworthiness. Int J Numer Methods Eng 39: 1383-1403

Norato JA, Bendsøe MP, Haber RB, Tortorelli DA (2007) A topological derivative method for topology optimization. Struct Multidisc Optim 33: 375-386

Olschinka C, Schumacher A (2008) Graph based topology optimization of crashworthiness structures. PAMM Proc Applied Math Mech 8(1): 10029-10032

Ortmann C, Schumacher A (2012) Kombination von mathematischen Verfahren und aus Expertenwissen abgeleiteten Heuristiken zur topologischen Auslegung crashbelasteter Profilquerschnitte in Karosseriestrukturen. VDI-Berichte Nr. 2169: 241-256

Ortmann C, Schumacher A (2013a) Graph and heuristic based topology optimization of crash loaded structures. Struct Multidisc Optim 47(6): 839-854

Ortmann C, Schumacher A (2013b) Hierarchical topology and shape optimization of crash-loaded profile structures. Proceeding of the 10th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization, Orlando, Florida, USA, 19. - 24. Mai

Ortmann C, Schumacher A (2014a) Branching strategies for the application of heuristics to the topology optimization of crash loaded structures. Proceeding of the 11th World Congress on Computational Mechanics (WCCM XI), Barcelona, Spanien, 20. - 25. Juli

Ortmann C, Schumacher A (2014b) Meta-models in structural optimization - techniques and strategies. Proceeding of the Automotive CAE Grand Challenge 2014, Hanau, Deutschland, 15. - 16. April

Park KJ, Park GJ (2005) Structural Optimization for Non-Linear Behavior Using Equivalent Static Loads. Proceeding of the 6th World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization, Rio de Janeiro, Brasilien, 30. Mai - 03. Juni

Park GJ (2010) Equivalent Static Loads Method for Non Linear Static Response Structural Optimization. Beitrag auf dem 9. LS-DYNA Forum, Bamberg, 12. - 13. Oktober

Park GJ (2011) Technical overview of the equivalent static loads method for non-linear static response structural optimization. Struct Multidisc Optim 43: 319-337

Patel NM (2007) Crashworthiness Design Using Topology Optimization. Dissertation an der University of Notre Dame, USA

Patel NM, Kang BS, Renaud, JE, Tovar A (2009) Crashworthiness Design Using Topology Optimization. J Mech Des 131: 061013.1-061013.12

Pedersen CBW (2002) On Topology Design of Frame Structures for Crashworthiness, Dissertation an der Technical University of Denmark, Dänemark

Pedersen CBW (2004) Crashworthiness Design of transient frame structures using topology optimization. Comput Methods Appl Mech Eng 193: 653-678

Sethian JA, Wiegman A (2000) Structural boundary design via level set and immersed interface methods. J Comp Phys 163: 489-528

Schmit LA, Mallet RH (1963) Structural synthesis and design parameters. J Struct Div Proc AM Soc Civ Eng 89(4): 269-299

Schumacher A, Olschinka C (2008) Robust Design considering highly nonlinear structural behavior. Struct Multidisc Optim 35: 263-272

Schumacher A, Ortmann C (2011) Topology Optimization - Research State of the Art. Proceeding of the Automotive CAE Grand Challenge 2011, Hanau, Deutschland, 19 - 20 April

Schumacher A, Ortmann C (2012a) Regelbasiertes Verfahren zur Topologieoptimierung von Profilquerschnitten für Crashlastfälle. Beitrag auf den Karosseriebautagen Hamburg 2012 12. Internationale ATZ-Fachtagung, Hamburg, Deutschland, 10. - 11. Mai

Schumacher A, Ortmann C (2012b) Crashoptimierung - Vergleich Intuition und Algorithmus. Mobiles Fachzeitschrift für Konstrukteure 37: 58-60

Schumacher A, Ortmann C (2012c) Topology optimization of crash structures - creativity versus computer-based algorithms. Beitrag auf dem 11. LS-DYNA Forum, Ulm, Deutschland, 9. - 10. Oktober

Schumacher A (2013) Optimierung mechanischer Strukturen – Grundlagen und industrielle Anwendungen. 2. Auflage, Springer-Verlag

Schumacher A, Ortmann C (2013) Rule generation for optimal topology changes of crash-loaded structures, Proceeding of the 10th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization, Orlando, Florida, USA, 19. - 24. Mai

Soto CA (2004) Structural topology optimization for crashworthiness. Int J Crash 9(3): 277-283

Stander N and Craig KJ (2002) On the robustness of a simple domain reduction scheme for simulation based optimization. Eng Comput 19(4): 431-450

Tcherniak D, Sigmund O (2001) A web-based topology optimization program. Struct Multidisc Optim 22: 179-187

Tovar A, Quevedo WI, Patel NM, Renaud JE (2005) Hybrid cellular automata with local control rules: a new approach to topology optimization inspired by bone functional adaptation. Proceeding of the 6th World Congresses of Structural and Multidisciplinary Optimization, Rio de Janeiro, Brasilien, 30. Mai - 3. Juni

Rozvany GIN, Zhou M, Birker T (1992) Generalized shape optimization without homogenization. Struct Optim 4: 250-254

Internetquellen:

Euro NCAP (2011) POLE SIDE IMPACT TESTING PROTOCOL Version 5.2 November 2011.
http://www.euroncap.com/files/Euro-NCAP-Pole-Protocol-Version-5.2---0-8d65ac64-eceb-43c5-a15e-c881853f1e9e.pdf, Aufruf 11.09.2014 10:23 Uhr UTC +1

Euro NCAP (2012) FRONTAL IMPACT TEST PROTOCOL Version 6.0 August 2012. http://www.euroncap.com/files/Euro-NCAP-Frontal-Protocol-Version-6.0---0-a5b6e6af-7739-4201-b730-2badec79883d.pdf, Aufruf 11.09.2014 10:22 Uhr UTC +1

Euro NCAP (2013) ASSESSMENT PROTOCOL – ADULT OCCUPANT PROTECTION Version 6.0 Juli 2013.
http://www.euroncap.com/files/Euro-NCAP-Assessment-Protocol---AOP---v6.0---0-6da8ddb2-ac3e-4115-927d-180de4eb8d18.pdf, Aufruf 30.11.2014 12:08 Uhr UTC +1

Lebenslauf

Persönliches

Christopher Ortmann

Geburtsort:	Wittenberg
Geburtsdatum:	15.01.1985
Familienstand:	verheiratet

Schulbildung

September 1995 bis Juni 2004	Dahlmannschule in Bad Segeberg

Studium

September 2006 bis Februar 2010	Studium der Fahrzeugtechnik (Bachelor) an der *Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg*, in dieser Zeit: Tätigkeit als Tutor für Mathematik I und II
März 2010 bis August 2011	Studium der Fahrzeugtechnik (Master) an der *Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg,* in dieser Zeit: Tätigkeit als studentische Hilfskraft im *Department Fahrzeugtechnik und Flugzeugbau*

Berufstätigkeit nach dem Studium

Februar 2011 bis Januar 2013	Wissenschaftlicher Mitarbeiter im *Department Fahrzeugtechnik und Flugzeugbau* an der *Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg,* Bearbeitung des *BMBF-Verbundprojekts Methodische und softwaretechnische Umsetzung der Topologieoptimierung crash-beanspruchter Fahrzeugstrukturen*
Seit Februar 2013	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am *Lehrstuhl für Optimierung mechanischer Strukturen* an der *Bergischen Universität Wuppertal*