



BERGISCHE  
UNIVERSITÄT  
WUPPERTAL

# **Optimierungsverfahren zur Erhöhung der Versagenslasten von Bolzenverbindungen in faserverstärkten Strukturen**

**Dissertation  
zur Erlangung eines Doktorgrades**

in der  
Fakultät für Maschinenbau und Sicherheitstechnik

der  
**Bergischen Universität Wuppertal**

vorgelegt von  
**Michail Schlosser**  
aus Schortandy (Kasachstan)

Wuppertal 2023

Tag der mündlichen Prüfung: 19.09.2023



**Michail Schlosser**

## **Optimierungsverfahren zur Erhöhung der Versagenslasten von Bolzenverbindungen in faserverstärkten Strukturen**

Dissertation, Bergische Universität Wuppertal, Fakultät für Maschinenbau und Sicherheitstechnik, Lehrstuhl für Optimierung mechanischer Strukturen, Februar 2023

### **Kurzfassung:**

Faserverbundkunststoffe (FVK) besitzen enormes Leichtbaupotenzial und ein weites Einsatzspektrum. Sie verkomplizieren jedoch aufgrund ihrer Anisotropie und Inhomogenität nicht nur die Festigkeitsbeurteilung der faserverstärkten Strukturen, sondern auch deren Auslegung. Die vielen Freiheitsgrade bei der Gestaltung eines Faserverbundlaminats (Materialauswahl, Anzahl, Dicke, Orientierung und Reihenfolge der Lagen) erschweren zudem die optimale Werkstoffausnutzung. Ein strukturiertes und zielorientiertes Auslegen kann mit Hilfe der numerischen Strukturoptimierung erfolgen. Dieser Prozess ist Bestandteil der vorliegenden Dissertation. Dabei wird die Optimierung von Bolzenverbindungen, die für lösbare Verbindungen von Faserverbundstrukturen zum Einsatz kommen, behandelt. Hierfür wird ein Verfahren entwickelt, welches für die Optimierung von FVK eine vorhandene kommerzielle Software (HyperWorks von Altair) nutzen soll. Daneben beinhaltet die Vorgehensweise die Topologieoptimierung eines modifizierten Anfangsmodells, die Überführung des erzeugten Ergebnisses in ein Laminatmodell und die darauf aufbauende Dimensionierung. Wahlweise kann hierzu eine vor- und nachgeschaltete Kontaktmodellierung und -analyse angewendet werden, um eine Approximation der Kontaktlast zur detaillierten Abbildung der Krafteinleitung in einem Lastmodell bereitzustellen und eine genaue Nachrechnung des Optimierungsergebnisses zu ermöglichen. Die Möglichkeiten der entwickelten Methode werden an zwei Beispielen gezeigt. Mit einer Kragenscheibenoptimierung wird die Plausibilität und die Güte der Ergebnisse anhand von Vergleichsmodellen sowie einem Referenzprozess belegt. Im Anwendungsbeispiel wird die Bolzenverbindung ausgiebig behandelt. Neben der Betrachtung der Kontaktsituation und der Approximation der Kontaktlast wird ein Ausgangszustand ausgelegt und modelliert. Als Optimierungsziel wird diese Bolzenverbindung mit möglichst wenig Zusatzvolumen soweit verstärkt, dass bei höchster Steifigkeit die doppelte Versagenslast übertragen werden kann. Die optimale Verstärkung wird hierbei mit der entwickelten Methode erreicht und stellt gegenüber Vergleichsmodellen eine Verbesserung dar. Zudem wird mit dem verallgemeinerten Startentwurf innerhalb der Methode die Findung eines zulässigen Optimalentwurfs im Vergleich zu einem Referenzprozess vereinfacht.

**Stichworte:** Faserverbundkunststoff (FVK), Versagenskriterien, Krafteinleitung, Kontakt, Bolzenverbindung, Strukturoptimierung, Optimierungsstrategie

**Michail Schlosser**

**Optimization method for increasing the failure loads of bolt joints in fiber-reinforced structures.**

PhD thesis, University of Wuppertal, School of Mechanical Engineering and Safety Engineering, Chair for Optimization of Mechanical Structures, February 2023

**Abstract:**

Fiber-reinforced composites have enormous lightweight potential and a wide range of possible applications. However, their anisotropy and inhomogeneity complicate the strength analysis and sizing of fiber-reinforced structures. The many degrees of freedom in the designing process (Material selection, number, thickness, orientation and sequence of layers) also make it difficult to achieve optimum material utilization. A structured and objective-oriented sizing can be achieved with the help of numerical structural optimization. This process is part of the present thesis. The optimization of bolt joints, which are used for releasable connections of fiber composite structures, is treated. For this purpose, a method is developed, which uses an existing commercial software (HyperWorks from Altair) for the composite optimization. Additionally, the process includes the topology optimization of a modified initial model, the transfer of the generated result into a laminate model and the dimensioning based on it. Optionally, contact modeling and analysis can be applied before and after this process to provide an approximation of the contact load for detailed mapping of the load application in a load model and to enable an accurate verification calculation of the optimization result. The capabilities of the developed method are demonstrated by two examples. With a cantilever disk optimization, the plausibility and the quality of the results are proven using comparison models and a reference process. In the application example, the bolt joint is treated in detail. In addition to considering the contact situation and the approximation of the contact load, an initial design is dimensioned and modeled. As an optimization objective, this bolt joint is reinforced with the smallest possible added volume so far that the double failure load can be carried at maximum stiffness. The optimum reinforcement is achieved with the developed method and represents an improvement with respect to comparison models. Also, the generalized initial design within the method simplifies the finding of a feasible optimal design compared to a reference process.

**Keyword:** fiber reinforced plastic (FRP), failure criteria, load application, contact, bolt joint, modeling, structural optimization, optimization strategy

# Vorwort und Danksagung

Die vorliegende Dissertation entstand neben meiner Tätigkeit als akademischer Mitarbeiter und Lehrbeauftragter an der Hochschule Albstadt-Sigmaringen sowie später nebenberuflich. Für die Möglichkeit der Promotion und die umfangliche Unterstützung bei der täglichen Arbeit möchte ich dem gesamten Studiengang Maschinenbau der Hochschule Albstadt-Sigmaringen danken. Die Promotion selbst erfolgte in Kooperation mit dem Lehrstuhl für Optimierung mechanischer Strukturen an der Bergischen Universität Wuppertal.

Neben dem bereits ausgesprochenen Dank, haben zum Gelingen dieser Arbeit zahlreiche Menschen beigetragen, denen ich an dieser Stelle meinen Dank ausdrücken möchte.

Ein ganz besonderer Dank gilt meinem Doktorvater Herrn Prof. Dr.-Ing. Axel Schumacher, der mich über den gesamten Zeitraum fachlich unterstützt und stetig motiviert hat. Die vielen Anregungen und kritischen Fragen haben den Weg der Arbeit aufgezeigt ohne meine eigenen Ideen einzuschränken. Vielen Dank dafür.

Auch danke ich Prof. Dr.-Ing. Wilfried Becker von der Technischen Universität Darmstadt herzlich für die Übernahme des Zweitgutachtens und die wertvollen Anmerkungen.

Den Doktoranden vom Lehrstuhl für Optimierung mechanischer Strukturen der Bergischen Universität Wuppertal danke ich für die Tipps und Diskussionen rund um das Thema.

Zu besonders großem Dank bin ich Herrn Prof. Dr.-Ing. Klaus Bellendir verpflichtet, der nicht nur eine unverzichtbare Stütze für mich an der Hochschule Albstadt-Sigmaringen war, sondern auch maßgeblich zum Gelingen der Arbeit beigetragen hat. Seine fachliche und menschliche Unterstützung war für mich über die Promotionszeit hinaus von unschätzbarem Wert. Die harmonische Zusammenarbeit und die unermüdliche Hilfsbereitschaft haben den Arbeitsalltag erleichtert und so mehr Freiraum für die Dissertation geschaffen. Ebenso möchte ich mich herzlich für die vielen Ideen und Anmerkungen sowie für die aufmunternden Worte in schwierigen Situationen bedanken.

Nicht zuletzt möchte ich besonders meiner Ehefrau danken, die in jeder Phase der Promotion hinter mir stand und mich stets motiviert hat. Ebenfalls möchte ich mich bei meinen Kindern für ihre Geduld und ihr Verständnis bedanken, wenn der Papa an so manchen Tagen und Abenden mit der Arbeit beschäftigt war.



# Inhaltsverzeichnis

<b>Abkürzungs- und Symbolverzeichnis.....</b>	<b>III</b>
<b>Kapitel 1</b>	
<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<hr/>	
1.1 Einführung in das Thema .....	1
1.2 Stand der Forschung zur Optimierung von Bolzenverbindungen in faserverstärkten Strukturen .....	2
1.3 Motivation und Ziel der Arbeit .....	6
1.4 Aufbau der Arbeit .....	8
<b>Kapitel 2</b>	
<b>Theoretische Grundlagen</b>	<b>11</b>
<hr/>	
2.1 Der faserverstärkte Kunststoff .....	11
2.1.1 <i>Werkstoffkundliche Betrachtung und Herstellung</i> .....	11
2.1.2 <i>Elastizitätsgesetz und klassische Laminattheorie</i> .....	14
2.1.3 <i>Festigkeitsbeurteilung von FVK</i> .....	19
2.1.4 <i>Krafteinleitungselemente für FVK</i> .....	30
2.1.5 <i>FEM und Modellierung von FVK</i> .....	34
2.2 Das Kontaktproblem einer Bolzenverbindung .....	38
2.2.1 <i>Mathematische Beschreibung des Kontaktdrucks einer Bolzenverbindung in FVK</i> .....	41
2.2.2 <i>Beanspruchung und Deformation einer Bolzenverbindung in FVK</i> .....	43
2.3 Strukturoptimierung .....	45
2.3.1 <i>Topologieoptimierung</i> .....	49
2.3.2 <i>Parameteroptimierung von FVK</i> .....	52
2.3.3 <i>Optimierungsalgorithmus</i> .....	54
<b>Kapitel 3</b>	
<b>Modellierung einer Bolzenverbindung</b>	<b>57</b>
<hr/>	
3.1 Auslegung der Bolzenverbindung .....	57
3.2 Aufbau des FE-Modells der Bolzenverbindung .....	59
3.2.1 <i>FE-Modell des Laminats</i> .....	60
3.2.2 <i>FE-Modell des Bolzens</i> .....	64
3.2.3 <i>FE-Modell der Bolzenverbindung</i> .....	69
3.3 Approximation des Kontaktproblems der Bolzenverbindung .....	75

<b>Kapitel 4</b>	
<b>Optimierungsverfahren für FVK – speziell für Bolzenverbindungen</b>	<b>79</b>
4.1 Neue Optimierungsstrategie – LTgSL-Verfahren .....	79
4.2 LTgSL-Verfahren am Beispiel einer Kragsscheibe .....	86
4.3 Diskussion des LTgSL-Verfahrens .....	95
4.3.1 Zusammenfassung und Diskussion der Einzelschritte .....	95
4.3.2 Vergleichsmodelle zur Bewertung der Ergebnisse .....	97
4.3.3 Dreiphasige Laminatoptimierung der Kragsscheibe mit OptiStruct .....	100
<b>Kapitel 5</b>	
<b>Optimierung von Bolzenverbindungen</b>	<b>107</b>
5.1 Optimierungsproblem und Startentwurf .....	107
5.2 Topologieoptimierung mit Lastmodell .....	110
5.3 Dicken- und Winkeloptimierung am Laminatmodell .....	113
5.4 Kontaktanalyse des endgültigen Entwurfs .....	119
5.5 Zusammenfassung der Ergebnisse und Diskussion .....	122
5.5.1 Diskussion der Zwischenergebnisse und des Endzustands .....	123
5.5.2 Vergleichsmodelle zur Bewertung des endgültigen Entwurfs .....	130
5.5.3 Dreiphasige Laminatoptimierung der Bolzenverbindung mit OptiStruct .....	136
<b>Kapitel 6</b>	
<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>143</b>
<b>Literaturverzeichnis</b> .....	<b>147</b>
<b>Anhang</b>	<b>165</b>
A Versagenskriterien .....	165
B Bruchkräfte verschiedener Versagensarten bei Bolzenverbindungen in FVK .....	173
C OptiStruct-Modelle von Kragsscheibe und Bolzenverbindung .....	176



# Abkürzungs- und Symbolverzeichnis

Die nachfolgende Zusammenstellung beinhaltet nur die wichtigsten Abkürzungen. Weitere Bedeutungen und Bezeichnungen sind jeweils im Text erläutert.

## Abkürzungen

2D	zweidimensional
3D	dreidimensional
BESO	bidirektionale evolutionäre Strukturoptimierung
BFC	Bonding Failure Criterion
BIGOPT	Large Scale Optimization Algorithm
CAIO	Computer Aided Internal Optimization
CAO	Computer Aided Optimization
CFK	kohlenstofffaserverstärkter Kunststoff
CLT	Classical Laminate Theory = klassische Laminattheorie
CONLIN	Convex Linearization = Konvexe Linearisierung
DLF	Degraded Laminate Failure = sukzessives Versagen
DUAL, DUAL2	duale Lösungsalgorithmen in OptiStruct
EBB	EULER-BERNOULLI-Balken
ES	Einzelschicht
ESZ	ebener Spannungszustand
FB	Faserbruch
FE	Finite Elemente
FEM	Finite Elemente Methode
FF	Fiber Failure = Faserbruch
FMC	Failure Mode Concept, Bezeichnung für ein Versagenskriterium
FPF	First Ply Failure = Erstschichtversagen
FVK	Faserverbundkunststoff
IFF	Interfiber Failure = Zwischenfaserbruch
LaRC	Langley Research Center, Bezeichnung für ein Versagenskriterium
LGS	lineares Gleichungssystem
LMF	Laminatmittelfläche
LPF	Last Ply Failure = Totalversagen
LTgSL	Lastmodellbasierte Topologieoptimierung mit generalisiertem Startentwurf und anschließender Laminatmodelloptimierung, neu entwickelte Optimierungsstrategie
MFD	Method of Feasible Directions = Methode der zulässigen Richtungen

MMA	Method of Moving Asymptotes = Methode der beweglichen Asymptoten
MSV	Mehrschichtverbunde
N2N	node-to-node Kontaktflächendiskretisierung
N2S	node-to-surface Kontaktflächendiskretisierung
pDGL	partielle Differentialgleichung
QDC	Quadratic Delamination Criterion
RVE	repräsentatives Volumenelement
S2S	surface-to-surface Kontaktflächendiskretisierung
SIMP	Solid Isotropic Material with Penalization
SKO	Soft Kill Option
SLIDE	Kontakttyp: reibungsfreies Gleiten
SMEAR	unterdrückte Biege-Dehn-Kopplung in der Laminatberechnung
SOP	skalares Optimierungsproblem
SQP	Sequential Quadratic Programming = Sequentielle Quadratische Programmierung
STICK	Kontakttyp: haftend
TB	TIMOSHENKO-Balken
UD	unidirektional
UD-ES	unidirektionale Einzelschicht
VOP	Vektoroptimierungsproblem
ZFB	Zwischenfaserbruch

### **Schreibweisen**

Buchstaben kursiv	Formelzeichen
Buchstaben fett und kursiv	Matrizen
$\vec{(\ )}$	Vektoren
$( )_i, ( )_j$	Zählindex
$( )_i, ( )_k, ( )_n$	1. variabler Index, 2. Größe der $k$ -ten bzw. $n$ -ten Einzelschicht
$( )_z, ( )_D$	Differenzierung zwischen Zug und Druck
$[ ]^T$	transponierter Vektor
$\text{Re}(\ )$	Realteil einer komplexen Größe
$\text{Min}(\ )_{\vec{x}}$	Minimiere über $\vec{x}$

### **Griechische Buchstaben bzw. Formelzeichen**

$\alpha$	Faserwinkel / Faserorientierung
$\beta$	Biegewinkel eines Biegebalkens
$\gamma$	Winkel eines Kreisausschnitts

$\vec{\varepsilon}$	Verzerrungen im lokalen 1,2,3-Schichtkoordinatensystem zusammengefasst im Spaltenvektor $\vec{\varepsilon} = [\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{33} \quad \gamma_{23} \quad \gamma_{13} \quad \gamma_{12}]^T$
$\vec{\varepsilon}_{\text{ESZ}}$	Verzerrungen im lokalen 1,2,3-Schichtkoordinatensystem für den ebenen Spannungszustand zusammengefasst im Spaltenvektor $\vec{\varepsilon}_{\text{ESZ}} = [\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \gamma_{12}]^T$
$\vec{\varepsilon}_{\text{LMF}}$	Verzerrungen der Laminatmittelfläche im globalen $x,y,z$ -Laminatkoordinatensystem zusammengefasst im Vektor $\vec{\varepsilon}_{\text{LMF}} = [\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \gamma_{xy}]_{\text{LMF}}^T$
$\zeta, \xi$	lokale Koordinaten in der Kontaktfläche
$\theta$	Neigungswinkel der 2-Achse zur Bruchebene
$\theta_{\text{Bruch}}$	Bruchebenenwinkel
$\kappa$	Schubkorrekturfaktor
$\vec{\kappa}_{\text{LMF}}$	Verwölbungen der Laminatmittelfläche im globalen $x,y,z$ -Laminatkoordinatensystem zusammengefasst im Vektor $\vec{\kappa}_{\text{LMF}} = [\kappa_{xx} \quad \kappa_{yy} \quad \kappa_{xy}]_{\text{LMF}}^T$
$\mu$	1. komplexer Parameter, 2. Reibungskoeffizient
$\nu$	Querkontraktionszahl
$\nu_{ij}$	Querkontraktionszahlen in $j$ -Richtung bei Belastung in $i$ -Richtung
$\rho$	Dichte
$\vec{\sigma}$	Spannungen im lokalen 1,2,3-Schichtkoordinatensystem zusammengefasst im Spaltenvektor $\vec{\sigma} = [\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \tau_{23} \quad \tau_{13} \quad \tau_{12}]^T$
$\vec{\sigma}_{\text{ESZ}}$	Spannungen im lokalen 1,2,3-Schichtkoordinatensystem für den ebenen Spannungszustand zusammengefasst im Spaltenvektor $\vec{\sigma}_{\text{ESZ}} = [\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \tau_{12}]^T$
$\vec{\sigma}_H$	Hauptnormalspannungsvektor $\vec{\sigma}_H = \mathbf{S} \cdot \vec{n}_H$ ; $H = \text{I, II, III}$
$\sigma_n$	Normalspannung in der Bruchebene
$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}$	Spannungen im globalen $x,y,z$ -Laminatkoordinatensystem
$\sigma_{\varphi\varphi}$	Umfangsspannung
$\tau_{n1}, \tau_{nt}$	Schubspannung in der Bruchebene parallel bzw. quer zur Faser
$\varphi$	Umfangsrichtung im Zylinderkoordinatensystem $r, \varphi, z$
$\phi'$	komplexe Funktion
$\chi$	normierter Dichtefaktor, Materialfüllgrad, normierte Elementdichte
$\psi$	Drehung um die $y$ -Achse
$\Omega, \omega$	Basiswinkel und Winkelbereich

**Lateinische Buchstaben bzw. Formelzeichen**

<b>A</b>	Fläche
<b>A</b>	Dehnsteifigkeitsmatrix mit den Elementen $A_{ij}$ ( $i, j = 1, 2, 6$ )
<b>b</b>	halbe Kontaktflächenbreite
<b>B</b>	Laminatbreite
<b>B</b>	Koppelsteifigkeitsmatrix mit den Elementen $B_{ij}$ ( $i, j = 1, 2, 6$ )
<b>C</b>	Compliance = globale mittlere Nachgiebigkeit
<b>C</b>	Steifigkeitsmatrix
<b>C<sub>red</sub></b>	reduzierte Steifigkeitsmatrix
<b>d</b>	Durchmesser
<b>D</b>	Biegesteifigkeitsmatrix mit den Elementen $D_{ij}$ ( $i, j = 1, 2, 6$ )
<b>E</b>	Elastizitätsmodul
<b>E<sub>11</sub>, E<sub>22</sub>, E<sub>33</sub></b>	Elastizitätsmodul parallel, quer zur Faser und in Schichtdickenrichtung
<b>f</b>	Bruchfunktionswert, Anstrengung
<b>f(<math>\vec{x}</math>)</b>	Zielfunktion
<b><math>\vec{f}(\vec{x})</math></b>	Zielfunktionsvektor
<b>F</b>	Kraft
<b>F()</b>	Bruchfunktion
<b><math>\vec{F}</math></b>	Gesamtkraftvektor $\vec{F} = [F_x \quad F_y \quad F_z]^T$
<b><math>\vec{h}(\vec{x}), \vec{g}(\vec{x})</math></b>	Gleichheits-, Ungleichheitsrestriktionen
<b>G</b>	Schubmodul
<b>G<sub>12</sub></b>	Schubmodul in der Schichtebene
<b>i</b>	Variable, Anzahl
<b>I<sub>b</sub></b>	Flächenträgheitsmoment
<b>k</b>	Variable, Anzahl
<b>k</b>	Elementsteifigkeitsmatrix
<b>K</b>	Gesamtsteifigkeitsmatrix
<b>l</b>	Bolzenlänge
<b>M<sub>ij</sub></b>	Indentierungsmodul
<b><math>\vec{M}</math></b>	Schnittmomente $\vec{M} = [M_{xx} \quad M_{yy} \quad M_{xy}]^T$ im Laminatkoordinatensystem
<b>n</b>	Variable, Anzahl
<b><math>\vec{n}_H</math></b>	Hauptspannungsrichtungsvektor
<b><math>\vec{N}</math></b>	Schnittkräfte $\vec{N} = [N_{xx} \quad N_{yy} \quad N_{xy}]^T$ im Laminatkoordinatensystem
<b>p</b>	1. Kontaktdruck, 2. Bestrafungsexponent, 3. Flächenlast, 4. Anzahl
<b><math>p_{12Z}, p_{12D}, p_{22D}, p_{22Z}</math></b>	Neigungsparameter zur Anpassung der Bruchfunktionen
<b>p()</b>	Ersatzziel- oder Präferenzfunktion

$q$	1. Variable, 2. Anzahl, 3. Streckenlast
$Q$	Querkraft
$r$	1. Anzahl, 2. radiale Richtung im Zylinderkoordinatensystem $r, \varphi, z$
$R$	Radius
$R_{iZ}, R_{iiD}$	Zug- bzw. Druckfestigkeit einer Schicht in $i$ -Richtung ( $i = 1, 2, 3$ )
$R_{12},$	Schubfestigkeit in der Schichtebene
$R_{13}, R_{23}$	Schubfestigkeit in Schichtdickenrichtung
$R_{2n}, R_{nt}$	wirkebenenbasierte Festigkeiten in der Theorie nach PUCK
$R_{eH}, R_m$	Streckgrenze und Zugfestigkeit
$\vec{R}$	Festigkeiten zusammengefasst in einem Vektor
$\mathbf{S}$	1. Nachgiebigkeitsmatrix mit den Elementen $S_{ij}$ ( $i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ), 2. Spannungstensor $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$
$\mathbf{S}_{\text{red}}$	reduzierte Nachgiebigkeitsmatrix
$t$	1. Schichtdicke, 2. Laminatdicke, 3. Länge der Kontaktfläche
$u, v, w$	Verschiebungen im kartesischen Koordinatensystem $x, y, z$
$U$	Formänderungsenergie
$V$	Volumen
$\vec{v}$	Verschiebungsvektor $\vec{v} = [u \ v \ w]^T$
$W$	Arbeit der äußeren Kräfte
$x, y, z$	Koordinaten eines kartesischen Koordinatensystems
$\bar{x}$	Entwurfsvariablen



# Kapitel 1

## Einleitung

### 1.1 Einführung in das Thema

In weiten Teilen der Technik haben faserverstärkte Werkstoffe und insbesondere die faserverstärkten Kunststoffe (FVK – Faserverbundkunststoff) Einzug genommen. Vor allem ihr Potenzial hinsichtlich Leichtbau ist für die stetig wachsende Verbreitung im technischen Umfeld verantwortlich. Aber auch das steigende theoretische Verständnis für FVK hat dazu beigetragen, die Entwicklungen auf den Gebieten Konstruktion, Optimierung sowie Fertigung und Verarbeitung voranzutreiben.

Sicherlich bieten FVK enormes Leichtbaupotenzial und zahlreiche Einsatzmöglichkeiten, aber auch dieser Werkstoff unterliegt Festigkeitsgrenzen und versagt unter bestimmten Bedingungen. Zudem wird die zuverlässige Vorhersage des Versagens von FVK durch deren Anisotropie und Inhomogenität deutlich erschwert. Anders als bei isotropen Werkstoffen, wie Stahl und Aluminium, ist das Bruchverhalten von FVK deutlich vielschichtiger und erfordert komplexere Versagenskriterien zur genauen Beschreibung. Hierzu sind zahlreiche und teils sehr unterschiedliche Theorien vorhanden, über deren Güte und Gültigkeiten noch Uneinigkeit herrscht. Zudem stellen die werkstoffspezifischen Verbindungstechniken und die hohe Anzahl an Freiheitsgraden hinsichtlich der Gestaltungsmöglichkeiten, wie die Materialauswahl, Anzahl, Dicke, Orientierung und Reihenfolge der Einzelschichten (Halbzeuge des FVK), eine besondere Herausforderung dar.

Die optimale Werkstoffausnutzung, die speziell in Bezug auf Leichtbau und Kostenreduktion wichtig ist, muss somit strukturiert erarbeitet werden, wofür sich eine numerische Strukturoptimierung anbietet. Neben einer mathematischen Formulierung und einer optimierungsgerechten Parametrisierung sind hierzu Spannungs- und Verformungsanalysen der FVK-Struktur notwendig. Der gesamte Optimierungsprozess wird dabei durch geeignete Strategien problemspezifisch angepasst. Durch die optimale fasergerechte Laminatgestaltung und somit die bestmögliche Ausnutzung der Materialeigenschaften, bietet die Optimierung faserverstärkter Strukturen enormes Verbesserungspotenzial für Neuauslegungen oder für Verstärkungen bestehender Strukturen, um insbesondere Versagenslasten zu erhöhen. Spezieller Verstärkungsbedarf besteht hierbei für kritische Kraftübertragungsbereiche in Verbindungen. Für Faserverbundstrukturen kommen Bolzenverbindungen als lösbare Verbindungen zahlreich zum Einsatz und sind damit Bestandteil möglicher Optimierungen.

## 1.2 Stand der Forschung zur Optimierung von Bolzenverbindungen in faserverstärkten Strukturen

Für die Verbesserung der Struktureigenschaften von FVK sind zahlreiche konstruktive Maßnahmen, Gestaltungshinweise und analytische Auslegungshilfen vorhanden (vgl. [Ber92], [Fle03], [Sch07]). Dabei stellen Krafteinleitungselemente in Verbindungen mit FVK, unter denen die Bolzenverbindungen einen wesentlichen Anteil einnehmen, kritische Stellen der Struktur dar. Zur Erhöhung der Versagenslasten müssen insbesondere diese Bereiche verstärkt werden. Für Bolzenverbindungen in faserverstärkten Strukturen können Stützelemente, Metallschichten oder, wie in Bild 1.1 dargestellt, Schlaufen verwendet werden (vgl. [Bot14], [Fas08], [Wie07] S.807ff, [Sch07] S.529ff).

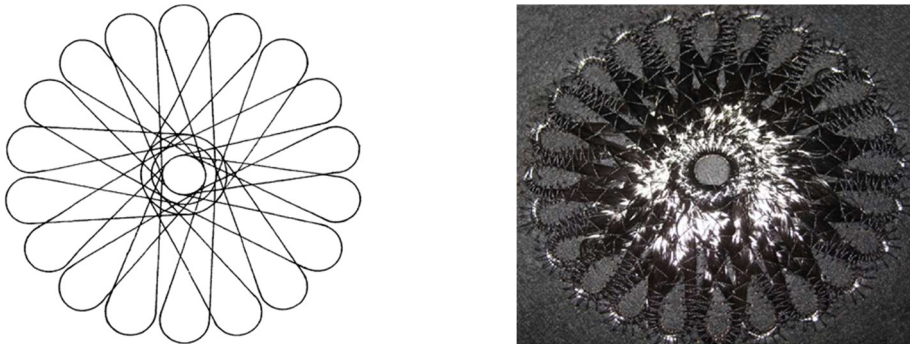


Bild 1.1: Patentierte Schlaufenverstärkung einer Bolzenverbindung mit Kohlenstofffasern  
(Angaben zum Patent in [Fas08])

In [Tos00] wird eine vorhandene Bolzenverbindung mit zusätzlichen Schichten, die an die Lastpfade bzw. herrschenden Spannungen ausgerichtet werden, verstärkt. Mit der Faserausrichtung hinsichtlich der dominierenden Hauptspannung wird für ausgewählte Lastfälle die gewichtsspezifische Versagenslast erheblich gesteigert.

In [Göt00] werden schmale FVK-Streifen zur Reduktion der Kerbspannungen an gelochten Scheiben eingesetzt. Diese Streifen orientieren sich ebenfalls an den Hauptspannungstrajektorien der belasteten Scheibe. Im Vergleich zu Referenzanordnungen kann mit dieser Orientierung der Streifen die stärkste Erhöhung der Versagenslast erreicht werden.

Neben den erwähnten Möglichkeiten erfolgt die systematische Verbesserung oder Verstärkung bestehender Strukturen meist mit Hilfe der Strukturoptimierung.

### ***Mittels Strukturoptimierung zur optimalen Auslegung von FVK***

Mit Beginn der Entwicklung geeigneter Kriterien zur Festigkeitsbeurteilung von FVK kann eine optimale Werkstoffausnutzung im Optimierungsprozess fokussiert werden. Jedoch besteht aufgrund verschiedener Festigkeitshypothesen auch eine Abhängigkeit der Optimierungsergebnisse von dem als Restriktion verwendetem Versagenskriterium. In [Lop09]



wird dieser Zusammenhang mit drei, als Restriktion definierten Kriterien (Maximalspannungskriterium,  $TSAI^1$ - $WU^2$ -Kriterium und Kriterium nach PUCK<sup>3</sup>) aufgezeigt. Dabei werden zwei Optimierungsprobleme behandelt, welche die Minimierung der Masse bzw. die Minimierung der Materialkosten zum Ziel haben.

Ein erster Beitrag zur Strukturoptimierung von FVK unter Berücksichtigung eines Versagenskriteriums ist bereits in [För72] zu finden. Dabei werden auf analytische Weise, unter Einbeziehung von Bruchkriterien, die Möglichkeiten der Optimierung eines mehrschichtigen Laminats mit Glasfaserverstärkung untersucht. Ausgangspunkt der Untersuchung ist eine ebene Beanspruchung eines Laminats, das durch die Schichtanzahl, die Schichtdicken und die Schichtwinkel charakterisiert ist. Das Ziel der Optimierung ist, unter Verwendung der ersten Ansätze von PUCK für ein Bruchkriterium (vgl. [Puc69]), ein optimaler Laminataufbau mit maximaler Anstrengung aller Schichten. Diese analytische Herangehensweise wird jedoch mit steigender Anzahl an Entwurfsvariablen und deren Interaktion deutlich erschwert. Abhilfe schaffen hierbei numerische Optimierungsverfahren, die vorwiegend rechnerunterstützt mit Hilfe der Finiten Elemente Methode (FEM) durchgeführt werden. Die FEM zur Modellierung und Analyse faserverstärkter Strukturen ist bereits Stand der Technik, die numerische Strukturoptimierung von FVK ist jedoch noch in der Entwicklung. Frühe Untersuchungen dazu sind unter anderem in [Kna89] zu finden. Dabei werden durch den Einsatz kommerzieller FE-Programme, die mit einem faserverbundspezifischen Pre- und Postprozessor erweitert sind und mit einem eigens entwickelten Optimierungsmodul gesteuert werden, die Verbesserungsmöglichkeiten bei FVK aufgezeigt. An einigen realen faserverstärkten Bauteilen wird durch Veränderung von Schichtwinkeln und -dicken sowie Vorgabe der Geometrie, Werkstoffanstrengung, Steifigkeit oder des Laminataufbaus versucht, definierte Ziele zu erreichen. Relevante Zielgrößen sind in den Beispielen vorwiegend die Steifigkeit und die Werkstoffanstrengung, wofür ein eigens erweitertes Bruchkriterium verwendet wird. Die Analysen beschränken sich hierbei auf Betrachtungen der Einzelschichten als Ganzes, womit das optimierte Laminat stets aus unidirektionalen Lagen mit konstanten Dicken und Winkeln aufgebaut ist.

Dagegen wird in [Jia08] eine einheitliche Methode zur simultanen Optimierung der Topologie und der Faserausrichtung vorgestellt. Dazu wird die Zielfunktion, die globale mittlere Nachgiebigkeit, in Abhängigkeit des Materialfüllgrads (Entwurfsvariable der Topologieoptimierung, vgl. Kapitel 2.3) und des Faserwinkels jedes Elements formuliert. Ein einfaches zweidimensionales Anwendungsbeispiel zeigt eine plausible Materialverteilung und Faserorientierung. Eine weitere Anwendung dieser Methode ist in [Jia19] aufgeführt. Neben einer

---

<sup>1</sup> Tsai, Stephen W. (1929); US-amerik. Ingenieur

<sup>2</sup> Wu, Edward Ming-Chi (1938 – 2009); US-amerik. Ingenieur

<sup>3</sup> Puck, Alfred (1927 – 2021); dt. Ingenieur

Erweiterung der Methode für die additive Fertigung wird der Einsatz für einen dreidimensional betrachteten, einseitig eingespannten Balken demonstriert, wobei die Optimierung als mathematische Programmierung in Matlab erfolgt.

Eine weitere Methode zur Optimierung von FVK wird in der kommerziellen FEM-Programmu­mgebung HyperWorks umgesetzt (vgl. [Alt18b] S.135ff). Der dreiphasige Optimierungsprozess beruht auf einer elementweisen Dickenoptimierung („FreeSize“) des Schalenelementmodells eines Laminats, darauf aufbauender diskreter Schichtdickenoptimierung („Size“) und abschließender Optimierung der Schichtreihenfolge („Shuffle“). Die Schichtwinkel des Laminats werden demnach von Beginn an festgelegt und bleiben im gesamten Ablauf unverändert. Diese etablierte Vorgehensweise zeigt gute Verbesserungsmöglichkeiten zur Laminatgestaltung auf, kann aber durch die fest definierten Faserwinkel nicht das bestmögliche Ergebnis liefern.

Ein weiteres Optimierungskonzept hinsichtlich gleichmäßig verteilter Spannungen ist die vom Baumwachstum inspirierte CAO-Methode (CAO: Computer Aided Optimization). Die Erweiterung dieses Konzepts auf FVK mündet in der CAIO-Methode (CAIO: Computer Aided Internal Optimization), mit der der Faserverlauf in Hauptspannungsrichtung arrangiert wird (näheres zur Methode in [Kri92], [Reu99] und [Har08] S.194ff). Mit dieser lastgerechten Ausrichtung der Fasern werden die Schubspannungen stark reduziert, wodurch die Festigkeit erhöht wird. In [Mol16] wird die CAIO-Methode in ein kommerzielles FE-Programm implementiert, womit an verschiedenen Beispielen das Potential zur Erhöhung der Versagenslasten gezeigt wird. Weitere Anwendungsbeispiele hierzu sind in [Völ20] dargestellt. Ein entwickelter und programmtechnisch umgesetzter zweistufiger Optimierungsprozess auf Basis der CAIO-Methode und eines evolutionären Algorithmus zur Optimierung (Schichtdicken und Schichtreihenfolgen) des damit ermittelten Laminatentwurfs ist in [Kle17] aufgeführt. Die verwendeten Beispiele zeigen enorme Masseinsparungen.

Einen anderen naturanalogen Optimierungsprozess bietet die SKO-Methode (SKO: Soft Kill Option, näheres in [Bau92]). In [Thi06] wird diese zur Topologie- und Faserwinkeloptimierung angewendet, um unter anderem eine lokale Verstärkung zu erreichen. Dabei wird auf einen schichtwinkeloptimierten oder frei gewählten Laminataufbau eine Verstärkungsschicht aufgebracht, deren Topologie in einer Topologieoptimierung mittels SKO-Methode ermittelt wird. Die Faserorientierung dieser Schicht resultiert aus dem besten Entwurf der Topologieoptimierungen mit jedem Winkel des Entwurfsraums. Zu dem Startentwurf mit der ersten Verstärkungsschicht kommen weitere Zulagenschichten nach demselben Prinzip hinzu, wobei die Materialmenge über den Füllgrad gesteuert wird.

Eine derartige lagenweise Topologieoptimierung wird in [Han00] mit Hilfe eines heuristischen Optimierungsalgorithmus nicht zur adaptiven Verstärkung eines Laminats, sondern zur gewichtsminimalen Auslegung einer faserverstärkten Struktur verwendet. Basis ist dabei ein FE-Modell mit Schalenelementen, denen stets ein quasiisotropes Laminat  $[0^\circ/\pm 45^\circ/90^\circ]_s$

mit veränderlichen Schichtdicken zugeordnet ist. In Phase 1 der Optimierung werden je Element die Schichten entfernt, die von der für den Lastfall ermittelten Hauptspannungsrichtung des Elements nicht tolerierbar abweichen. In Phase 2 werden die verbleibenden Schichten je Element entnommen, wenn deren Hauptspannung unter einer Spannungsgrenze, die iterativ erhöht wird, bis es zum Schichtversagen nach dem TSAI-WU-Kriterium kommt, liegt. Damit werden wenig beanspruchte Schichten herausgenommen. Überbeanspruchte Schichten werden dagegen durch günstigere Schichtwinkel ersetzt.

Weiterführende Untersuchungen zur Strukturoptimierung von FVK sind in [Kök13] aufgeführt. Hierbei wird die heuristische Topologieoptimierung mit erweiterten bidirektionalen evolutionären Strukturoptimierungsalgorithmen (BESO-Algorithmen) eingesetzt, um faserverstärkte Strukturen zu optimieren. Das Ziel dabei ist die Minimierung der Nachgiebigkeit unter Vorgabe eines Zielvolumens. Innerhalb der Topologieoptimierung werden zunächst die Faserwinkel entlang der Hauptdehnungen ausgerichtet und anschließend wird jedem finiten Element der gewonnenen Topologie ein Laminat zugewiesen. Das Laminat wird hierbei durch ein Verhältnis der Steifigkeiten längs und quer zur Faser beschrieben, welches sich aus einem Laminataufbau mit verschiedenen Faserorientierungen der Einzelschichten ergibt. An verschiedenen Beispielen kann damit gezeigt werden, dass die entwickelten Algorithmen und Methoden, die sowohl im zweidimensionalen wie auch im dreidimensionalen Raum anwendbar sind, vernünftige Ergebnisse liefern. Allerdings erstreckt sich die Anwendung der Methode bislang auf einen einzigen Lasteinleitungspunkt.

Weitere Optimierungen von FVK mit evolutionären Algorithmen und deren Gliederung sind in [Kel10] zu finden. Dabei wird auch, durch eine mittels Splines modellierte Schichtform, die hohe Sensitivität der Bauteiltopologie auf die üblichen Zielgrößen aufgezeigt. Schichtdicken und Schichtwinkel besitzen hierbei einen untergeordneten Einfluss.

In [Ulk17] werden stochastische naturanaloge Optimierungsheuristiken zur Auslegung von FVK angewendet. Am Beispiel der Winkeloptimierung eines mehrschichtigen Laminats hinsichtlich einer minimalen Anstrengung nach dem FMC-Kriterium werden die Möglichkeiten und die Funktionsweise eines Ameisenalgorithmus aufgezeigt. Für jeden Schichtwinkel wandern die Ameisen zu einem im Entwurfsraum möglichen Winkel und hinterlassen, je nach Güte ihres Pfades im Hinblick auf die Zielgröße, Marker für die nachfolgenden Ameisen. Mit der Verteilung der Ameisen (Wahrscheinlichkeitsverteilung) im Entwurfsraum werden die zu erwartenden Schichtorientierungen erreicht und ihre Sensitivitäten gegenüber einer Winkeländerung aufgezeigt. Diese analytische Optimierung basiert auf konstanten Schichtgrößen und kann an ein FE-Programm nur in einem zweistufigen Prozess über externe Skripte und Dateiaustausch gekoppelt werden (vgl. [Ulk17] S.57ff).

Einen Überblick über weitere Möglichkeiten FVK-spezifischer Optimierungsansätze, deren Einordnung und über aktuelle Entwicklungen findet man in [Ghi09], [Ghi10], [Awa12] und [Kök13] S.25ff sowie in den Tagungsbänden der WCSMO [Sch18] und in EngOpt [Rod18].

Die bisher aufgeführten Optimierungsansätze erlauben grundsätzlich eine Optimierung von Faserverbundstrukturen, womit eine prinzipielle Anwendung der Konzepte mit einer angepassten Vorgehensweise auch für Bolzenverbindungen in faserverstärkten Strukturen denkbar ist.

### 1.3 Motivation und Ziel der Arbeit

Der obige Abriss der Literatur zeigt die vielseitigen Optionen zur Optimierung von FVK und damit auch von Bolzenverbindungen in faserverstärkten Strukturen. Trotzdem besteht noch weiterer Entwicklungsbedarf. Die Auslegungsmöglichkeiten von FVK sind, wie der Werkstoff selbst, komplex und deshalb sind vorhandene Optimierungsansätze häufig speziell zugeschnittene Prozesse oder nur für einfache Gegebenheiten anwendbar. Zudem werden oft eigene Programme, Routinen oder Zusatzmodule für kommerzielle Programme benötigt, um gewisse Optimierungsprobleme zu lösen. Eine ganzheitliche Betrachtung der Optimierung faserverstärkter Strukturen innerhalb einer vorhandenen kommerziellen Programmumgebung ist somit nur eingeschränkt möglich. In Bezug hierzu können aus der Literatur zur Optimierung von FVK, insbesondere die in Kapitel 1.2 aufgeführten, positiven (+), neutralen (•) und negativen (–) Erkenntnisse gezogen werden:

- + Eine lastgerechte, an der Hauptspannungsrichtung orientierte, Faserausrichtung ist in der Regel zielführend.
- + Eine adaptive, lagenweise Optimierung stellt eine einfache und lösungsorientierte Strategie dar.
- + Die Optimierungsergebnisse einfacher Strukturen entsprechen qualitativ bekannten Konstruktionshinweisen.
- Die Topologie und die Gestalt der faserverstärkten Struktur beeinflussen das Laminatverhalten stärker als die Schichtgrößen.
- Die Festigkeiten werden selten zur Zielformulierung genutzt und dienen eher als Restriktionen.
- Evolutionäre Optimierungsalgorithmen werden vermehrt zur Variation verschiedener Entwurfsvariablen eingesetzt. Deterministische Optimierungsalgorithmen sind eher weniger verbreitet.

An die genannten Feststellungen soll diese Arbeit anknüpfen und einen Beitrag zur Optimierung von FVK liefern. Daneben sollen weiterführende Erkenntnisse hinsichtlich des Einflusses von Versagenskriterien auf das Optimierungsergebnis gewonnen werden. Die grundsätzliche Forschungsfrage, der sich diese Arbeit widmet, lautet jedoch:

*Erlaubt eine Vorgehensweise mit einer vorhandenen kommerziellen Software unter Beachtung einer bestmöglichen Werkstoffausnutzung eine optimale Auslegung einer faserverstärkten Struktur und inwieweit ermöglicht dieses Vorgehen die Erhöhung der Versagenslasten von Bolzenverbindungen?*

Damit ist das Ziel der Arbeit eine grundsätzliche **Vorgehensweise zur Optimierung faserverstärkter Strukturen zu entwickeln**, die insbesondere auf Bolzenverbindungen abgestimmt ist und innerhalb einer vorhandenen kommerziellen Software erfolgt. Das Bestreben dieses Prozesses soll stets eine bestmögliche Werkstoffausnutzung sein, womit eine Bruchanalyse und die Werkstofffestigkeiten eine fundamentale Rolle einnehmen. In diesem Optimierungsablauf ist neben einer optimalen Laminatauslegung auch die Verstärkung vorhandener Strukturen involviert. Damit sollen die Versagenslasten praxisrelevanter Strukturen erhöht werden ohne das Ausgangsbauteil zu verändern. Die Erprobung und Demonstration der zu entwickelnden Methode erfolgt an einem einfachen akademischen Beispiel einer Kragplatte, für die ein optimaler Entwurf bestimmt werden soll. Dadurch sollen der Optimierungsprozess und die Plausibilität der Ergebnisse leicht nachvollzogen werden.

Mit Anwendung der Methode an einer Bolzenverbindung wird das Hauptziel der Arbeit verfolgt: Die **Bestimmung einer optimalen Laminatverstärkung für eine Bolzenverbindung in einer faserverstärkten Struktur**. Hierfür ist im Vorfeld eine detaillierte Untersuchung dieses Krafteinleitungselements durchzuführen, wobei die Bolzenverbindung auszulegen, zu modellieren und zu idealisieren ist. Eine realitätsnahe Betrachtung bedingt hierbei eine Analyse der Kontaktsituation. Die theoretischen Grundlagen hierzu sind zu erarbeiten. Zudem sollen weitere Grundlagen im Hinblick auf die Strukturoptimierung, die FEM zur Strukturanalyse, den Werkstoff FVK und dessen Mechanik bereitgestellt werden.

Die Bolzenverbindung bietet sich als praxisnahes Anwendungsbeispiel besonders an, da es eine recht häufig eingesetzte Verbindungstechnik ist. Als Krafteinleitungselement wird die Bolzenverbindung vorwiegend in der Automobilindustrie, in der Luft- und Raumfahrt sowie im Bereich der Windkraftanlagen verwendet. Beispiele hierzu sind Autoquerlenker, Flugzeugflügelrippen, Raketenboostergehäuse und Rotorblattanschlüsse (vgl. [Töw15], [Bot14] S.126, [Die07] S.24, [Sch07] S.564 und weitere Beispiele in [Fin07]). Rechts in Bild 1.2 ist exemplarisch dazu ein Ausschnitt der A-Säule der in Hybridbauweise hergestellten Karosserie der BMW 7er Reihe dargestellt. Diese besteht teilweise aus kohlenstofffaserverstärktem Kunststoff, der mit den traditionellen Karosseriewerkstoffen Stahl und Aluminium häufig über Bolzenverbindungen gefügt wird. Links in Bild 1.2 ist hierzu eine schematische Darstellung aufgeführt.

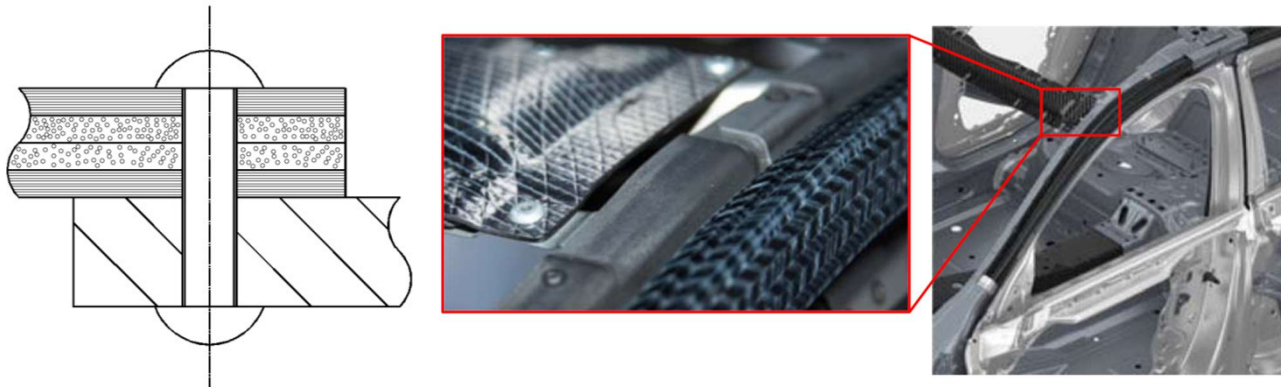


Bild 1.2: Schematische Darstellung (links) und Praxisbeispiel (rechts) einer Bolzenverbindung für eine Automobilkarosserie (in Anlehnung an [Pud15])

## 1.4 Aufbau der Arbeit

Die Basis der Arbeit wird mit den theoretischen Grundlagen in **Kapitel 2** geschaffen. Dabei werden, neben der Vorstellung des Werkstoffs selbst, das mechanische Werkstoff- und Bruchverhalten eines FVK beschrieben. Ebenso wird auf die Verbindungstechniken für FVK, im speziellen auf die Bolzenverbindung als Krafteinleitungselement, und deren Modellierung und Analyse mittels FEM (Finite Elemente Methode) eingegangen. Besonderes Augenmerk wird zudem auf das Kontaktproblem einer Bolzenverbindung zur detaillierten Betrachtung dieser Krafteinleitung in die faserverstärkte Struktur gerichtet. Abschließend werden allgemeine Aspekte einer Strukturoptimierung und spezielle Optimierungsverfahren, wie die Topologieoptimierung und die Parameteroptimierung von FVK, behandelt.

Auf diesen Unterbau bauen die folgenden Kapitel auf, wobei als wichtiger Bestandteil der Arbeit die Bolzenverbindung in **Kapitel 3** ausgiebig behandelt wird. Neben der Auslegung der Bolzenverbindung und der Modellierung der Einzelkomponenten (Laminat, Bolzen, Kontakt der Verbindung) werden Approximationsmöglichkeiten für den Kontakt zum FVK vorgestellt und diskutiert.

In **Kapitel 4** wird die entwickelte Methode zur Optimierung faserverstärkter Strukturen vorgestellt. Dabei wird zunächst die Strategie bzw. der Ablauf mit den allgemeinen Aspekten in den Einzelschritten vorgestellt und im Anschluss an dem akademischen Beispiel einer Krag-scheibe demonstriert. Die Ergebnisse des Krag-scheibenbeispiels und die Methode selbst werden schließlich diskutiert. Hierzu werden verschiedene Vergleichsmodelle und ein bewährter Referenzprozess verwendet.

Mit dem vollständigen Modell der Bolzenverbindung aus Kapitel 3 kann die Optimierung gemäß der entwickelten Methode erfolgen. Hierbei wird in **Kapitel 5** in einem zweistufigen Optimierungsprozess, bestehend aus Topologie- und Laminatoptimierung, und in diversen Modellierungszwischenschritten eine optimale Verstärkung der Bolzenverbindung ermittelt.

Die anschließende Kontaktanalyse der optimierten Verbindung stellt das Ergebnis des entwickelten Prozesses dar, das schlussendlich anhand von Vergleichsmodellen und einem etablierten Referenzprozess bewertet und diskutiert wird. Der zentrale Teil der Arbeit mit dem wesentlichen Inhalt der Kapitel 2 bis 5 ist in Bild 1.3 dargestellt. Darin sind zudem der Aufbau und die Zusammenhänge der einzelnen Blöcke zu sehen.

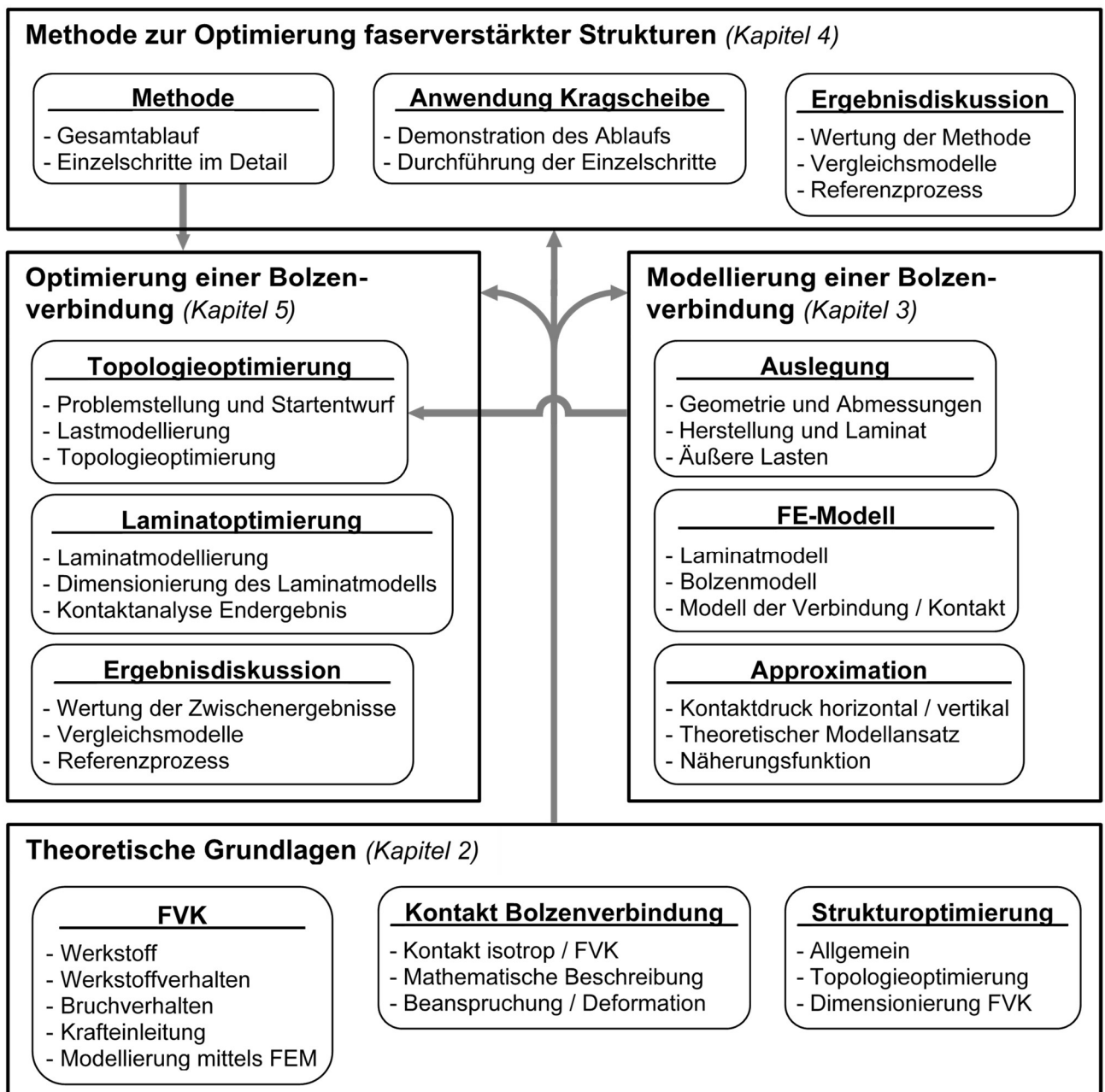


Bild 1.3: Inhaltlicher Aufbau der Arbeit und die Verbindungen zwischen den Kapiteln

Die Zusammenfassung der Arbeit erfolgt in **Kapitel 6**. Zusätzlich wird die entwickelte Methode kritisch beleuchtet und ein Fazit der Arbeit gezogen. Ein Ausblick für weiterführende Arbeiten rundet schließlich das Kapitel ab.

Im **Anhang** sind ergänzende Informationen zu den in Kapitel 2.1.3 aufgeführten Versagenskriterien für FVK, eine Abschätzung der Bruchkräfte der in Kapitel 2.1.4 beschriebenen Versagensarten bei Bolzenverbindungen sowie die Parameter für den Aufbau der OptiStruct-Modelle der Kragsscheibe (Kapitel 4) und der Bolzenverbindung (Kapitel 3, 5) angegeben.



# Kapitel 2

## Theoretische Grundlagen

### 2.1 Der faserverstärkte Kunststoff

#### 2.1.1 Werkstoffkundliche Betrachtung und Herstellung

Unter den Verbundwerkstoffen besitzen insbesondere die faserverstärkten Kunststoffe enormes Leichtbaupotenzial. Dieser Faser-Kunststoff-Verbund bzw. Faserverbundkunststoff (FVK) kann durch die Synergie beider Verbundpartner ein verbessertes Materialverhalten hinsichtlich Steifigkeit, Festigkeit, Wärmeausdehnung und anderen Werkstoffeigenschaften generieren, welches das der Einzelkomponenten weit übertrifft. Im Verbund bildet der Kunststoff die Einbettungsmasse (Matrix), die für die Fixierung und den Schutz der Faser zuständig ist, während die Faser die mechanischen Lasten übernimmt. Als Matrixwerkstoff werden hauptsächlich duro- und thermoplastische Polymere eingesetzt, wobei Epoxidharze (Duromere) vorwiegend verwendet werden (näheres in [Mat14] S.38ff). Unter den Faserwerkstoffen für FVK sind in erster Linie Glas-, Aramid- und Kohlenstofffasern (C-Faser) im Einsatz. Dabei können speziell die C-Fasern aufgrund der herausragenden spezifischen Eigenschaften die Steifigkeits- und Festigkeitsanforderungen höher belasteter Strukturen erfüllen und damit zur Gewichtseinsparung beitragen. Näheres zu den Grundkomponenten eines Faserverbundkunststoffs ist in [Sch07] S.21ff und S.83ff aufgeführt.

Für die Einbettung der Fasern in der Matrix stehen verschiedene Faserhalbzeuge, wie Gelege, Gewebe und Rovings (näheres in [Sch07] S.57ff und [Mat14] S.224ff), zur Verfügung. Die Anordnung der Fasern kann dabei mit Lang- und Endlosfasern ( $l > 1$  mm bzw.  $l > 50$  mm) orientiert oder mit Kurzfasern ( $l < 1$  mm) ohne Vorzugsrichtung erfolgen. Eine gerichtete Anordnung der Fasern kann hierbei die richtungsabhängigen Werkstoffeigenschaften jedoch gezielter ausnutzen und so deutlich höhere Steifigkeits- und Festigkeitswerte erreichen. Dafür sind die Fasern in Richtung der Belastung anzuordnen. Eine Abweichung von dieser idealen Anordnung verringert die Tragwirkung der Faserverstärkung bis zum Minimum bei einer Belastung quer zur Faser.

Die in der Matrix eingebetteten Faserhalbzeuge bilden einen Verbund, der häufig als dünne, flächige Einzelschicht (ES) ausgebildet ist. Wenn die Fasern dabei parallel in eine Vorzugsrichtung angeordnet sind, ergibt sich eine unidirektionale Einzelschicht (UD-ES). Mit der Stapelung dieser Einzelschichten werden Mehrschichtverbunde (MSV) erzeugt, die das Laminat bilden. Die Anordnung der ES zum MSV ist in Bild 2.1 dargestellt. Darin ist exemplarisch der Aufbau einer ES in Form eines UD-Geleges verdeutlicht. Der MSV ist dabei aus verschiedenen UD-ES aufgebaut. Je nach Orientierung der UD-ES sind somit uni-, bi- oder

multidirektionale Laminare, wie auch quasiisotrope Laminare, möglich. Dabei ist ein ausgewogener oder bezüglich einer Mittelebene symmetrischer Aufbau für die Laminareigenschaften entscheidend. Näheres zu gebräuchlichen Laminartypen ist in [Sch07] S.232ff aufgeführt.

Die Fertigung einer ES erfolgt durch Tränkung der Fasern bzw. Faserhalbzeuge mit dem flüssigen Matrixwerkstoff. Der MSV entsteht hierbei durch die schichtweise Verarbeitung der Fasern und die anschließende Aushärtung des Verbunds. Dabei können die Faserhalbzeuge in unterschiedlichen Zuschnitten vorliegen, wobei Bänder (Tapes) und Flächenstücke (Patches) häufig eingesetzt werden. Daneben werden für die Herstellung eines Laminats vorgetränkte Faserhalbzeuge (Pregregs) verwendet. Die Vorteile liegen dabei unter anderem in der reproduzierbaren Qualität und den engen geometrischen Toleranzen des Halbzeugs (näheres in [Sch07] S.145ff und S.156f). Daneben bieten sich Pregregs besonders zur maschinellen Fertigung an, da der Prozess der Fasertränkung nicht realisiert werden muss. Mit den automatisierten Ablegeverfahren, wie dem

- Fiber Patch Placement (FPP) (näheres in [Mey08] S.71ff),
- Tailored Fiber Placement (TFP) (näheres in [Mat98] S.775ff),
- Automated Tape Laying (ATL) (näheres in [Len14] S.72ff),
- Automated Fiber Placement (AFP) (näheres in [Len14] S.84ff),

kann eine schnelle Fertigung mit individuell gestalteten Faserverläufen leicht realisiert werden. Weitere Fertigungsverfahren sind in [Ber92] und [Mat14] aufgeführt.

Der fertigungsbedingte Einfluss auf die Eigenschaften von ES und MSV wird für eine mechanische Modellbetrachtung in der Regel idealisiert. Die grundsätzliche Modellierung kann dabei in unterschiedlichen Betrachtungsebenen erfolgen. Mit der repräsentativen Längenangabe der jeweiligen Ebene wird die Detailierung der Modellierung definiert und somit eine Längenskala festgelegt. Für einen FVK bietet sich eine dreistufige Skala an: die Mikro-, Meso- und Makroebene (vgl. Bild 2.1). Die Mikroebene mit dem Faserdurchmesser als bestimmende Größe der Längenskala beinhaltet die Eigenschaften und die Interaktion von Faser und Matrix. Auf der Mesoebene werden die Schichteigenschaften betrachtet, womit die Schichtdicke die bestimmende Größe der Skala ist. Das Laminat als Ganzes spiegelt wiederum mit seinen Abmessungen die Makroebene wieder. Weitere Eigenschaften der drei Ebenen sind in [Cam08] S.3ff und in [Dan06] S.27f aufgeführt. Betrachtungsebenen unterhalb der Mikroebene (Nano-, Molekularebene), also die Detailbetrachtung der Grundkomponenten ist Bestandteil der Werkstoffkunde und im Weiteren nicht von Bedeutung. Eine Betrachtung oberhalb der Makroebene (Bauteil-, Strukturebene) ist in erster Linie werkstoffunabhängig und wird in nachfolgenden Kapiteln als Randwertproblem behandelt. Eine Darstellung der drei relevanten Betrachtungsebenen ist in Bild 2.1 aufgeführt.

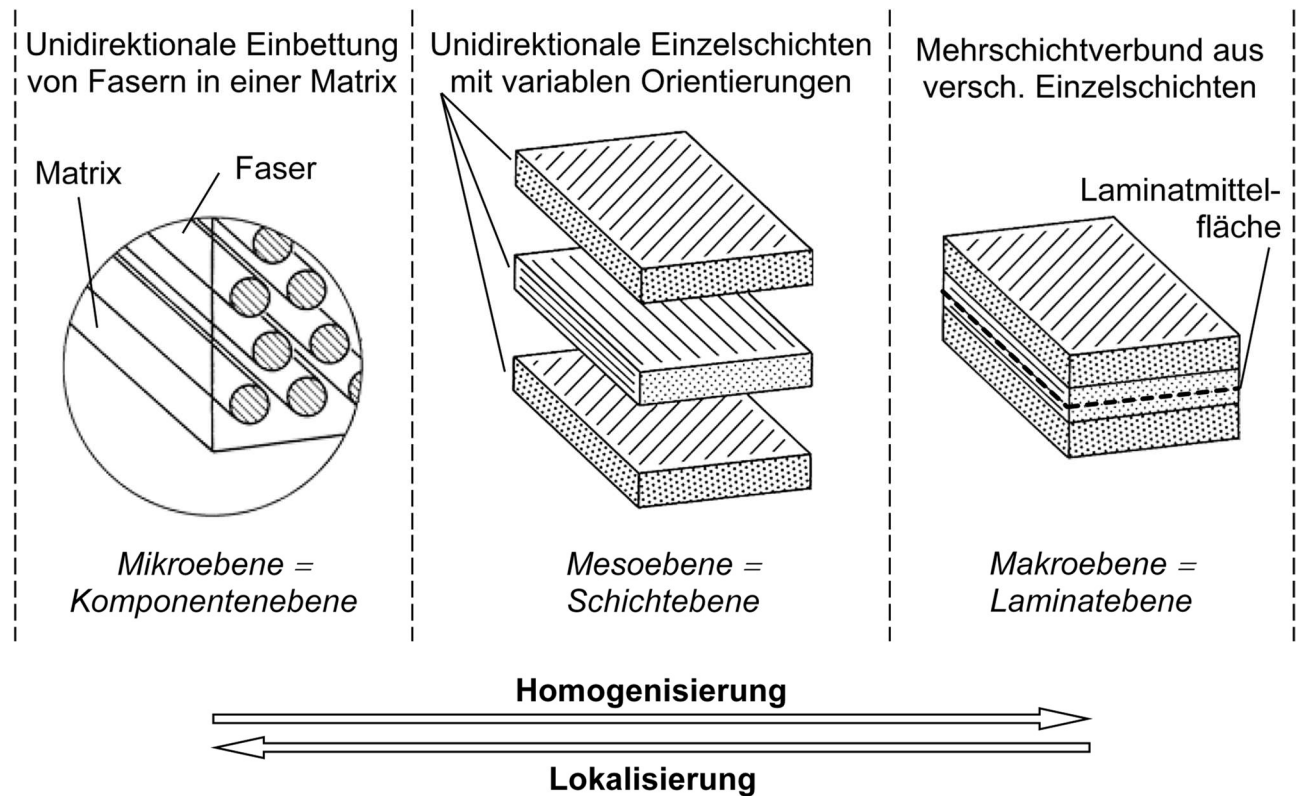


Bild 2.1: Skalen der Betrachtung mit Aufbau einer Einzelschicht und die Anordnung von Einzelschichten zum Mehrschichtverbund

Die Modellierung des mechanischen Verhaltens auf jeder Ebene erfolgt auf gewohnte Weise mit Hilfe der Kontinuumsmechanik, wie beispielsweise in [Dan06] S.43ff und S.63ff angegeben. Jede Betrachtungsebene hat aber auch ihre spezifischen Einflussgrößen auf das mechanische Verhalten. Beispielsweise ist auf der Mikroebene die Verteilung von Fasern in der Matrix, die sogenannte Faserpackung (näheres in [Sch07] S.188f), von enormer Relevanz. Auf der Mesoebene spielt diese wiederum keine Rolle, da angenommen wird, dass Fasern und Matrix zu einer homogenen Schicht verschmolzen sind. Weitere Idealisierungen auf Schichtebene sind in [Sch07] S.14 aufgeführt. Für die Übergänge zwischen den Ebenen sind weitere Methoden erforderlich, die dann auch eine Untersuchung über mehrere Betrachtungsebenen erlauben. Hierbei spricht man von skalenübergreifender Modellierung bzw. Multiskalenmodellierung. Details hierzu finden sich in [Käs09] S.2 und in [Cam08] S.30. Der üblichere Übergang auf die höhere Ebene wird als Homogenisierung bezeichnet. Verfahren hierzu, die vor allem für die Modellierung mit Einheitszelle oder repräsentativem Volumenelement (RVE) eine wichtige Rolle spielen, sind unter anderem in [Käs09] S.22ff und in [Cam08] S.224 aufgeführt. Den einfachsten Homogenisierungsansatz zur Schichtkennwertberechnung (Mesoebene) aus den Materialkennwerten von Faser und Matrix (Mikroebene) bilden die Mischungsregeln (näheres in [Sch07] S.187ff). Um daraus dann das Laminatverhalten (Makroebene) abzuleiten, wird häufig die klassische Laminattheorie eingesetzt. Der umgekehrte Weg zur höherer Detaillierung wird als Lokalisierung bezeichnet. Ein

bekanntes Verfahren hierfür ist die Finite Elemente Methode (FEM): Aus einem beanspruchtem Kontinuum wird das Deformationsverhalten diskreter Punkte ermittelt.

Im Weiteren wird die Modellierung von FVK auf Mikro-, Meso- und Makroebene in Kapitel 2.1.5 behandelt. Mechanische Grundlagen, Steifigkeitsbestimmung und Festigkeitsbeurteilung sind in Kapitel 2.1.2 und 2.1.3 aufgeführt, während in Kapitel 2.1.4 die Besonderheiten der Krafeinleitung in faserverstärkte Strukturen dargestellt sind.

### 2.1.2 Elastizitätsgesetz und klassische Laminattheorie

Zur Beschreibung der elastischen Eigenschaften eines Kontinuums wird der Zusammenhang zwischen den Spannungen  $\vec{\sigma}$  und den Verzerrungen  $\vec{\varepsilon}$  mit

$$\vec{\sigma} = \mathbf{C} \cdot \vec{\varepsilon} \quad \text{bzw.} \quad \vec{\varepsilon} = \mathbf{S} \cdot \vec{\sigma} \quad (2.1)$$

angegeben. Die dabei formal in einem Vektor zusammengefassten Spannungen sind in Bild 2.2 an einem Volumenelement eingezeichnet. Die daraus resultierenden Verzerrungen sind ebenso angegeben, wobei die Indizierung der der Spannungen entspricht.

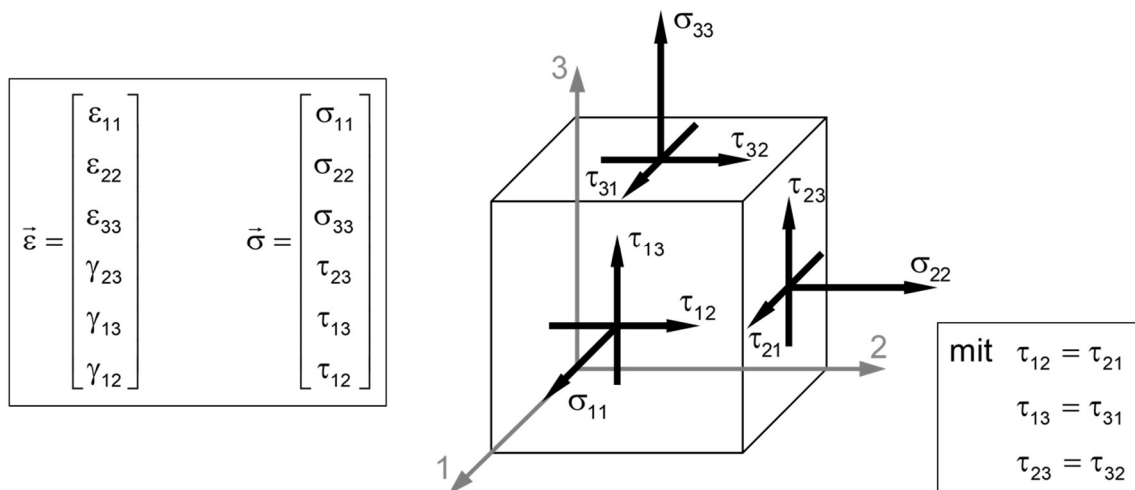


Bild 2.2: Spannungen am Volumenelement mit den dazugehörigen Verzerrungen, die jeweils in einem Spaltenvektor zusammengefasst sind

Für den allgemeinen Fall der vollständigen Anisotropie ist die Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{C}$  bzw. die Nachgiebigkeitsmatrix  $\mathbf{S}$ , wobei  $\mathbf{S} = \mathbf{C}^{-1}$  gilt, des Elastizitätsgesetzes in Gleichung (2.1) mit 21 unabhängigen Elastizitätskonstanten voll besetzt. Für ein orthotropes Werkstoffverhalten erhält man mit 9 unabhängigen Elastizitätskonstanten die Nachgiebigkeitsmatrix

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

In einer unidirektionalen Einzelschicht (UD-ES) sind die elastischen Eigenschaften, in der Mesoebene betrachtet, in der Ebene senkrecht zur Faserrichtung identisch, womit diese Ebene eine Isotropieebene darstellt. Die UD-ES verhält sich damit **transversal isotrop**. Für die Nachgiebigkeitsmatrix bzw. Steifigkeitsmatrix enthält man damit nur noch 5 unabhängige Elastizitätskonstanten. Mit der 2-3-Ebene (vgl. Bild 2.2) als Isotropieebene folgt für die Nachgiebigkeitsmatrix in Gleichung (2.2)

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{1}{E_{11}}, & S_{22} = S_{33} &= \frac{1}{E_{22}}, & S_{44} &= \frac{2(1+\nu_{23})}{E_{22}}, \\ S_{12} = S_{13} &= -\frac{\nu_{12}}{E_{11}}, & S_{23} &= -\frac{\nu_{23}}{E_{22}}, & S_{55} = S_{66} &= \frac{1}{G_{12}}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Im isotropen Fall erhält man schließlich 2 unabhängige Elastizitäten. Es gilt

$$\begin{aligned} S_{11} = S_{22} = S_{33} &= \frac{1}{E}, & S_{12} = S_{13} = S_{23} &= -\frac{\nu}{E} \quad \text{und} \\ S_{44} = S_{55} = S_{66} &= \frac{1}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Neben dem transversal isotropen Verhalten liegt bei einer UD-ES aufgrund der geringen Dicke (3-Richtung, vgl. Bild 2.2) näherungsweise ein **ebener Spannungszustand (ESZ)** in der 1-2-Ebene vor. Damit kann angenommen werden, dass alle Spannungen in Dickenrichtung verschwinden. Mit  $\sigma_{33} = \tau_{13} = \tau_{23} = 0$  folgt gemäß Gleichung (2.1) für die Schubverzerrungen  $\gamma_{13} = \gamma_{23} = 0$  und für die Normalverzerrung in Dickenrichtung

$$\varepsilon_{33} = \frac{\nu_{12} + \nu_{12}\nu_{23}}{\nu_{12}\nu_{21} - 1} \varepsilon_{11} + \frac{\nu_{12}\nu_{21} + \nu_{23}}{\nu_{12}\nu_{21} - 1} \varepsilon_{22}, \quad (2.5)$$

womit die Nachgiebigkeitsmatrix in Gleichung (2.2) um 3 Zeilen reduziert werden kann. Das Elastizitätsgesetz für eine UD-ES lautet letztlich mit Hilfe der reduzierten Nachgiebigkeitsmatrix  $\vec{\varepsilon}_{\text{ESZ}} = \mathbf{S}_{\text{red}} \cdot \vec{\sigma}_{\text{ESZ}}$  bzw.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{11}} & -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} & \frac{1}{E_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

Durch Inversion der Beziehung oder entsprechende Herleitung erhält man mit der reduzierten Steifigkeitsmatrix  $\vec{\sigma}_{\text{ESZ}} = \mathbf{C}_{\text{red}} \cdot \vec{\varepsilon}_{\text{ESZ}}$  bzw.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \begin{bmatrix} E_{11} & \nu_{12}E_{22} & 0 \\ \nu_{12}E_{22} & E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12}(1 - \nu_{12}\nu_{21}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

Die Gleichungen (2.6) und (2.7) sind im **lokalen Schichtkoordinatensystem** (1,2,3) der Einzelschicht (ES) definiert, womit für die Betrachtung eines Mehrschichtverbunds (MSV) mit unterschiedlichen Orientierungen der ES ein globales Bezugssystem  $x,y,z$  benötigt wird. Mit der Festlegung, dass die  $z$ -Achse und die 3-Achse zusammenfallen, beschreibt der Winkel  $\alpha$  die im mathematischen Sinne positive Drehung vom globalen System ( $x$ -Achse) in das lokale System (1-Achse). Diese **Transformation** ist prinzipiell materialunabhängig und in der Tensorschreibweise für Spannungen und Verzerrungen gleich (näheres in [Sch07] S.210f). Man beachte dabei den Faktor 2 zwischen der tensoriellen und der technischen Schubverzerrung ( $2 \cdot \varepsilon_{12} = \gamma_{12}$ ). Mit der Transformationsmatrix

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \\ \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & -2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \\ -\sin \alpha \cdot \cos \alpha & \sin \alpha \cdot \cos \alpha & \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

kann das Elastizitätsgesetz in den Gleichungen (2.6) und (2.7) mit

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \frac{1}{2} \gamma_{12} \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

im **globalen Laminatkoordinatensystem** angegeben werden, wobei  $\mathbf{T}^{-1}(\alpha) = \mathbf{T}(-\alpha)$  gilt. Mit der Transformation besteht nun eine Kopplung zwischen Normalverzerrungen und Schubspannung bzw. Schubverzerrungen und Normalspannungen, die im Schichtkoordinatensystem nicht auftritt (vgl.  $\mathbf{S}_{\text{red}}$  in Gleichung (2.6) oder  $\mathbf{C}_{\text{red}}$  in Gleichung (2.7)). Die individuelle Stapelung von UD-ES zu einem MSV erlaubt damit die Konstruktion des makroskopischen Werkstoffverhaltens, womit auch ein quasiisotropes Verhalten erzwungen werden kann (näheres in [Sch07] S.244ff). Das Elastizitätsgesetz des MSV setzt sich dabei aus den transformierten reduzierten Steifigkeiten bzw. Nachgiebigkeiten der Einzelschichten zusammen und kann mit Hilfe der klassischen Laminattheorie (CLT = Classical Laminate Theory) aufgestellt werden.

### **Klassische Laminattheorie**

Zur analytischen Beschreibung des Werkstoffverhaltens eines MSV bzw. Laminats wird hier die CLT verwendet. Diese setzt die für die ES aufgestellten Annahmen des ESZ und der geringen Dicke auch für den MSV voraus. Zudem wird neben der Kinematik der KIRCHHOFF<sup>4</sup>schen Plattentheorie (unter anderem Schubstarrheit in Dickenrichtung) eine perfekte Verklebung der ES mit vernachlässigter Klebeschicht angenommen. Näheres zu den Annahmen und den Anwendungsgrenzen der CLT ist in [Sch07] S.322f aufgeführt. Laminattheorien höherer Ordnung werden unter anderem in [Mit17] S.236ff behandelt.

Da nun die Spannungen von ES zu ES unterschiedlich sind, werden diese für die Betrachtung des MSV (Makroebene) über die Laminatdicke schichtweise integriert. Dazu sind Schichtgrenzen und Koordinatensystem eindeutig festzulegen. In Bild 2.3 ist diese Definition für einen MSV mit  $n$  unidirektionalen Einzelschichten, deren lokale Schichtkoordinatensysteme  $(1_k, 2_k, 3_k)$  um den Winkel  $\alpha_k$  gegenüber dem globalen Laminatkoordinatensystem  $(x, y, z)$  gedreht sind, wobei die  $z$ -Achse und die  $3_k$ -Achsen zusammenfallen, dargestellt. Die  $x$ - $y$ -Ebene spannt dabei die Laminatmittelebene auf. Die Nummerierung  $k$  der Schicht erfolgt beginnend von der Laminatunterseite in positiver  $z$ -Richtung und legt als Index der  $z$ -Koordinate die Oberkante der jeweiligen Schicht fest. Für die Unterkante der Schicht ergibt sich damit  $z_{k-1}$  und für die Schichtdicke  $t_k = z_k - z_{k-1}$ .

<sup>4</sup> Kirchhoff, Gustav Robert (1824 – 1887); dt. Physiker

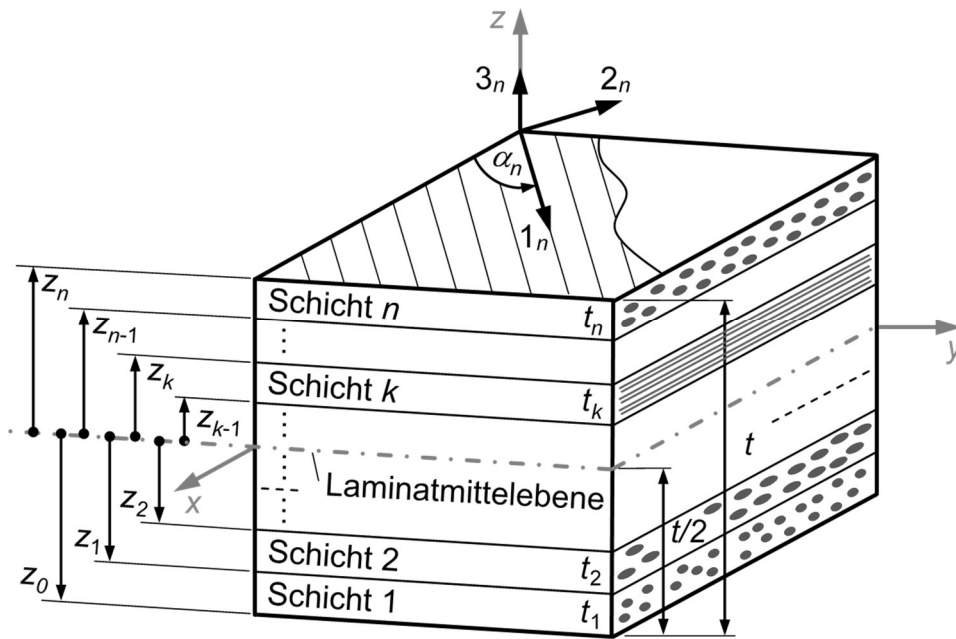


Bild 2.3: Schichtnummerierung und Koordinaten eines Laminats

Damit können die Schichtspannungen im globalen Laminatkoordinatensystem je Schicht integriert und für die Ermittlung der Gesamtbeanspruchung aufsummiert werden. Diese resultierende Beanspruchung stellt eine Schnittgröße des Laminats dar und wird üblicherweise auf die Laminatmittelfläche (liegt in der Laminatmittelebene bzw. x-y-Ebene) bezogen. Folglich ergeben sich längenbezogene Schnittkräfte  $\vec{N}$  und Schnittmomente  $\vec{M}$ :

$$\vec{N} = \begin{bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_k dz \quad \text{und} \quad \vec{M} = \begin{bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_k z dz . \quad (2.10)$$

Neben den auftretenden Verzerrungen  $\vec{\varepsilon}$  – Dehnungen ( $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$ ) und Schiebung ( $\gamma_{xy}$ ) – treten am MSV Wölbungen  $\vec{\kappa}$  – Krümmungen ( $\kappa_{xx}$ ,  $\kappa_{yy}$ ) und Drillung ( $\kappa_{xy}$ ) – auf, die aus den kinematischen Beziehungen am verformten MSV entwickelt werden (näheres in [Sch07] S.327ff). Mit Bezug der Größen auf die Laminatmittelfläche (LMF) erhält man

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}(x, y, z) \\ \varepsilon_{yy}(x, y, z) \\ \gamma_{xy}(x, y, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}(x, y) \\ \varepsilon_{yy}(x, y) \\ \gamma_{xy}(x, y) \end{bmatrix}_{LMF} + z \begin{bmatrix} \kappa_{xx}(x, y) \\ \kappa_{yy}(x, y) \\ \kappa_{xy}(x, y) \end{bmatrix}_{LMF} . \quad (2.11)$$

Mit den Beziehungen (2.7) bis (2.11) kann das Elastizitätsgesetz des Laminats mit



$$\begin{bmatrix} \vec{N} \\ \vec{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\varepsilon} \\ \vec{\kappa} \end{bmatrix}_{LMF} \quad \text{mit} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

$$\text{und} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix}$$

angegeben werden, wobei die Untermatrizen  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{D}$  der Laminatsteifigkeitsmatrix (ABD-Matrix) symmetrische 3x3-Steifigkeitsmatrizen sind (näheres in [Sch07] S.329ff).

Die Dehnsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{A}$  beschreibt dabei die Kopplung der Schnittkräfte  $\vec{N}$  mit den Verzerrungen  $\vec{\varepsilon}$  und ist unabhängig von der Laminatbezugsebene (hier LMF). Zudem tritt bei nicht verschwindenden Dehnsteifigkeiten  $A_{16}, A_{26} \neq 0$  eine Dehnungs-Schiebungskopplung (Schubkopplung) auf. Dabei werden, wie auch bei der Transformation des Elastizitätsgesetzes einer ES (vgl.  $\mathbf{S}_{\text{red}}$  in Gleichung (2.6) und  $\mathbf{C}_{\text{red}}$  in Gleichung (2.7)) die Normalverzerrungen (Dehnungen) bzw. Normalspannungen mit der Schubspannung bzw. Schubverzerrung (Schiebung) verknüpft. Das Laminat ist damit nicht ausgeglichen (nicht ausgewogen).

Die Koppelsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{B}$  verknüpft Schnittkräfte  $\vec{N}$  mit Wölbungen  $\vec{\kappa}$  sowie Schnittmomente  $\vec{M}$  mit Verzerrungen  $\vec{\varepsilon}$  und ist abhängig von der Wahl der Bezugsebene. Diese Biege-Dehn-Kopplung (Scheibe-Platte-Kopplung) tritt nicht auf, wenn alle Koppelsteifigkeit verschwinden ( $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ ), was bei einem symmetrischen Laminat stets der Fall ist.

Auch bei der Biegesteifigkeitsmatrix  $\mathbf{D}$  besteht eine Bezugsebenenabhängigkeit. Mit  $\mathbf{D}$  werden die Schnittmomente  $\vec{M}$  mit den Wölbungen  $\vec{\kappa}$  gekoppelt, wodurch es bei nicht verschwindenden Biegesteifigkeiten  $D_{16}, D_{26} \neq 0$  zur einer Krümmungs-Drillungs-Kopplung (Biege-Drill-Kopplung) kommt. Dabei erzeugt ein Drillmoment  $M_{xy}$  Krümmungen ( $\kappa_{xx}, \kappa_{yy}$ ) bzw. eine Drillung ( $\kappa_{xy}$ ) die Biegemomente  $M_{xx}$  und  $M_{yy}$ . Näheres zu den Koppelwirkungen kann [Mit17] S.153ff und deren Nutzung [Sch07] S.641ff entnommen werden.

### 2.1.3 Festigkeitsbeurteilung von FVK

Die Festigkeitsbeurteilung von FVK gestaltet sich allein schon durch den Verbund zweier sehr unterschiedlicher Werkstoffe schwierig. Zudem wird durch das anisotrope Werkstoffverhalten, das nicht triviale Bruchverhalten und den geschichteten Aufbau die Komplexität weiter erhöht. Im Allgemeinen findet die Beurteilung des Bruchgeschehens durch mechanische Spannungen auf Schicht- oder Laminatenebene (vgl. Bild 2.1) statt, womit mikromechanische Versagensmechanismen und Umwelteinflüsse vernachlässigt werden. Trotzdem sind verschiedene Brucharten zu unterscheiden, wobei sich folgende Fragen ergeben:

- Ist die erste Schädigung einer Schicht, mehrerer oder aller Schichten ein Bruch?
- Kommt es zum Bruch der Faser, der Matrix oder zwischen den Schichten?

Die erste Frage kann mit einer Degradationsanalyse des Schädigungsverlaufs geklärt werden. Die zweite Frage wird mit der Definition der Bruchtypen und zugehöriger Versagenskriterien beantwortet.

### ***Degradationsanalyse des Schädigungsverlaufs***

Die Degradation beschreibt den Schädigungsverlauf von der ersten Schädigung des Materials bis zum kompletten Versagen und dient zur genauen Versagensvorhersage. Bei FVK führt die erste Schädigung nicht zwangsläufig zum totalen Laminatversagen. Vielmehr kann diese erste Schädigung in einer Schicht (FPF – First Ply Failure = Erstschichtversagen) durch Lastumlagerung kompensiert werden. In gewisser Entfernung kann diese Schicht die Last wieder aufnehmen. Die Schädigung ist damit tolerierbar. Bei anhaltender Belastung kann sich die Schädigung jedoch ausbreiten und es kommt zu weiterem Schichtversagen (DLF – Degraded Laminate Failure = sukzessives Versagen) bis schließlich die letzten Laminatschichten versagen (LPF – Last Ply Failure = Totalversagen). Je nach Problemstellung ist oft die Kenntnis über das Erstschichtversagen (FPF), das gezielt mit bekannten Versagenskriterien erfasst werden kann, ausreichend. Um jedoch das komplette Potenzial von FVK auszureizen, ist eine Belastung bis zum Totalversagen (LPF) anzustreben. Zur genauen Ermittlung dieses Versagens ist jedoch ein präzises Verständnis des Schädigungsverlaufs (DLF) notwendig. Dabei behilft man sich mit der Annahme, dass jede Schädigung in einer Schicht die Tragfähigkeit dieser Schicht verringert (vgl. [Sch07] S.441ff). Im Degradationsmodell wird dies durch Reduktion der Steifigkeitsparameter umgesetzt. Die Unterschiede zwischen den einzelnen Modellen ist die Art der Degradation (Herabsetzen) der Schichtsteifigkeit. Ein Vergleich hierzu ist in [Hin04] S.653ff gegeben. Die einfachste Methode setzt die relevanten Steifigkeiten einer versagenden Schicht auf null. Andere Methoden verwenden hierfür Abminderungsfaktoren. Die Schwierigkeit hierbei ist deren Anpassung an reale Gegebenheiten. Die Höhe der Abminderung wird z.B. in [Puc96] über die Anstrengung ermittelt (vgl. auch [Sch07] S.444f). Andere Möglichkeiten sind unter anderem in [Hör02] S.42ff aufgeführt. Die Umsetzung einer Degradationsanalyse in numerischen Berechnungen (z.B. mit HyperWorks) ist mit Mehraufwand hinsichtlich Implementierung und Auswertung verbunden. Die Iterationsschleifen (vgl. [Puc96] S.92) mit der Abminderung der Steifigkeitsparameter sorgen zudem für eine höhere Rechenzeit.

Im Weiteren wird die erste auftretende Schädigung, also das Erstschichtversagen, als Belastungsgrenze angesehen und als Versagen deklariert. Demnach wird die Resttragfähigkeit des Laminats vernachlässigt.

### Bruchtypen

Bei Überlastung eines FVK können abhängig von der Beanspruchung und dem Laminataufbau verschiedene Bruchtypen auftreten.

Die **intralaminare Beanspruchung** einer unidirektionalen Einzelschicht (UD-ES) in Faserichtung führt zu einem Faserbruch (FB<sup>5</sup>), der sich bei Zuglast als Fasertrennung und bei Drucklast als Faserknicken bemerkbar macht (vgl. Bild 2.4).

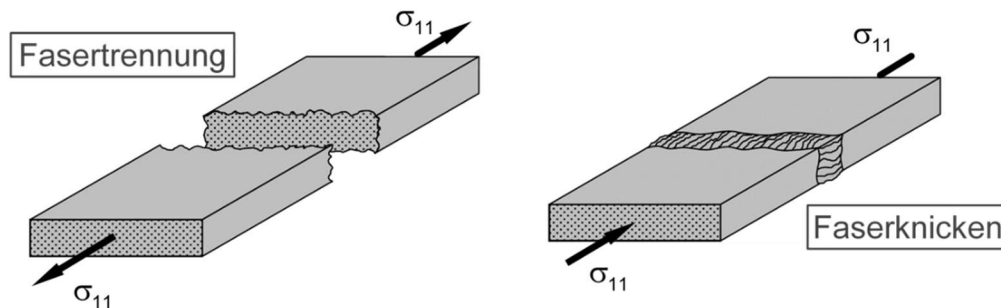


Bild 2.4: Faserbruch infolge von Zug- (links) und Druckspannungen (rechts) in Faserichtung (in Anlehnung an [Kob11])

Mit einer Beanspruchung der UD-ES quer zur Faser kommt es zum Zwischenfaserbruch (ZFB<sup>6</sup>), der im Fall eines ebenen Spannungszustands (vgl. Kapitel 2.1.2) in drei Modi (A, B, C) auftritt (vgl. Bild 2.5). Modus A zeichnet sich durch einen Bruch längs der Faserrichtung aus und wird durch eine Kombination aus der Querdzugspannung und der Schubspannung in der Einzelschichtebene hervorgerufen, wobei die Normalspannung die kritische Größe darstellt. Der Modus B wird durch die Querdruckspannung und die Schubspannung in der Einzelschichtebene verursacht. Hierbei ergibt sich die gleiche Bruchebene wie beim Modus A, jedoch bleiben aufgrund der Druckspannung die Bruchflächen nicht spannungsfrei; der Riss bleibt geschlossen. Wenn nun die Querdruckspannung betragsmäßig größer oder gleich der Schubspannung ist, dann kommt es zu einem Bruch nach dem Modus C mit einer zur Einzelschichtmittelebene gedrehten Bruchebene (Bruchebenenwinkel  $\theta_{\text{Bruch}}$ ). Die Versagensmechanismen zu den Bruchtypen sowie eine Betrachtung auf Mikroebene sind unter anderem in [Sch07] und [Dan06] zu finden.

Eine **interlaminare Beanspruchung** eines Mehrschichtverbunds kann zur Trennung einzelner Schichten führen. Diese Delamination wird durch erhöhte Zug- und Schubspannungen orthogonal zur Schichtebene hervorgerufen. Ursache für die Erhöhung dieser Spannungen ist häufig ein vorausgegangener Zwischenfaserbruch (ZFB), der zur Lastumlagerung in die Nachbarschichten führt.

<sup>5</sup> Im englischen als Fiber Failure (FF) bezeichnet

<sup>6</sup> Im englischen als Interfiber Failure (IFF) bezeichnet

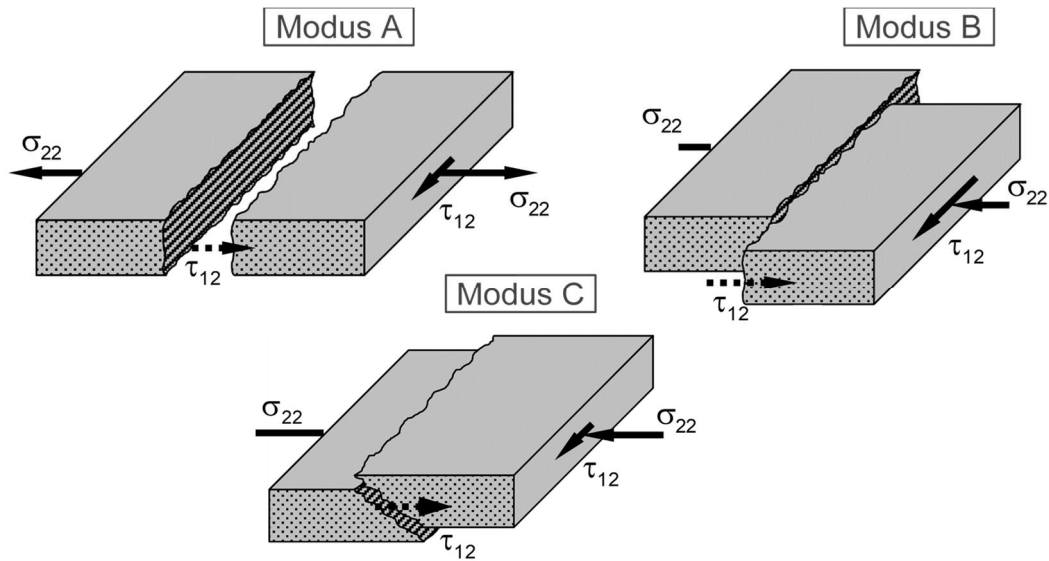


Bild 2.5: Zwischenfaserbruchmodi aufgrund von verschiedenen Kombinationen aus Schub- und Normalspannungen quer zur Faser (in Anlehnung an [Kob11])

Eine weitere Gefährdung besteht besonders an Laminaträndern mit verschiedenen Schichtorientierungen und damit unterschiedlichem Querdehnungsverhalten. Bei Belastung bauen sich die auftretenden Schichtspannungen durch interlaminaren Schub ab, was zur Delamination führen kann. Näheres hierzu und zu weiteren Fällen, bei denen Delamination auftreten kann, kann [Sch07] S.385ff entnommen werden. Kommt es zur Delamination, sind in der Bruchmechanik drei grundlegende Beanspruchungsarten, wie in Bild 2.6 verdeutlicht, des entstandenen Risses zu unterscheiden:

- Im Modus I kommt es aufgrund einer interlaminaren Normalzugbeanspruchung  $\sigma_{33}$  zur Aufspaltung bzw. Schälung der Laminatschichten.
- Im Modus II kommt es durch eine interlaminare Längsschubbeanspruchung  $\tau_{13}$  zur Scherung der Laminatschichten in Längsrichtung bzw. in Rissrichtung.
- Im Modus III kommt es wegen einer interlaminaren Querschubbeanspruchung  $\tau_{23}$  zur Scherung der Laminatschichten in Querrichtung bzw. quer zum Riss.

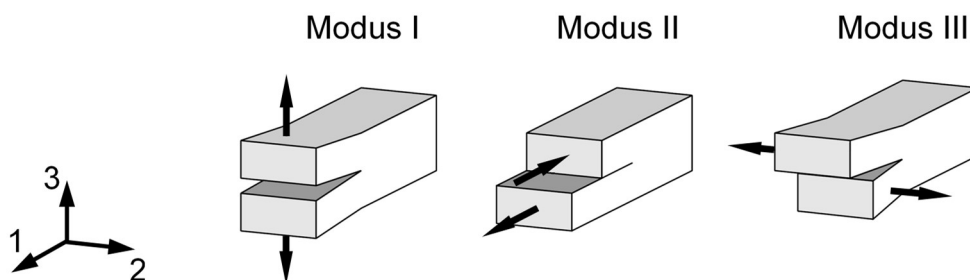


Bild 2.6: Beanspruchungsarten von Rissen (in Anlehnung an [Ree06])

### Versagenskriterien

Zur detaillierten Bruchanalyse sind die in Bild 2.4 und 2.5 dargestellten Bruchtypen durch Versagenskriterien zu beschreiben. Dafür sind zahlreiche Theorien vorhanden, die auf verschiedenen Ansätzen beruhen. Ein ausführlicher Vergleich der bekanntesten Theorien findet innerhalb der „world-wide failure exercise“ (WWFE-I bis III, in [Hin04], [Hin12], [Hin13], [Kad13]) statt. Dabei erzielte das Versagenskriterium nach PUCK gute Ergebnisse (vgl. [Hin04] S.1073ff). In Voruntersuchungen wird dieses Resultat ebenfalls bestätigt, weswegen das Kriterium nach PUCK in dieser Arbeit verwendet und nachfolgend im Detail betrachtet wird. Das PUCKsche Kriterium zählt zu den differenzierenden Bruchkriterien, die zwischen einem FB und den Bruchmodi des ZFB unterscheiden. Diese Differenzierung wird durch die Gruppe der sogenannten Pauschalbruchkriterien nicht erbracht. Neben diesen beiden Gruppierungen sind Kriterien zur Vorhersage der Delamination vorhanden. Alle Versagenskriterien haben gemeinsam, dass die Festigkeitsbeurteilung anhand der Relation zwischen den herrschenden Spannungen und den Festigkeiten  $\bar{R}$ , den ertragbaren Spannungen, stattfindet. Dieses Verhältnis wird in einer Bruchfunktion

$$F(\bar{\sigma}_{\text{herrschend}}, \bar{R}, \dots) = f \quad (2.13)$$

definiert, die den Ausnutzungsgrad bzw. die Materialanstrengung beschreibt. Für einen Bruchfunktionswert  $f < 1$  führt die Anstrengung zu keinem Versagen. Nimmt die Bruchfunktion jedoch den Wert 1 an, ist die **Bruchbedingung**

$$F(\bar{\sigma}_{\text{ertragbar}}, \bar{R}, \dots) = 1 \quad (2.14)$$

erfüllt. Das Material wird damit bis zur Festigkeitsgrenze beansprucht und vollständig ausgenutzt. Je nach Betrachtungsweise führt dieser Spannungszustand zum Bruch oder zu einem Zustand, der gerade noch ertragen werden kann. In dieser Arbeit wird die Bruchbedingung als Grenzzustand verstanden, der noch nicht zum Versagen führt. Die dem Grenzzustand entsprechende Belastung wird als Versagenslast definiert. Näheres zu den Definitionen und den Begrifflichkeiten ist in [Puc96] S.45ff aufgeführt. Die Bruchfunktionen bzw. Bruchbedingungen der nachfolgenden Versagenskriterien sind im Anhang A aufgeführt.

#### Differenzierende Bruchkriterien

Mit der Differenzierung der obigen Bruchtypen (vgl. Bild 2.4 und 2.5) sind mehrere Bruchfunktionen (vgl. Gleichung (2.13)) zur Beschreibung des Versagens erforderlich, wodurch das Bruchgeschehen physikalisch besser dargestellt wird. Die einzelnen herrschenden

Spannungen (Komponenten von  $\vec{\sigma}_{\text{herrschend}}$ ) können dabei in Interaktion stehen und damit zum selben Bruchtyp führen.

Ein sehr einfaches Versagenskriterium, das in gewissem Maße die Bruchtypen unterscheidet, indem es jede Spannung mit der zugehörigen Festigkeit in Relation setzt, wobei auch zwischen Zug- und Druckspannungen differenziert wird, ist das **Maximalspannungskriterium**. Eine Interaktion zwischen den Spannungen besteht demnach nicht.

Eines der ersten differenzierenden Versagenskriterien stellt HASHIN<sup>7</sup> für den dreidimensionalen Spannungszustand in [Has80] vor. Neben der Charakterisierung in FB und ZFB wird zudem jeweils zwischen Druck- und Zugbelastung unterschieden. Beim **HASHIN-Kriterium** münden jedoch zu hohe Querdruckspannungen und Schubspannungen in einen Bruchtyp, womit die Modi B und C nicht unterschieden werden. Das HASHIN-Kriterium weist zudem keine Parameter zur Anpassung auf.

Beim **CUNTZE-Kriterium**, auch als FMC-Kriterium (Failure Mode Concept) bezeichnet, findet diese Differenzierung der fünf Bruchmodi des ESZ statt. Zudem ist das Versagenskriterium durch die Formulierung mit Spannungsinvarianten (vgl. [Cun12]) im dreidimensionalen Spannungsraum anwendbar und mit diversen Parametern an Testdaten anpassbar.

Eines der neueren differenzierenden Versagenskriterien ist das **LaRC-Kriterium** (NASA Langley Research Center), das im Laufe der Zeit stetig weiterentwickelt wird. Mit der Kennung LaRC03 wird das aktuelle Kriterium für den ESZ bezeichnet (vgl. [Dav05]). Dessen Weiterentwicklung und Erweiterung auf den dreidimensionalen Spannungszustand hat die Kennung LaRC04 und ist in [Pin05] und [Kob11] erläutert. Das LaRC-Kriterium enthält sechs Gleichungen, je drei für FB und ZFB, wobei beim Faserdruckversagen zwischen einer Querkzug- und Querdruckbeanspruchung unterschieden wird. Des Weiteren berücksichtigt das LaRC-Kriterium den In-situ-Effekt, bei dem die Auswirkungen der an die betrachtete Einzelschicht anliegenden Schichten sowie des Laminataufbaus durch Korrektur der Festigkeiten erfasst werden (näheres in [Pin12] S.2321). Beeinflusst werden hierbei die Längs-, Querschubfestigkeit und die Querkzugfestigkeit der Schicht. Bei einer Einzelschicht tritt der In-situ-Effekt dementsprechend nicht auf. Zudem werden beim LaRC-Kriterium Faserwinkelabweichungen erfasst.

### **Versagenskriterium nach PUCK**

Bereits in [Puc69] stellt PUCK ein zwischen FB und ZFB differenzierendes Versagenskriterium vor. In den Weiterentwicklungen findet eine detaillierte Unterscheidung des FB und des ZFB statt, was zu einem bruchtypenbezogenen Versagenskriterium führt (vgl. [Puc96]). Die Implementierung des PUCKschen Versagenskriteriums ist für den dreidimensionalen Spannungszustand bereits in diversen Berechnungsprogrammen, wie auch in HyperWorks (vgl. [Alt21]), enthalten. Der FB wird dabei in einem vereinfachten Fall mit

---

<sup>7</sup> Hashin, Zvi (1929 – 2017); israel. Werkstoffwissenschaftler

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{11}}{R_{11Z}} &= 1 && \text{für } \sigma_{11} \geq 0 && \text{und} \\ -\frac{\sigma_{11}}{R_{11D}} &= 1 && \text{für } \sigma_{11} < 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

untersucht, wobei  $R_{11Z}$  die Zugfestigkeit und  $R_{11D}$  die Druckfestigkeit einer Schicht in Faserrichtung ist. Für den ZFB werden zur Unterscheidung der Bruchtypen wirkebenenbasierte Kriterien formuliert. Die für den Bruch verantwortlichen Spannungen wirken in der Bruchebene und setzen sich aus einer Schubspannung  $\tau_{n1}$  in Faserrichtung, einer Schubspannung  $\tau_{nt}$  quer zur Faserrichtung und einer zur Bruch- bzw. Wirkebene senkrechten Normalspannung  $\sigma_n$  zusammen. Wie Bild 2.5 zeigt, kann je nach Beanspruchung eine gegenüber den Schichtebenen gedrehte Bruchebene entstehen. Der Drehwinkel der 2-Achse zur Normalenrichtung der Bruchebene wird als Neigungswinkel  $\theta$  bezeichnet und kann zur Transformation der Schichtspannungen in die wirkebenenbasierten Spannungen verwendet werden (vgl. [Puc96] S.108):

$$\begin{aligned} \sigma_n(\theta) &= \sigma_{22} \cos^2 \theta + \sigma_{33} \sin^2 \theta + 2\tau_{23} \sin \theta \cos \theta, \\ \tau_{n1}(\theta) &= \tau_{13} \sin \theta + \tau_{12} \cos \theta, \\ \tau_{nt}(\theta) &= (\sigma_{33} - \sigma_{22}) \sin \theta \cos \theta + \tau_{23} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Damit können für eine Zug- oder Druckbelastung der Bruchebene die ZFB-Anstrengungen

$$f(\theta) = \begin{cases} \sqrt{\left(\frac{\sigma_n}{R_{22Z}} - \rho_{2nZ} \frac{\sigma_n}{R_{2n}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{nt}}{R_{nt}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}}{R_{12}}\right)^2} + \rho_{2nZ} \frac{\sigma_n}{R_{2n}} & \text{für } \sigma_n \geq 0 \\ \sqrt{\left(\rho_{2nD} \frac{\sigma_n}{R_{2n}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{nt}}{R_{nt}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}}{R_{12}}\right)^2} + \rho_{2nD} \frac{\sigma_n}{R_{2n}} & \text{für } \sigma_n < 0 \end{cases} \quad (2.17)$$

formuliert werden, wobei die wirkebenenbasierten Festigkeiten  $R_{2n}$ ,  $R_{nt}$  und die zugehörigen Neigungsparameter  $\rho_{2nZ/D} = \rho_{2nZ} \vee \rho_{2nD}$  mit

$$R_{nt} = \frac{R_{22D}}{2(1 + \rho_{22D})} \quad \text{und} \quad (2.18)$$

$$\frac{\rho_{2nZ/D}}{R_{2n}} = \begin{cases} \frac{1}{\tau_{nt}^2 + \tau_{n1}^2} \left[ \frac{\rho_{22Z/D}}{R_{nt}} \tau_{nt}^2 + \frac{\rho_{12Z/D}}{R_{12}} \tau_{n1}^2 \right] & \text{für } \tau_{nt}^2 + \tau_{n1}^2 > 0 \\ 0 & \text{für } \tau_{nt}^2 + \tau_{n1}^2 = 0 \end{cases} \quad (2.19)$$

bestimmt werden können (vgl. [Puc96] S.160). Die hierbei verwendeten Neigungsparameter  $\rho_{12Z}$ ,  $\rho_{12D}$ ,  $\rho_{22D}$  und  $\rho_{22Z}$  dienen zur Anpassung der Bruchfunktionen an die realen, experimentell ermittelten, Gegebenheiten. In [Puc96] werden diese noch als Schätzwerte angegeben, während in [Puc02] diese schon näher bestimmt sind. Empfohlene Richtwerte für einen kohlenstofffaserverstärkten Kunststoffverbund (CFK) sind demnach

$$\rho_{12Z} = 0,35, \quad \rho_{12D} = 0,3, \quad \rho_{22D} = \rho_{22Z} = 0,25 \dots 0,3 \quad (2.20)$$

Die Bruchfunktion in Gleichung (2.17) ist abhängig vom unbekanntem Neigungswinkel  $\theta$  der Bruchebene, der nicht analytisch ermittelt werden kann. Die potentielle Bruchebene weist jedoch den Neigungswinkel  $\theta$  auf, bei dem die Anstrengung maximal wird. Damit ist für einen gegebenen Spannungszustand die ZFB-Anstrengung für jeden Winkel im Bereich  $-90 < \theta \leq 90^\circ$  zu ermitteln. Im Fall eines Bruches stellt  $\theta$  den Bruchwinkel  $\theta_{\text{Bruch}}$  dar.

Falls ein ESZ vorliegt, ändert sich die Bruchbedingung (2.15) für den FB nicht. Für den ZFB ergeben sich mit einem Bruchwinkel  $\theta_{\text{Bruch}} = 0^\circ$  die Bruchmodi A und B (vgl. Bild 2.5). Mit der analytischen Ermittlung des Bruchwinkels im Fall eines ESZ kann die Bruchbedingung auch für den Modus C angegeben werden. Eine anschauliche Herleitung der Bruchbedingungen für den ESZ ist in [Kob11] S.198ff aufgeführt.

Es gilt im Modus A ( $\sigma_{22} \geq 0$ )

$$\frac{1}{R_{12}} \left[ \sqrt{\tau_{12}^2 + \left( \frac{R_{12}}{R_{22Z}} - \rho_{12Z} \right)^2 \sigma_{22}^2} + \rho_{12Z} \sigma_{22} \right] = 1, \quad (2.21)$$

im Modus B  $\left( \sigma_{22} < 0 \text{ und } \left| \frac{\sigma_{22}}{\tau_{12}} \right| \leq \frac{\rho_{22D}}{\rho_{12D} \sqrt{1 + 2\rho_{22D}}} \right)$

$$\frac{1}{R_{12}} \left[ \sqrt{\tau_{12}^2 + (\rho_{12D} \sigma_{22})^2} + \rho_{12D} \sigma_{22} \right] = 1 \quad (2.22)$$



und im Modus C  $\left( \sigma_{22} < 0 \text{ und } \left| \frac{\sigma_{22}}{\tau_{12}} \right| \geq \frac{\rho_{22D}}{\rho_{12D} \sqrt{1 + 2\rho_{22D}}} \right)$

$$-\frac{R_{22D}}{\sigma_{22}} \left[ \left( \frac{\tau_{12}}{2R_{12}(1 + \rho_{22D})} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_{22}}{R_{22D}} \right)^2 \right] = 1, \quad (2.23)$$

wobei  $R_{12}$  die intralaminare Schubfestigkeit,  $R_{22Z}$  die Zugfestigkeit und  $R_{22D}$  die Druckfestigkeit einer Schicht quer zur Faserrichtung ist.

### Pauschalbruchkriterien

Mit einem Pauschalbruchkriterium findet die gesamte Festigkeitsbeurteilung mit einer einzigen Bruchbedingung statt, womit Aussagen über den Bruchtyp nicht möglich sind. Aufgrund der Einfachheit bieten sich Pauschalbruchkriterien jedoch für den unkomplizierten Einsatz und die schnelle Implementierung in Routinen an. Die Interaktion der Spannungen in verschiedenen Wirkrichtungen spricht außerdem für eine Anwendung auch bei mehrachsiger Belastung. Trotzdem ist die Pauschalisierung des komplexen Bruchvorgangs bei FVK zumindest physikalisch fraglich. Die bekanntesten Pauschalbruchkriterien unterscheiden sich im Wesentlichen in ihrem Grundansatz: dem über ein Tensorpolynom rein mathematischen Ansatz und dem auf der Fließbedingung metallischer Kristalle basierenden physikalischen Ansatz.

Die Fließbedingung nach v. MISES<sup>8</sup> für metallische Kristalle bildet den ersten Grundpfeiler für **physikalisch basierte Pauschalbruchkriterien**. Das in [Mis28] vorgeschlagene Polynom zweiten Grades als besagte Fließbedingung konnte HILL<sup>9</sup> zu einem Fließkriterium für orthotrope Bleche erweitern. Hierbei geben die sechs verbleibenden Koeffizienten des Polynoms zweiten Grades die Werkstofffestigkeiten in Richtung der Orthotropieachsen wieder (näheres in [Hil48]). Der physikalische Ansatz des **HILL-Kriteriums** auf Basis des Fließversagens bei duktilen Werkstoffen ist in der Anwendung auf spröde FVK physikalisch unbegründet. Man geht lediglich davon aus, dass bei spröden Werkstoffen ein Materialfließen kein linear elastisches Verhalten darstellt und somit das Fließkriterium einem Kriterium für einen Bruch bzw. ein Versagen gleichzusetzen ist. Zudem unterscheidet das HILL-Kriterium nicht zwischen Zug- und Druckspannungen, weshalb je nach Spannungsrichtung die richtige Festigkeit zu verwenden ist.

In [Azz65] werden die Koeffizienten des HILL-Kriteriums als Bruchfestigkeiten in den Materialhauptachsen von FVK interpretiert und durch AZZI und TSAI für einen Werkstoffverbund mit unidirektionaler (UD) Faserausrichtung spezifiziert, indem sie von einer transversalen

<sup>8</sup> von Mises, Richard (1883 – 1953); österr. Mathematiker, Ingenieur

<sup>9</sup> Hill, Rodney (1921 – 2011); brit. Mathematiker, Ingenieur

Isotropie der Werkstoffeigenschaften ausgehen und somit die Festigkeiten in der Isotropieebene gleichsetzen. Damit erhält man für ein UD-Laminat mit transversal isotropen Materialeigenschaften das **TSAI-HILL-Kriterium** mit vollständiger Interaktion der Spannungen eines ESZ. Ebenso wie beim HILL-Kriterium muss je nach Richtung der Spannungen die richtige Festigkeit verwendet werden.

Als alternative Erweiterung des HILL-Kriteriums werden beim **HOFFMAN-Kriterium** in [Hof67] Zug- und Druckfestigkeiten simultan verwendet. Zudem wird die Bruchbedingung um lineare Normalspannungsanteile erweitert.

Den Ansatz für die **mathematisch basierten Pauschalbruchkriterien** bildet das in [Gol65] beschriebene Tensorpolynom. GOL'DENBLAT und KOPNOV gehen davon aus, dass im mehrdimensionalen Spannungsraum eine Versagensfläche, mathematisch gesehen eine Potentialfläche, existiert, die durch eine Funktion beschrieben werden kann. Daraus lassen sich eine Vielzahl an Versagenskriterien herleiten. Die meisten verwenden hierbei den Polynomansatz bis zum quadratischen Glied, wobei die Koeffizienten der Spannungen als Werkstoffeigenschaften zu interpretieren sind. In [Tsa71] liefern TSAI und WU hierfür Werte, die sich aus Festigkeiten zusammensetzen. Eine Festigkeit, deren Schwankungen das **TSAI-WU-Kriterium** empfindlich beeinflusst, ist hierbei durch biaxiale Versuche zu ermitteln. Diese recht willkürliche Annahme der Festigkeitsterme ohne physikalische Substanz scheint zumindest fragwürdig (vgl. [Kob11] S.98). Trotz der Pauschalisierung und des fehlenden physikalischen Bezugs ist das TSAI-WU-Kriterium weit verbreitet und kann in eingeschränkten Fällen zur Abschätzung dienen (vgl. [Hin04] S.1073ff).

### **Kriterien zur Vorhersage der Delamination**

Die Delamination, also quasi eine Auflösung des Laminats durch Trennung von Schichten, stellt im eigentlichen Sinne einen Schädigungsverlauf, wie zu Beginn des Kapitels 2.1.3 beschrieben, dar und erfordert damit eine Degradationsanalyse sowie eine Untersuchung der Rissausbreitung (näheres in [Cam03] S.1416). Wie bereits festgelegt, soll ausschließlich die erste Schädigung (FPF) betrachtet werden. Da die Delamination in erster Linie durch einen ZFB initialisiert wird, können damit differenzierende Versagenskriterien für den dreidimensionalen Spannungsraum zur Indikation herangezogen werden. Hierbei müssen die interlaminaren Spannungen ( $\sigma_{33}$ ,  $\tau_{13}$ ,  $\tau_{23}$ ) hauptverantwortlich für den ZFB sein und es muss sich eine Bruchebene parallel zur Schichtebene ergeben. Für das Versagenskriterium nach PUCK kann somit für  $\theta = 90^\circ$  die Bruchfunktion in Gleichung (2.17) als Delaminationskriterium verwendet werden (vgl. [Puc96] S.152). Weitere Versagenskriterien basieren auf einem quadratischen Polynomansatz nach HASHIN (vgl. [Has80] S.331) oder auf der Energiefreisetzungsrates. Eine Differenzierung gemäß der in Bild 2.6 dargestellten Beanspruchungsmodi ist dabei nicht vorgesehen. Einzig Modus I kann für  $\sigma_{33} < 0$  ausgeschlossen werden.

Ein **pauschales Delaminationskriterium**, das eine interlaminare Normaldruckspannung  $\sigma_{33D}$  mitberücksichtigt, wird in [Bre88] vorgestellt. Durch den pauschalisierten Ansatz wirkt sich eine Zunahme von  $\sigma_{33D}$  als bruchfördernd aus, was der allgemeinen delaminationshemmenden Wirkung (vgl. [Cam99] S.923) einer interlaminaren Normaldruckspannung widerspricht. Dieser Umstand ist durch die zu  $R_{33Z}$  etwa dreimal so hohe Druckfestigkeit  $R_{33D}$  bei kleinen interlaminaren Normaldruckspannungen eventuell akzeptabel, jedoch ist es nicht plausibel, dass größere  $\sigma_{33D}$  Delamination begünstigen. Letztlich wird bei derartigen Lastfällen auch für dieses Kriterium eine Vernachlässigung von  $\sigma_{33D}$  empfohlen (vgl. [Bre88] S.1150f).

Somit scheint es plausibler  $\sigma_{33D}$  von vornherein zu vernachlässigen, wie es in [Cam99] für ein **differenzierendes Delaminationskriterium** vorgeschlagen wird. Dabei wird der Einfluss von  $\sigma_{33D}$  auf die Delamination als nicht vorhanden angesehen. Beide Kriterien besitzen einen rein mathematischen Ansatz und sind nicht physikalisch untermauert, können aber den Beginn der Delamination gut vorhersagen (vgl. [Bre88], [Cam99]).

In [Hou01] wird dagegen versucht, den offensichtlichen Zusammenhang zwischen einem auftretenden ZFB und der Delamination in einem **differenzierenden Delaminationskriterium mit Einflussparametern** zu erfassen. Dabei fließen verschiedene Parameter, die andere auftretende Schädigungen berücksichtigen sollen, mit in das Delaminationskriterium ein. Für eine große Normaldruckbeanspruchung  $\sigma_{33D}$  wird die Delamination dabei ausgeschlossen. Diese drei Delaminationskriterien mit **quadratischen Polynomansatz** (QDC – Quadratic Delamination Criterion) unterscheiden sich in erster Linie in der Berücksichtigung verschiedener Spannungsgrößen sowie in der Differenzierung der Schubfestigkeiten und des Spannungszustands.

Ein **physikalischer Ansatz** für ein Delaminationskriterium ist mit der **Energiefreisetzungsrate** bei der Rissentstehung und -ausbreitung gegeben. Dabei wird für jeden Beanspruchungsmodus die tatsächliche Energiefreisetzungsrate in Bezug zur kritischen Energiefreisetzungsrate gesetzt. Zudem findet eine Anpassung an Experimentergebnisse statt. Eine Übersicht und nähere Erläuterungen finden sich in [Ree06].

Ein einfaches Delaminationskriterium, ähnlich dem Maximalspannungskriterium, ist in der Software HyperWorks als **Bindungsfehlerkriterium** (BFC – Bonding Failure Criterion) implementiert, wobei die Bindung zwischen den Laminatschichten mit den interlaminaren Schubspannungen in Relation zur interlaminaren Schubfestigkeit beurteilt wird. Die interlaminare Normalspannung wird dabei nicht berücksichtigt (näheres in [Alt21] unter „User Guide / Elements / Composite Laminates“). Das BFC-Kriterium lautet

$$\frac{\max(\tau_{13}, \tau_{23})}{R_S} = 1, \quad (2.24)$$

wobei für  $R_s$  entsprechend der größeren Schubspannung die interlaminare Schubfestigkeit  $R_{13}$  oder  $R_{23}$  einzusetzen ist. Aufgrund der einfachen Anwendbarkeit dieses Kriteriums wird es in dieser Arbeit zusätzlich zum Versagenskriterium nach PUCK zur Abschätzung der Delaminationsgefahr verwendet.

### 2.1.4 Krafteinleitungselemente für FVK

Die Einleitung von Kräften in eine Struktur findet im Allgemeinen durch die Verbindung zweier Bauteile statt. Diese Kopplung kann fest oder beweglich sowie lösbar oder nicht lösbar sein, muss aber stets durch Kräfte aufrechterhalten werden. Zugrundeliegend sind hierbei insbesondere die physikalischen Wirkprinzipien der Adhäsion, Kohäsion und der Reibung (näheres in [Bau91] S.7f), die drei Schlussarten einer Verbindung ermöglichen. Und zwar wird

- eine stoffschlüssige Verbindung durch Adhäsionskräfte (z.B. Löt- und Klebeverbindungen) oder Kohäsionskräfte (z.B. Schweißverbindungen),
- eine formschlüssige Verbindung durch Kohäsionskräfte (z.B. Schrauben-, Niet-, Bolzenverbindungen und Schlaufenanschlüsse) und
- eine kraft- bzw. reibschlüssige Verbindung im Allgemeinen durch Reibkräfte (z.B. Schrauben-, Klemm- und Pressverbindungen)

ausgebildet. Elementare Aufgabe jeder Verbindung ist die Kraftübertragung (Ein- und Ausleitung der Kraft) zwischen den Verbindungselementen, wobei je nach Schlussart unterschiedliche Kräfte übertragbar sind. Während mit dem Formschluss vorwiegend Druckkräfte übertragen werden können, sind es beim Kraftschluss in erster Linie Schubkräfte. Einzig die stoffschlüssige Verbindung ermöglicht alle drei Arten (Zug, Druck, Schub) der Kraftübertragung (näheres in [Mül91] S.8ff). Für ein Krafteinleitungselement für FVK findet beim Stoffschluss die Kraftübertragung über die Matrix statt. Die geringen Adhäsions- und Kohäsionskräfte der Matrix bzw. des Klebstoffs begrenzen dabei die Belastbarkeit der Verbindung. Ebenso werden die Schubkräfte bei einer kraftschlüssigen Verbindung von der Matrix aufgenommen, womit die Tragfähigkeit der Verbindung von der Schubfestigkeit der Matrix oder des Klebstoffs bestimmt wird. Zudem können sich Verbindungen durch die Reduktion der Reibkräfte, aufgrund der Kriechneigung des Matrixwerkstoffs, lösen. Üblicherweise wird deshalb für stoff- und kraftschlüssige Verbindungen eine Vergrößerung der Kontaktfläche angestrebt. Alternativ bietet sich ein Formschluss an, der die Druckkräfte direkt in die Fasern einleiten kann und so die Tragfähigkeit der Verbindung deutlich erhöht. Häufig eingesetzte Vertreter sind hierbei die Schlaufenanschlüsse und die Bolzenverbindungen, wobei letztere für großflächige, ebene Strukturen eingesetzt werden (näheres in [Sch07] S.483ff). Abweichend zu den hier erwähnten klassischen Krafteinleitungselementen werden bei FVK

vermehrt intrinsische Hybride, insbesondere eingebettete Stehbolzen, eingesetzt (näheres in [Fle21], [Sch07] S.553ff).

### ***Bolzenverbindung als Krafteinleitungselement in FVK***

Der Begriff der Bolzenverbindung ist im Weiterem gegenüber der Niet- und Schraubenverbindungen abzugrenzen und dient nicht als Überbegriff für diese, sondern wird als eigene Fügeverbindung angesehen. Die Bolzenverbindung gehört nach DIN 8593-1 dem Fügeverfahren „Zusammensetzen“ und der Untergruppe „Ineinanderschieben“ an und bildet damit eine translatorisch und rotatorisch zweidimensionale formschlüssige Verbindung. Da der verbleibende rotatorische Freiheitsgrad gerne genutzt wird und die Verbindung lösbar sein soll, ist die Bolzenverbindung oft als Spielpassung gefügt. Sicherungselemente können dabei die freie Bewegung des Bolzens in axialer Richtung verhindern. Bolzenverbindungen werden weiterhin als ein-, zwei-, oder mehrschnittige Verbindung mit meistens mehreren Bolzen und vorwiegend als einfache Überlappung, Zangen- oder Laschenstoß hergestellt (näheres in [Wit13] S.201). Mit mehrreihigen und mehrschnittigen Verbindungen wird die Beanspruchung der einzelnen Füge Teile reduziert, wodurch größere Belastungen möglich sind. Jedoch erzeugt eine ungerade Schnittigkeit infolge der Exzentrizität ein Versatzmoment, welches zu einem Verkanten des Bolzens, zu unerwünschter Biegebeanspruchung und zu ungleichmäßiger Kraftverteilung in den Verbindungselementen führen kann. Bei unterschiedlichen Bauteildicken der Füge Teile kann dieser Effekt ebenso auftreten. Des Weiteren ist mit der Bolzenverbindung die Fügung verschiedener Werkstoffe möglich. Einschränkungen ergeben sich hauptsächlich durch die Kontaktkorrosion und die unterschiedliche thermische Ausdehnung der Verbindungselemente.

Die Bolzenverbindung als Krafteinleitungselement in FVK ist im Vergleich zu anderen Fügeverbindungen mit der Trennung lasttragender Fasern durch die Bohrung vorgeschädigt. Die Kerbwirkung und ein verringerter Querschnitt reduzieren die Belastbarkeit der Verbindung. Abhilfe kann hierbei die Umleitung der Faser um die Bohrung schaffen (näheres in [Huf10]). Weitere konventionelle Maßnahmen zur Erhöhung der Belastbarkeit von Bolzenverbindungen in faserverstärkten Strukturen können vorpräparierte Stützelemente oder einlamierte Metallfolien sein (näheres in [Sch07] S.529ff).

### ***Versagen von Bolzenverbindungen in FVK***

Die Tragfähigkeit einer Bolzenverbindung ist bis zum Versagen der Verbindungselemente oder des Verbindungsmittels gewährleistet. Dabei können verschiedene Versagensmechanismen unterschieden werden, die meist in Kombination das reale Versagensverhalten wiedergeben. Eine Auflistung der möglichen Versagensarten ist in Bild 2.7 dargestellt.

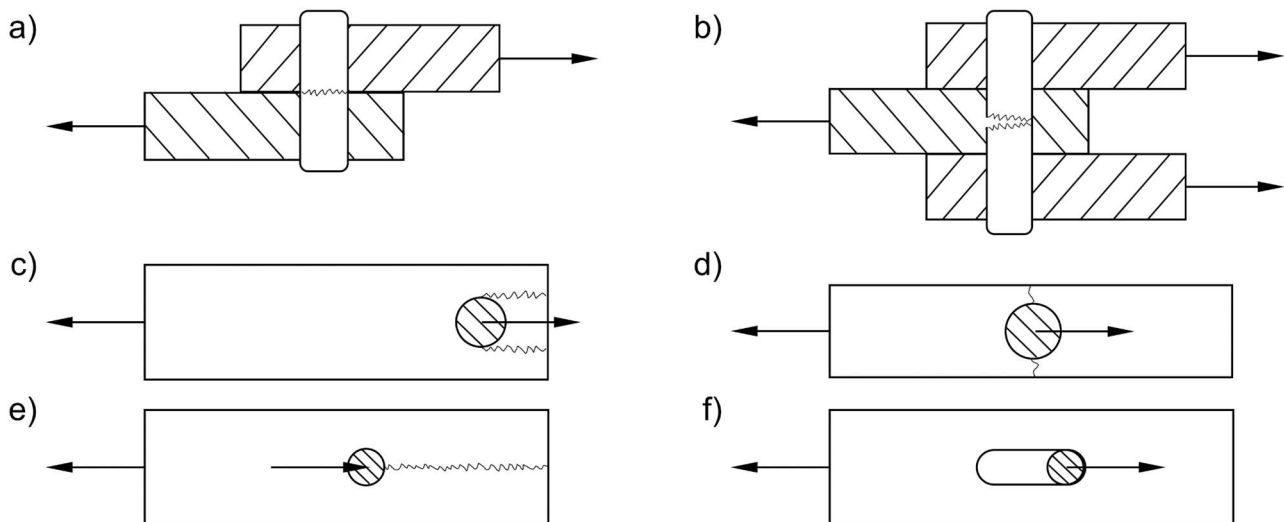


Bild 2.7: Schematische Darstellung der Versagensarten bei Bolzenverbindungen:  
 a) Scherbruch des Bolzens, b) Biegebruch des Bolzens, c) Scherauszugsversagen  
 d) Querschnittversagen, e) Trennsplattversagen, f) Lochleibungsversagen

Ein Bolzenversagen tritt durch Abscheren oder Biegung des Bolzens auf. Eine Aufteilung der Belastung auf mehrere Verbindungsfugen oder die Vergrößerung des Bolzendurchmessers können dabei die Bruchgrenzen erhöhen. Ein vorzeitiger **Scherbruch des Bolzens**, der durch eine Scherbelastung in der Verbindungsfuge auftritt, kann zudem durch Wahl eines Bolzenwerkstoffs mit höherer Schubfestigkeit verhindert werden. Ein Werkstoff mit größerer Biegefestigkeit kann ebenso die Belastbarkeit bei Biegung des Bolzens erhöhen. Der **Biegebruch des Bolzens** kann nur bei zwei- oder mehrschnittigen Verbindungen vorkommen. Bei einschnittigen Verbindungen müsste eine äußere Biege- oder Torsionslast anliegen, um den Bolzen auf Biegung zu beanspruchen. Bei Verbindungen mit FVK ist ein Bolzenversagen eher untypisch und unproblematisch, da die Bolzenfestigkeiten meist höher sind als die Festigkeiten des Laminats. Anders verhält es sich aber bei der Korrosion. Durch die stark unterschiedliche Elektronegativität von CFK zu einigen Metallen kann die Kontaktkorrosion verstärkt auftreten, die in erster Linie den Bolzen beschädigt. Die Verwendung anderer Werkstoffe wie GFK oder Titan kann hierbei hilfreich sein (näheres in [Bau91] S.179ff).

Neben dem Bolzenversagen sind für faserverstärkte Verbindungselemente vier Versagensmechanismen denkbar. Beim **Scherauszugsversagen** wird der Bolzen samt dem davorliegenden Material in Lastrichtung herausgerissen. Verantwortlich für den Bruch sind die Schubspannungen oberhalb der Schubfestigkeit in Lastrichtung. Eine Vergrößerung der Wirkfläche (Bauteildicke mal Abstand der Bohrung zum Rand in Richtung der Last) reduziert dabei die auftretenden Schubspannungen. Das Scherauszugsversagen wird besonders durch UD-Schichten parallel zur Lastrichtung begünstigt, denn hierbei fällt die geringe Schubfestigkeit der Matrix besonders ins Gewicht. Bei Überschreitung dieser Festigkeit

treten Zwischenfaserbrüche auf, die dann zum Scherauszug führen. Effektivste Gegenmaßnahme ist dabei das Anbringen von UD-Schichten quer zur Lastrichtung oder unter  $45^\circ$ .

Das **Querschnittsversagen** tritt aufgrund eines durch die Bohrung reduzierten Querschnitts auf. Die Kraftumlenkung an der Bohrung führt zu Spannungsüberhöhungen, die die Zugfestigkeit übersteigen und damit ein Abreißen des Bauteils quer zur Lastrichtung, entlang der Querschnittsfläche, einleiten. Eine Reduzierung der wirkenden Zugspannung kann durch Vergrößerung der Querschnittsfläche (Bauteilbreite, Bauteildicke, Randabstand der Bohrung, Bohrungsdurchmesser) erreicht werden. Außerdem sind die Spannungsüberhöhungen von dem Orthotropiegrad des Laminats abhängig und dadurch meist höher als beim isotropen Werkstoff. Eine Erhöhung der Zugfestigkeit durch Schichten mit Faserorientierungen parallel zur Lastrichtung ist damit nur bis zu einer Grenze sinnvoll, denn mit steigender Anzahl dieser Schichten nimmt auch der Orthotropiegrad zu und somit steigt die Spannungsüberhöhung. Diese können mit UD-Schichten quer zur Lastrichtung oder unter  $45^\circ$  abgemindert werden.

Ein besonders bei UD-Laminaten mit Faserwinkeln parallel zur Lastrichtung auftretende Versagensart ist das **Trennsplattversagen**. Dabei spaltet der Bolzen, wie ein Keil, das Laminat entlang der Lastrichtung. Ursache hierfür ist eine zu geringe Festigkeit quer zur Lastrichtung. Begünstigt wird diese Versagensart durch einen kleinen Bolzendurchmesser, der aufgrund der kleineren Kontaktfläche einen größeren Druck am Lochrand bewirkt. Es kommt zu Zwischenfaserbrüchen, Rissbildung und Spaltung des Laminats. Eine Erhöhung der Festigkeit quer zur Lastrichtung durch UD-Schichten in dieser Richtung oder im Winkel von  $45^\circ$  ist anzuraten, denn geometrische Maßnahmen, ausgenommen die Vergrößerung des Bolzendurchmessers, haben kaum positive Auswirkungen auf das Trennsplattversagen. Das **Lochleibungsversagen** ist eine lokal um den Bohrungsrand herum auftretende Versagensart, die sich in einer Lochaufweitung zeigt. Ursache hierfür sind zu hohe Druckkräfte (Lochleibungsdruck) an der Kontaktfläche, die zu verschiedenen Schädigungen am Laminat führen (vgl. Bild 2.8).

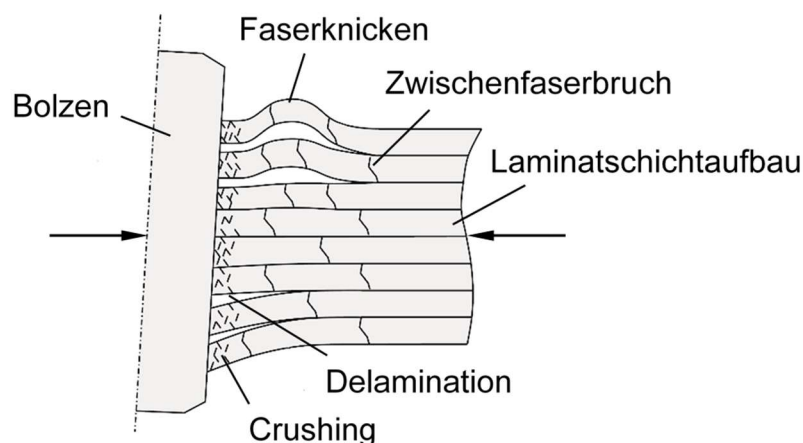


Bild 2.8: Schädigungen eines Laminats durch Lochleibung (in Anlehnung an [Sac20])

Durch die fehlende Duktilität des Laminats findet die Energieabsorption dabei durch Crushing, Faserknicken, Delamination und Zwischenfaserbrüche statt. Zur Abminderung der Versagensneigung ist eine Reduktion des Lochleibungsdrucks und eine Steigerung der Druckfestigkeit des Laminats erforderlich. Hierzu sind grundsätzlich UD-Schichten in Lastrichtung anzuordnen und es ist ein Matrixwerkstoff mit höherer Schubfestigkeit zu wählen, womit jedoch ein Ausknicken der Fasern begünstigt wird. Geometrische Maßnahmen, wie die Erhöhung der Bauteildicke und des Bolzendurchmessers, sorgen außerdem für eine großflächige Einleitung der Druckkräfte und damit zur Reduktion des Lochleibungsdrucks. Der gleiche Effekt wird mit weniger Materialeinsatz durch eine lokale Aufdickung des Bohrbereichs erreicht. Diese Aufleimer bilden eine axiale Druckunterstützung und mindern die Neigung zur Delamination und Rissbildung (Zwischenfaserbrüche). Insbesondere wirken sich zusätzliche  $\pm 45^\circ$ -Schichten positiv auf das Lochleibungsversagen aus (näheres in [Ste93] S.55, [Mül91] S.70ff, [Eri90] S.1253ff). Des Weiteren sollten Biege- und Torsionsbelastungen der Verbindung vermieden werden, weil diese zu einer ungleichmäßigen Verteilung des Lochleibungsdrucks führen und somit erhöhte Spannungen an den Bauteilrändern bewirken.

### 2.1.5 FEM und Modellierung von FVK

Die Finite Elemente Methode (FEM) ist ein diskretes Näherungsverfahren zur Lösung beliebiger Feldprobleme, die einer mathematischen Modellierung zugänglich sind. Das physikalische Problem muss sich als Rand- oder Anfangswertproblem darstellen lassen, womit die zugehörigen Feldgrößen die partiellen Differentialgleichungen (pDGL) erfüllen und gleichzeitig den Rand- und Anfangsbedingungen genügen müssen. Das Prinzip der FEM beruht auf der Diskretisierung eines Kontinuums in eine finite Anzahl einfacher Elemente, deren Verhalten analytisch beschrieben werden kann und somit bekannt ist. Die Verbindung der Elemente wird durch Knotenpunkte, die gewissen Stetigkeitsanforderungen und Gleichgewichtsbedingungen unterliegen, realisiert. In diesen Knoten werden die unbekanntes Feldgrößen angenommen, die sich nicht mehr kontinuierlich über das Kontinuum verteilen, sondern diskrete Werte in den Knoten annehmen. Dadurch vereinfachen sich die das physikalische Problem beschreibenden pDGL letztlich zu einem linearen Gleichungssystem (LGS), das sich elegant mit bekannten Algorithmen lösen lässt. In der **Strukturmechanik** sind die fundamentalen Feldgrößen die Verschiebungen in den Knoten, die mit Hilfe der zugehörigen Elementsteifigkeiten und Knotenkräften bestimmt werden. Für das gesamte diskretisierte Kontinuum mit  $n$  finiten Elementen und  $k$  Elementknoten werden die Elementsteifigkeiten  $\mathbf{k}_i$  zur Gesamtsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  und die Knotenkräfte zum Gesamtkraftvektor  $\vec{F}$  zusammengefasst, womit für alle Knotenverschiebungen  $\vec{v}$  das LGS



$$\mathbf{K} \cdot \vec{v} = \vec{F} \quad \text{mit} \quad \mathbf{K} = \sum_{i=1}^n \mathbf{k}_i, \quad \vec{v} = [u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad \dots \quad u_k \quad v_k \quad w_k]^T \quad \text{und} \\ \vec{F} = [F_{1x} \quad F_{1y} \quad F_{1z} \quad \dots \quad F_{kx} \quad F_{ky} \quad F_{kz}]^T \quad (2.25)$$

aufgestellt werden kann. Die Elementsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{k}_i$  eines Elements  $i$  kann ausgehend vom Prinzip der virtuellen Arbeit für unterschiedliche, bei der Diskretisierung verwendete Elementtypen ermittelt werden (näheres in [Wag17] S.60 und S.75ff, [Lin02] S.44ff und S.80ff). Daneben sind für ein Element verschiedene Polynomansatzfunktionen zur Beschreibung der Verschiebungen zwischen den Knoten vorhanden (näheres in [Lin02] S.119ff). Neben Ansatzpolynomen mit Grad 2 (Elemente 2. Ordnung) wird vorwiegend ein linearer Ansatz (Elemente 1. Ordnung) verwendet. Für eine vollständige Definition des Randwertproblems, also für eine eindeutige Beschreibung des Zusammenhangs zwischen den Belastungen und Verschiebungen einer Struktur, sind die äußeren Lasten auf die involvierten Knotenkräfte umzurechnen und die äußeren Verschiebungen als diskrete Knotenverschiebungen einzuarbeiten.

Mit der Lösung des LGS aus Gleichung (2.25) sind die Knotenverschiebungen  $\vec{v}$  der diskretisierten Struktur bekannt. Damit lassen sich mittels Elastizitätstheorie weitere Strukturantworten ermitteln. Wichtige Größen zur Beurteilung der lokalen Strukturbeanspruchung und der Gesamtstruktursteifigkeit sind hierbei die Elementspannungen und die globale mittlere Nachgiebigkeit. Die Beanspruchung eines Elements  $i$  wird durch den **Spannungstensor**  $\mathbf{S}_i$  beschrieben, der durch Transformation in die Schnittebenen (Hauptspannungsebenen) mit verschwindenden Schubspannungen lediglich drei Hauptnormalspannungen  $\sigma_{i,I}$ ,  $\sigma_{i,II}$  und  $\sigma_{i,III}$  enthält. Die Normalen dieser Hauptspannungsebenen entsprechen den Hauptspannungsrichtungen  $\vec{n}_{i,I}$ ,  $\vec{n}_{i,II}$  und  $\vec{n}_{i,III}$ , womit sich jeweils ein Hauptspannungsvektor ergibt (näheres in [Läp11] S.75ff):

$$\vec{\sigma}_{i,H} = \sigma_{i,H} \cdot \vec{n}_{i,H} = \mathbf{S}_i \cdot \vec{n}_{i,H} \quad \text{mit} \quad \mathbf{S}_i = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}_i \quad \text{und} \quad H = I, II, III. \quad (2.26)$$

Jede Hauptspannungsebene ist dabei gegenüber einem kartesischen Koordinatensystem jeweils um alle drei Achsen  $x$ ,  $y$ ,  $z$  gedreht:

$$\vec{n}_{i,H} = [n_{xi,H} \quad n_{yi,H} \quad n_{zi,H}]^T \quad \text{mit} \quad H = I, II, III. \quad (2.27)$$

Werden diese Hauptnormalspannungsrichtungen über alle finiten Elemente durch Linien miteinander verbunden, lassen sich Hauptnormalspannungsverläufe für die Struktur darstellen und somit ein guter Überblick über den Hauptspannungszustand wiedergeben. Die Scharen dieser Hauptspannungskurven werden als Spannungstrajektorien oder in diesem Fall als Hauptnormalspannungstrajektorien bezeichnet. Anschaulich können diese Linien als „Lastpfade“ oder „Kraftflüsse“ gedeutet werden, sind aber von der eigentlichen Definition einer Spannungstrajektorie abzugrenzen (näheres in [Bey15] S.14ff).

Die **globale mittlere Nachgiebigkeit**  $C$  (engl. Compliance), im Weiteren als mittlere Nachgiebigkeit bezeichnet, als Maß für die Steifigkeit einer Struktur wird durch die Summe der Produkte aller Knotenkräfte  $\vec{F}_j$  mit den dazugehörigen Verschiebungsvektoren  $\vec{v}_j$

$$C = \sum_{j=1}^k \vec{F}_j^T \cdot \vec{v}_j \quad (2.28)$$

beschrieben und entspricht damit bei linear elastischen Werkstoffen dem doppelten Wert der Arbeit der äußeren Kräfte  $W$  bzw. der internen Formänderungsenergie  $U$ , da aus Gründen der Energieerhaltung (Arbeitssatz)  $W = U$  gilt. Für eine Struktur mit dem Volumen  $V$  folgt mit Gleichung (2.25) somit

$$C = 2 \cdot U = 2 \cdot W = \vec{v}^T \cdot \mathbf{K} \cdot \vec{v} \quad \text{mit } W = \frac{1}{2} \vec{v}^T \cdot \vec{F} \quad \text{und} \quad U = \frac{1}{2} \int_V \vec{\sigma}^T \cdot \vec{\varepsilon} \, dV, \quad (2.29)$$

womit die mittlere Nachgiebigkeit mit den aus dem LGS in Gleichung (2.25) ermittelten Knotenverschiebungen  $\vec{v}$  bestimmt werden kann. Mit der Einschränkung auf ein Teilmengen der Struktur kann die mittlere Nachgiebigkeit auch für lokale Bereiche angegeben werden (näheres in [Har08] S.133f, [Sch13] S.29f, [Wag17] S.58f).

Die rasante Entwicklung und Verbreitung der FEM ist eng mit der Computertechnologie verzahnt, denn mit dem Fortschritt in der Computertechnologie können auch größere LGS und damit komplexere Problemstellungen schnell gelöst werden. In der Strukturmechanik wird die FEM im Allgemeinen automatisiert in Berechnungsprogrammen angewendet. Heute ist sie das am häufigsten routinemäßig eingesetzte Berechnungsverfahren für komplexere Strukturen. Die Historie der FEM und eine Einordnung in den Berechnungsprozess sind in [Kno17] S.5ff und S.12ff aufgeführt.

### **Modellierung von FVK mittels FEM**

Die FEM ist eine multidisziplinäre und werkstoffunabhängige Methode, deren fundamentaler Zusammenhang in Gleichung (2.25) den Werkstoff über die Elementsteifigkeitsmatrix berücksichtigt. Die bei der Elementformulierung hinterlegten Werkstoffkennwerte beschreiben damit das Werkstoffverhalten (vgl. Kapitel 2.1.2) sowie die Schädigung (vgl. Kapitel 2.1.3) des FE-Modells eines FVK. Dabei ist auch eine skalenübergreifende Modellierung möglich (vgl. [Käs09]), wobei für detaillierte Betrachtungen von FVK die Eigenschaften der Mikroebene unter anderem mit Einheitszellen und repräsentativen Volumenelementen (RVE) homogenisiert berücksichtigt werden (vgl. Kapitel 2.1.1 und näheres in [Cam08] S.33ff). Hierzu sind bereits Implementierungen in kommerziellen FE-Programmen, wie die Multiscale Designer Erweiterung in HyperWorks, verfügbar. In der Regel findet eine FE-Modellierung von FVK jedoch auf Mesoebene statt. Vorhandene Schalen- und Volumenelemente werden mit weiteren Parametern erweitert, die Faserorientierung, Schichtdicke und Laminataufbau berücksichtigen können (vgl. Anhang C). Die Modellierung mit **Schalenelementen** bietet sich dabei förmlich an, da faserverstärkte Strukturen einerseits in ihrer Ausprägung eine kleine Dicke aufweisen und andererseits bewährte Berechnungsmethoden wie die klassische Laminattheorie (vgl. Kapitel 2.1.2) von einem ebenen Flächen-tragwerk ausgehen. Grundsätzlich kann hierbei für die Modellierung zwischen einem **zonenbasierten** oder **schichtbasierten Aufbau** unterschieden werden. Die entsprechenden Elementformulierungen erlauben dann

1. die Modellierung aller Schichten für einzelne Schalenelemente oder Elementzonen (zonenbasiert, vgl. Anhang C und näheres in [Wol14] S.163) oder
2. die Modellierung jeder einzelnen Schicht für alle oder einen Teil der Schalenelemente (schichtbasiert, vgl. Anhang C und näheres in [Wol14] S.167).

Unabhängig davon wird die reale Struktur mit Schalenelementen stark abstrahiert. Eine vorwiegend zweidimensionale Betrachtung erschwert dabei auch eine detaillierte Modellierung von Randbedingungen. Zudem können Kontakte parallel zur Schalenebene nicht erfasst werden. Abhilfe kann hierbei die Modellierung mit **Volumenelementen** bieten. Jedoch ergeben sich aufgrund der dünnen FVK-Strukturen in aller Regel sehr kleine oder stark längliche Elemente. Mit der Einhaltung eines empfohlenen Kantenverhältnisses von maximal 1:5 (vgl. [Wol14] S.172) erhöht sich die Elementanzahl. Ist zudem eine höhere Detaillierung in Laminatdickenrichtung und die Untersuchung interlaminaarer Effekte durch schichtweisen Lagenaufbau (mehrere Elementreihen) gefordert, steigt der Rechenaufwand weiter an. Dem entgegen liefert eine feinere Diskretisierung, insbesondere in Kraffteinleitungsbereichen (vgl. Kapitel 2.1.4), im Allgemeinen ein besseres Ergebnis. Somit sind Detaillierungsgrad, Rechenaufwand und erreichbare Ergebnisgüte für eine problemangepasste Elementauswahl gegeneinander abzuwägen.

Eine andere Herangehensweise ermöglichen **spezielle Volumenelemente**, die eine Definition aller Schichten für eine einzige Elementreihe erlauben (vgl. Anhang C). Im Gegensatz dazu wird bei der herkömmlichen Methode jede Schicht durch mindestens eine Elementreihe modelliert, wodurch die Schichtanzahl die Menge der Elemente übereinander vorschreibt. Ferner werden zur Kopplung von Schalen- und Volumenelementen Übergangselemente eingesetzt, um die Vorteile beider Modellierungen lokal auszunutzen (näheres in [Wag01] S.73ff). Damit können besonders Krafteinleitungsbereiche und Lagerstellen realitätsnah abgebildet und die restliche Struktur mit einer geringeren Elementanzahl modelliert werden. Allen Modellierungsmethoden gemein ist, dass bei bereichsweiser Schichtdefinition auf die Konsistenz des Laminataufbaus zwischen den Elementen zu achten ist.

Eine **Festigkeitsbeurteilung** samt Schädigungsverlauf (vgl. Kapitel 2.1.3) ist innerhalb der FEM über die dem finiten Element zugewiesenen Festigkeiten und die verschiedenen Delaminations- und Degradationsmodelle ebenso möglich. Beispiele hierzu finden sich unter anderem in [Wag01], [Cam03] und [Hör02].

## 2.2 Das Kontaktproblem einer Bolzenverbindung

Der Kontakt zwischen Bolzen und Verbindungselement ist für die Kraftübertragung der Bolzenverbindung essentiell, weshalb das Verständnis dieses Kontaktproblems ein zentraler Punkt bei der Betrachtung der Verbindung ist. Geometrisch gesehen trifft eine konvexe auf eine konkave Zylinderfläche, wobei sich eine Kontaktfläche ausbildet, über die Kräfte vom Bolzen auf den Lochrand übertragen werden.

Die Beschreibung dieser Kontaktfläche und der dazugehörigen Kontaktklasten sind Bestandteil verschiedener Kontakttheorien. Die Grundlage hierfür bildet die Theorie nach HERTZ<sup>10</sup> in [Her81]. Der **ideale Kontakt** nach HERTZ beschreibt die Berührung zweier Körper in einem Punkt oder entlang einer Linie. Durch Aufbringen einer statischen Last senkrecht zu der sich ausbildenden Kontaktfläche, die im Vergleich zu den signifikanten Abmessungen der Körper klein ist, treten nur kleine, rein elastische Verformungen auf, wodurch diese Fläche als eben angenommen werden kann. Des Weiteren haben beide Körper im Kontaktbereich eine stetige, nicht formabweichende Geometrie, besitzen ein elastisches, homogenes und isotropes Werkstoffverhalten und sind frei von Eigenspannungen und Oberflächenrauheiten. Ohne tangentielle Belastung der Kontaktfläche können somit Reibkräfte ausgeschlossen werden. Lediglich eine Normalbeanspruchung der Kontaktfläche ist relevant. Außerdem ist der Kontakt ungeschmiert und trocken. Trotz dieser Idealisierungen bildet die HERTZsche Theorie die fundamentale Methode zur Ermittlung der Kontaktdruckverteilung.

---

<sup>10</sup> Hertz, Heinrich Rudolf (1857 – 1894); dt. Physiker

**Weiterführende Theorien** bauen auf diesen Erkenntnissen auf und versuchen einzelne Idealisierungspunkte wirklichkeitstreu zu beschreiben. Eine Übersicht verschiedener Theorien ist in [Bar00] aufgeführt. Mit der Betrachtung der Relativbewegung der Kontaktpartner können Normal-, Querkontraktions-, Tangential- und Rollbewegungen berücksichtigt werden (näheres in [Joh03] S.119ff, S.202ff, S.242ff und [Pop09] S85ff, S.96ff). Ebenso können dynamische Lasten, Stoßeffekte und zeitliche Abhängigkeiten erfasst werden (näheres in [Joh03] S.340ff und [Bar00] S.32f). Reale Oberflächen verhindern aufgrund ihrer Rauheit eine kontinuierliche Kontaktfläche und weisen vielmehr kleine Mikrokontaktflächen (Rauheitskontaktflächen) auf. Zur Beschreibung dieses Kontaktproblems ist eine Modellierung der Rauheit unerlässlich (näheres in [Bar00] S.36ff, [Gre66] und [Pop09] S.70ff). Ferner kann der Einfluss der Adhäsion auf den Kontakt durch verschiedene Modelle ermittelt werden (näheres in [Shi04] und [Pop09] S.25ff). Weitere Kontaktmodelle beschäftigen sich mit der Thermik, Plastizität oder der Anisotropie.

Die Vielzahl an Einflussfaktoren und die angedeutete Komplexität erfordern für die Betrachtung eines **realen Kontakts** in der Regel eine numerische Methode. Eine alternative Herangehensweise an die Kontaktproblematik bietet die Methode der Dimensionsreduktion. Deren Anwendung in der Kontaktmechanik ist für verschiedene Kontaktprobleme in [Pop13] aufgeführt.

Das Kontaktproblem einer Bolzenverbindung in faserverstärkten Strukturen kann abgesehen vom isotropen Werkstoffverhalten als idealer Kontakt betrachtet werden. Ein statischer Lastfall mit genereller Normalbewegung erlaubt bei hohen Lasten und technisch glatten Oberflächen die Vernachlässigung der Reibung, der Adhäsionskräfte sowie der Rauheit (näheres in [Joh03] S.119ff, [Shi04] S.66, [Pop09] S.32). Ein Plastifizieren des Bolzens sowie thermische Effekte werden nicht berücksichtigt. Die Kontaktfläche und die dazugehörige Druckverteilung werden von den richtungsabhängigen Steifigkeiten eines FVK zwar beeinflusst, jedoch besteht eine Ähnlichkeit zur Ausprägung beim Kontakt mit isotropen Werkstoffen (näheres in [Wil66] S.166ff). Für den Fall des idealen Kontakts infolge einer Kraft  $F$  kann die Druckverteilung in der Kontaktfläche aus den allgemeinen Herleitungen von HERTZ (näheres in [Her81], [Her82] S.456f) für eine **Bolzenverbindung mit isotropen Werkstoffen** zu

$$p(y) = \frac{2F}{\pi t b} \sqrt{1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2} \quad \text{mit} \quad b = \sqrt{\frac{4F}{\pi t} \frac{\frac{1 - \nu_{\text{Bolzen}}^2}{E_{\text{Bolzen}}} + \frac{1 - \nu_{\text{Lochrand}}^2}{E_{\text{Lochrand}}}}{\frac{1}{R_{\text{Bolzen}}} - \frac{1}{R_{\text{Lochrand}}}}} \quad (2.30)$$

abgeleitet werden, wobei  $b$  die halbe Breite und  $t$  die Länge der Kontaktfläche (Dicke des Verbindungselements) ist und stets  $0 < R_{\text{Bolzen}} < R_{\text{Lochrand}}$  gilt. Der Kontaktdruck verteilt sich

hierbei über die Kontaktflächenbreite ( $y$ -Richtung) als halbelliptisches Prisma (Wurzelfunktion  $\sqrt{1-(y/b)^2}$ ) mit dem Maximum ( $2F/\pi tb$ ) entlang der initialen Berührungslinie (Länge  $t$ ). Randeffekte können aufgrund der innerhalb der HERTZschen Theorie zugrundeliegenden Annahme einer unendlich langen Kontaktfläche nicht berücksichtigt werden, womit sich eine über die Länge  $t$  der Kontaktfläche konstante Druckverteilung ergibt. Unter Annahme der gleichen Verteilung und eines auf  $2b$  bezogenen Kraftmaximums kann die Kraftverteilung mit

$$F(y) \approx F_{\max} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2} = p_{\max} \cdot t \cdot 2b \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2} = \frac{4F}{\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2} \quad (2.31)$$

angenähert werden. Die Beschreibung des Kontaktdrucks für einen **anisotropen Werkstoff** ist mit Mitteln der Potentialtheorie, die HERTZ zur Lösungsfindung genutzt hat, nur für den Fall einer transversalen Isotropie mit einer Materialsymmetrieachse senkrecht zur Kontaktfläche möglich (näheres in [Mic00] S.256, [Wil66] S.163, S.169f und [Gla80] S.575ff). Andere Herangehensweisen zur Lösung des Kontaktproblems im anisotropen Fall bieten

- die FOURIER<sup>11</sup>-Transformation in [Wil66], [Gla80],
- die komplexen Potentialfunktionen in [Lek63], [Jon77], [Zha84] und
- die effektiven Ersatzsteifigkeiten in [Pop18], [Del04].

Daneben wird in [Bar00] ein Überblick der Untersuchungen zur Anisotropie beim Kontakt gegeben. Konkretere Untersuchungen an FVK werden in [Jon77] und [Zha84] durchgeführt, wobei die Kontaktsituation einer durch einen Bolzen belasteten Lochscheibe analysiert wird. Unter den Voraussetzungen eines unendlich steifen Bolzens, einer unendlich ausgedehnten Scheibe sowie eines gleichen Bolzen- und Lochdurchmessers werden in beiden Quellen ähnliche Ergebnisse erzielt. In [Jon77] kommt man zu dem Schluss, dass die Nachgiebigkeit des Bolzens wie auch die des Lochrands quer zur Last zu berücksichtigen sind. Dadurch kann es abhängig von den Werkstoffen aufgrund der Ovalisierung beider Kontaktpartner zur Klaffung oder zum Kontakt auf der Querachse zur Kontaktflächennormalen kommen. Ferner wird gezeigt, dass sich für isotrope oder leicht anisotrope Werkstoffe eine sinusförmige Spannungsverteilung in der Kontaktfläche als gute Näherung für den Kontaktdruck erweist. Im Unterschied zum isotropen Fall wird zudem ein höherer Spannungsgradient am Lochrand beobachtet. Daneben wird in [Zha84] zusätzlich der Reibeinfluss auf den Spannungszustand betrachtet. Dabei wird eine Abhängigkeit vor allem für die Umfangspannung festgestellt. Weiterhin zeigt sich ein starker Einfluss des Orthotropiegrades von Laminaten auf die Spannungsverteilung über der Kontaktfläche.

<sup>11</sup> Fourier, Jean Baptiste Joseph (1768 – 1830); franz. Mathematiker und Physiker

### 2.2.1 Mathematische Beschreibung des Kontaktdrucks einer Bolzenverbindung in FVK

Aus den obigen Ausführungen lassen sich im wesentlichen drei Möglichkeiten zur Modellierung des Kontaktdrucks für eine Bolzenverbindung in FVK ableiten. Eine einfache Methode ist dabei die Annahme einer **sinusförmigen Spannungsverteilung** am Lochrand mit Radius  $R$  und Umfangsrichtung  $\varphi$  in der Form

$$\sigma_{rr}(\varphi) = \frac{2}{\pi} \frac{F}{tR} \cos \varphi . \quad (2.32)$$

Dieses normierte und werkstoffunabhängige Lastmodell liefert als Projektion auf die Achse (vgl.  $y$ -Achse in Gleichung (2.30)) senkrecht zur Krafrichtung eine sinusförmige Radialspannungsverteilung über der Breite  $2R$ . Diese Lastmodellierung ist individuell anpassbar, universell einsetzbar und kann zudem, wie bereits erwähnt, gute Ergebnisse liefern, womit es auch häufig Verwendung findet (vgl. [Jon77], [Cha82], [Pra84], [Zha84]). Mit der fehlenden Werkstoffinformation bleibt jedoch die Kontaktfläche unbekannt. Zudem weicht bei größeren Verformungen der Kontaktfläche die Radialspannung (radiale Wirkrichtung) vom Kontaktdruck (Wirkung in Richtung der Kontaktflächennormale) stärker ab.

Alternativ dazu kann mit der Verwendung einer **Ersatzelastizität**, wie in [Del04] und [Pop18] beschrieben, das Verhalten eines transversal isotropen Werkstoffs berücksichtigt und die Kontaktfläche berechnet werden. Dabei wird die HERTZsche Theorie mit einer werkstoff- und richtungsabhängigen Ersatzelastizität erweitert. Für Gleichung (2.30) sind demnach die Materialkennwerte für den Körper des Lochrands mit

$$\frac{1 - \nu_{\text{Lochrand}}^2}{E_{\text{Lochrand}}} = \frac{1}{E^*} \quad (2.33)$$

zu ersetzen. Für eine axialsymmetrische Belastung einer UD-Einzelschicht in Faserrichtung durch einen starren Eindringkörper wird die Ersatzelastizität mit

$$E^* = M_{33} = \frac{E_{22}}{1 - \nu_{23}^2} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{E_{22} - \nu_{21}(1 + \nu_{23})}{2G_{12}(1 - \nu_{23}^2)} + \frac{E_{22} - \nu_{21}^2}{E_{11}(1 - \nu_{23}^2)}}} \quad (2.34)$$

und bei Belastung quer zur Faser mit

$$E^* = M_{11} \approx \sqrt{M_{33} \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \sqrt{\frac{E_{22}}{E_{11}} \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{1 - \nu_{23}^2}}} \quad (2.35)$$

berechnet. Diese Ersatzelastizität  $E^*$  stellt ein Maß für den Widerstand eines Werkstoffs gegen das Eindringen dar und entspricht damit einer richtungsabhängigen Eindruckssteifigkeit, weswegen diese als Eindruckmodul oder Indentierungsmodul  $M_{ij}$  bezeichnet wird. Für andere als die oben beschriebenen Faserorientierungen ist dieser Eindruckmodul separat herzuleiten oder näherungsweise zu ermitteln. Die geometrische Form und die Nachgiebigkeit des Bolzens wird zwar bei der Kontaktflächenberechnung in Gleichung (2.30) beachtet, bleiben aber trotzdem bei der Ermittlung der Ersatzelastizität unberücksichtigt.

Die dritte Möglichkeit zur Beschreibung der Spannungen am Lochrand wird in [Zha84] aufgezeigt. Dabei wird auf Basis **komplexer Potentialfunktionen** mit Hilfe der Herleitungen von LEKHNITSKII<sup>12</sup> in [Lek63] der Spannungszustand für einen durch einen starren Bolzen belasteten Halbraum sowie Vollraum hergeleitet, wobei die Dehnungsbehinderung des Lochrands in Querrichtung durch die Ovalisierung des Loches mitberücksichtigt wird. Für die Radialspannung am Lochrand gilt

$$\sigma_{rr}(\varphi) = \frac{u_0}{cgR} \left[ T_1 + T_2 + T_3 + T_4 - \frac{cg}{u_0} \frac{F}{\pi t} \cos \varphi \right] \quad \text{mit} \quad (2.36)$$

$$T_1 = n(c+1)(1-k) \cos 5\varphi,$$

$$T_2 = (c+1)(3\nu_{12} - 3k - nk) \cos 3\varphi,$$

$$T_3 = \frac{c-1}{2} n(1-k) \cos 3\varphi,$$

$$T_4 = \left[ -\frac{c-1}{2} (2k - 2\nu_{12} + nk + n) - (c+1)(k - \nu_{12} + n) \right] \cos \varphi.$$

Dabei werden die Verschiebung  $u_0$  in der Mitte der Kontaktfläche mit

$$u_0 = \frac{gF}{4\pi t} \frac{10e - 11n(1-k)}{5n^2k(1-k) + (e-2n)[5e - 3n(1-k)]} \quad (2.37)$$

und die werkstoffabhängigen Konstanten mit

<sup>12</sup> Lekhnitskii, Sergej Georgievich (1909 – 1981); russ. Ingenieur



$$c = -\frac{10e - 11n(1-k)}{10e - n(1-k)}, \quad e = k - \nu_{12} + nk + 2n, \quad g = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{E_{22}} + \frac{k}{G_{12}}, \quad (2.38a-c)$$

$$n = \sqrt{\frac{E_{11}}{G_{12}} - 2\nu_{12} + 2k}, \quad k = \sqrt{\frac{E_{11}}{E_{22}}} \quad (2.39a,b)$$

berechnet. Der Radius  $R$  ist hierbei für Bolzen und Lochrand gleich, womit die Kontaktfläche vorgegeben ist. Mit vernachlässigten Reibeffekten und isotropen Werkstoffeigenschaften kann in [Zha84] für die Radialspannung  $\sigma_r$  die Gleichung (2.32) hergeleitet werden.

Die drei vorgestellten Ansätze zur Modellierung des Kontaktdrucks einer Bolzenverbindung in FVK sind Näherungen der realen Beanspruchung mit unterschiedlichen Einschränkungen. Beim Lastmodell mit der sinusförmigen Spannungsverteilung werden die Werkstoffe nicht berücksichtigt, die Kontaktfläche nicht ermittelt und nur die Radialspannung bestimmt. Im Lastmodell mit der Ersatzelastizität sind durch die Erweiterung der HERTZschen Theorie die Kontaktfläche und der Kontaktdruck bekannt und die Werkstoffe beider Kontaktpartner werden involviert, jedoch bleibt bei der Ermittlung des Eindruckmoduls der Bolzenwerkstoff unberücksichtigt. Das dritte Lastmodell kann als Herleitung aus der Elastizitätstheorie den gesamten ebenen Spannungszustand am Lochrand angeben. Dennoch wird das Werkstoffverhalten des Bolzens ignoriert und die Kontaktfläche durch die Herleitung vorgegeben. Die Anwendung der Lastmodelle zur Kontaktmodellierung ist in Kapitel 3.3 sowie mitsamt ausführlichem Vergleich in [Sch19] aufgeführt.

### 2.2.2 Beanspruchung und Deformation einer Bolzenverbindung in FVK

Die Kontaktfläche und damit die Kontaktdruckverteilung einer Bolzenverbindung in FVK wird ebenso wie bei isotropen Werkstoffen durch die Belastung sowie das Radien- und Steifigkeitsverhältnis der Kontaktpartner bestimmt (vgl. Gleichung (2.30)). Ein MSV mit unterschiedlichen Schichtsteifigkeiten erfordert hierbei jedoch eine schichtweise Betrachtung. Eine Faserorientierung senkrecht zur Kontaktfläche führt zu geringer Verformung dieser Schicht, zu kleiner Kontaktfläche und zu einem hohen Kontaktdruck. Im Vergleich dazu erhält man bei einem Schichtwinkel parallel zur Kontaktfläche einen kleineren Kontaktdruck bei größerer Kontaktfläche und Schichtverformung. Schichten mit anderen Faserwinkeln liegen zwischen diesen beide Extremen. Im Laminat betrachtet ergeben sich durch den Wechsel der Schichtorientierung Spannungssprünge in den Schichtgrenzen, die mit kleineren Schichtdicken geringer ausfallen, wie links in Bild 2.9 verdeutlicht wird. Mit der Koordinate  $t^*$  (vgl. Darstellung in Bild 2.9 rechts) liegt die Laminatmittelebene bei  $t^* = 0$  und

die Abstände zwischen den Schichtgrenzen ergeben sich zu  $2t^*/t = 0,5$  bzw.  $2t^*/t = 0,1$ . Neben den erkennbaren Kontaktdruckveränderungen an den Schichtgrenzen kann ab  $2t^*/t = 0,8$  ein deutlicher Kontaktdruckanstieg zum Rand hin festgestellt werden. Dieser Randeffect wird in der HERTZschen Kontakttheorie mit der Annahme einer unendlich langen Kontaktfläche vernachlässigt, tritt aber bei einer realen Bolzenverbindung mit endlicher Kontaktlänge  $t$  auf. Rechts in Bild 2.9 ist der Randeffect nochmals für einen isotropen Werkstoff mit einer Symmetrieebene bei 0 veranschaulicht. Darin ist zudem die Abhängigkeit der Kontaktdruckveränderung von der Bolzenlänge  $l$  dargestellt. Ein über das Verbindungselement überstehender Bolzen, der gleichmäßig gegen dieses gedrückt wird, biegt sich über die Kante des Verbindungselements. Dadurch wird die freie Verformung des Lochrands parallel zur Bolzenachse behindert und es kommt zum Spannungsanstieg. Je größer das Verhältnis der Bolzenlänge zur Verbindungselementdicke ist, desto stärker biegt sich der Bolzen und desto größer wird die Spannungsüberhöhung. Für eine Bolzenverbindung in FVK sind damit höhere interlaminare Spannungen zu erwarten. Durch das Kippen des Bolzens über die Kante des Verbindungselements wird die Bauteilmitte jedoch leicht entlastet. Neben der höheren Beanspruchung des Bauteilrands erfährt der Bolzen selbst eine zusätzliche Biegebeanspruchung. Ein anderer Spannungs- und Verformungszustand im Randbereich ergibt sich für ein Verhältnis  $l/t = 1$ . Es kommt zum Spannungsabfall, da sich der Rand freier verformen kann als das Bauteilinnere.

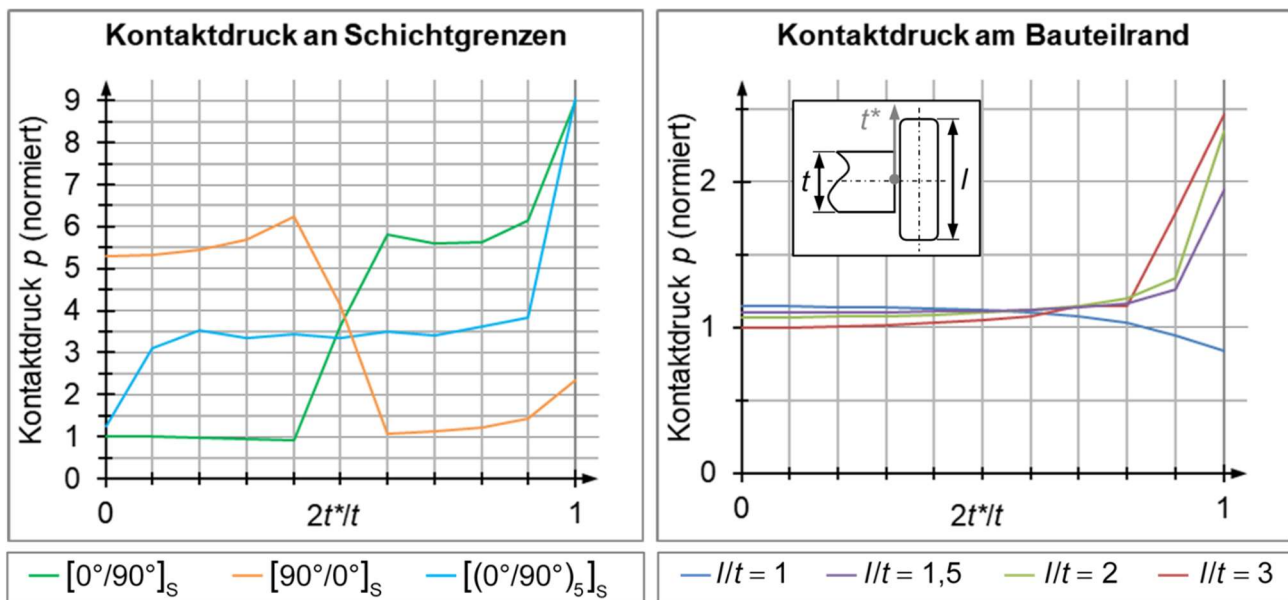


Bild 2.9: Kontaktdruckveränderungen an Schichtgrenzen für verschiedene Laminats mit  $l/t = 3$  (links) sowie am Bauteilrand für einen isotropen Werkstoff (rechts)

Ferner kann für eine reale Bolzenverbindung anders als in der HERTZschen Theorie keine gegenüber den anderen Abmessungen kleine und ebene Kontaktfläche erwarten werden. Die reale Verformung nimmt über die Kontaktflächenbreite  $2b$  vom Rand zur Mitte hin zu.

## 2.3 Strukturoptimierung

Der Begriff der Optimierung wird in den unterschiedlichsten Zusammenhängen verwendet und meint etwas zu verbessern oder eine bessere bzw. die optimale Lösung zu finden. Im technischen Umfeld ist diese Aufgabe klar strukturiert: Für ein vorliegendes Problem soll unter gegebenen Voraussetzungen und im Hinblick auf ein zu erreichendes Ziel die bestmögliche Lösung erarbeitet werden. Die Strukturierung und Automatisierung solcher Lösungsfindungsprozesse findet meist mit Hilfe der numerischen Mathematik statt. Diese mathematische Optimierung erfolgt in der Strukturmechanik vor allem bei komplexeren Aufgaben rechnerunterstützt. Man spricht hierbei von **numerischer Strukturoptimierung**, bei der die mechanischen Eigenschaften einer Struktur gezielt verbessert und damit optimiert werden. Die Suche mit Hilfe von mathematischen Algorithmen nach der optimalen Lösung eines Optimierungsproblems erfolgt nach einem allgemeinen Ablaufschema (vgl. Bild 2.10). Ausgehend von einer Spezifikationsliste, welche die Optimierungsaufgabe des Optimierungsproblems festlegt, und einem Strukturmodell werden für einen Startentwurf die Strukturparameter und die Analysevariablen des Analysemodells definiert. Damit werden innerhalb der Strukturanalyse die Berechnungen für die definierten Lastfälle durchgeführt und die Zustandsvariablen für das Auswertemodell ermittelt. Dieses wertet, gegebenenfalls gemäß einer Optimierungsstrategie, die Zustandsvariablen in Bezug auf die Zielvorgaben und eventuelle Nebenbedingungen aus. Der Optimierungsalgorithmus beurteilt das Auswertungsergebnis und passt die Entwurfsvariablen an oder gibt den optimalen Entwurf aus, wenn das Optimum erreicht ist. Die veränderten Entwurfsvariablen werden mit Hilfe des Entwurfsmodells wieder dem Analysemodell zur Verfügung gestellt und die Optimierungsschleife startet erneut.

Zur Erläuterung ist eine kurze Definition wichtiger Begriffe in Tabelle 2.1 aufgeführt.

Für die Durchführung des Optimierungsprozesses ist eine mathematische Formulierung der Optimierungsaufgabe notwendig:

$$\text{Min}_{\vec{x}} \{f(\vec{x}) \mid \vec{x} \in \mathbb{R}_z^n\} \quad \text{mit} \quad \mathbb{R}_z^n = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{h}(\vec{x}) = \vec{0}, \vec{g}(\vec{x}) \geq \vec{0}\}, \quad (2.40)$$

wobei alle Entwurfsvariablen  $\vec{x}$ , die alle Restriktionen  $\vec{h}$  und  $\vec{g}$  erfüllen, im zulässigen Entwurfsraum  $\mathbb{R}_z^n$  liegen, der eine Teilmenge  $\mathbb{R}_z^n \subset \mathbb{R}^n$  des kompletten Entwurfsraums  $\mathbb{R}^n$  ist. Ferner wird mit  $\vec{h}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$  der Vektor der  $q$  Gleichheitsrestriktionen, mit  $\vec{g}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  der Vektor der  $p$  Ungleichheitsrestriktionen und mit  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$  die Zielfunktion als skalare Funktion von  $n$  Variablen beschrieben. Die obige Form eines **skalaren Optimierungsproblems** (SOP) in Gleichung (2.40) kann auch für die Maximierung einer Zielfunktion verwendet werden, indem die negative Zielfunktion genutzt wird ( $\max f(\vec{x}) = \min(-f(\vec{x}))$ ).

<b>Begriff</b>	<b>Definition</b>
Optimierungsproblem	Die mit Hilfe einer Optimierung zu lösende Problemstellung. Beschreibt die Optimierungsaufgabe.
Optimierungsaufgabe	Genauere Definition der Anforderungen für das Optimierungsproblem in einer Spezifikationsliste.
Spezifikationsliste	Definiert die Möglichkeiten zur Veränderung der Struktur (Entwurfsvariablen), die Anforderungen an das Bauteil (Ziel- und Restriktionsfunktionen) und die zu berücksichtigenden Lastfälle.
Entwurfsvariablen	Sind die zu variierenden Größen bzw. Parameter der Struktur.
Zielfunktion	Formuliert die Zielvorgaben der Optimierungsaufgabe.
Restriktionsfunktion	Legt die geforderten einzuhaltenden Bedingungen der Optimierungsaufgabe fest.
Entwurfsraum	Ist der Bereich, auf den sich die Optimierung beschränkt. Entspricht den Grenzen der Entwurfsvariablen.
Strukturmodell	Rechnerunterstütztes Ersatzmodell der Struktur bzw. Bauteilgeometrie.
Analysemodell	Parametrisiertes Strukturmodell bzw. FE-Modell (bei Verwendung der FEM). Modelliert das Strukturverhalten.
Strukturanalyse	Berechnung der Zustandsvariablen des Analysemodells.
Zustandsvariablen	Strukturantworten des Analysemodells aus der Strukturanalyse.
Startentwurf	Startwerte der Entwurfsvariablen. Werden im Analysemodell umgesetzt.
Entwurf	Werte der Entwurfsvariablen der aktuellen Iteration. Werden im Analysemodell umgesetzt.
Optimaler Entwurf	Die vom Optimierungsalgorithmus gefundenen, besten Werte für die Entwurfsvariablen. Werden im Analysemodell umgesetzt.
Optimierungsalgorithmus	Mathematisches Verfahren zur Minimierung einer Zielfunktion mit oder ohne Berücksichtigung von Restriktionen. Variiert die Entwurfsvariablen (näheres in [Sch13] S.57ff und [Har08] S.13ff).
Optimierungsmodell	Schnittstelle zwischen der Strukturanalyse und dem Optimierungsalgorithmus. Beschreibt den funktionalen Zusammenhang zwischen Entwurfsvariablen und den Analysevariablen des Analysemodells (Entwurfmodell) sowie die Berechnung der Zielfunktion und Restriktionen aus den Zustandsvariablen (Auswertemodell). Legt die Optimierungsstrategie fest.
Optimierungsstrategie	Methode zur Reduktion komplexer Optimierungsaufgaben auf einfache Ersatzprobleme.

Tabelle 2.1: Definition wichtiger Begriffe der Strukturoptimierung

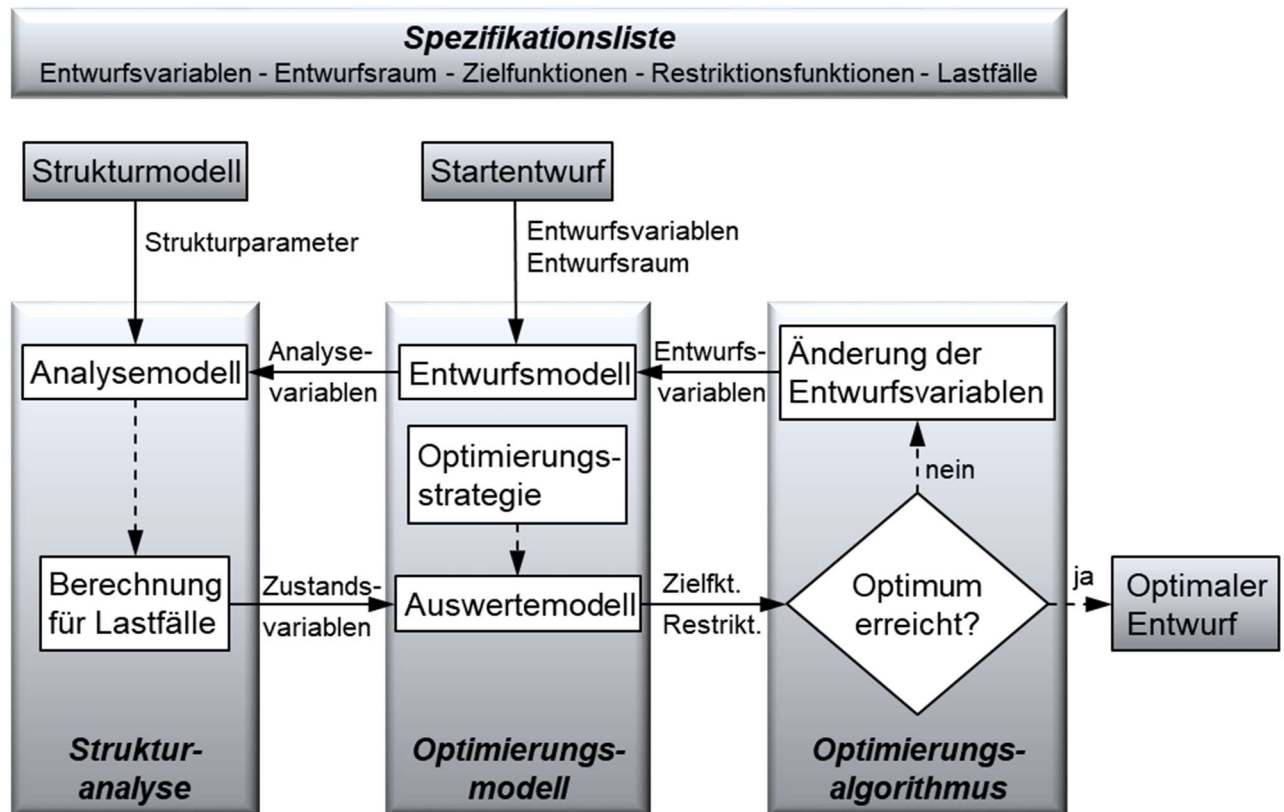


Bild 2.10: Ablaufschema einer Strukturoptimierung

Beinhaltet das Optimierungsproblem mehrere Ziele bzw. Zielvorstellungen, wird die Zielfunktion zum Zielfunktionsvektor  $\vec{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^r$  mit  $r$  Komponenten, der die  $r$  Ziele wiedergibt, erweitert. Generell gilt  $n, p, q, r \in \mathbb{N}$ . Bei diesem **Vektoroptimierungsproblem** (VOP) tritt im Vergleich zum SOP in der Regel aufgrund meist widersprüchlicher Ziele ein Zielkonflikt auf, wodurch die einzelnen Ziele nicht gleichzeitig durch einen einzigen Entwurf optimal erfüllt werden können. Die mathematische Formulierung der Vektoroptimierungsaufgabe wird deswegen in Anführungszeichen angegeben:

$$\text{"Min"}_{\vec{x}} \left\{ \vec{f}(\vec{x}) = [f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots, f_r(\vec{x})]^T \mid \vec{h}(\vec{x}) = \vec{0}, \vec{g}(\vec{x}) \geq \vec{0} \right\}. \quad (2.41)$$

Für ein derartiges VOP mit vorhandenem Zielkonflikt existieren somit mehrere Optima. Sind dabei Entwürfe vorhanden, bei denen die Verbesserung einer Zielfunktion zur Verschlechterung der restlichen Zielfunktionen führt, werden diese als funktional-effizient oder PARETO<sup>13</sup>-optimal bezeichnet. In ihrer Gesamtheit bilden diese Entwürfe, die stets am Rand des zulässigen Entwurfsraums liegen, einen PARETO-optimalen bzw. funktional-effizienten Rand. Auf diesen Rand kann je nach Präferenz der Einzelziele ein Entwurf als

<sup>13</sup> Pareto, Vilfredo Federico (1848 – 1923); ital. Ingenieur, Soziologe, Ökonom

Kompromisslösung gewählt werden. Mit der eindeutigen Definition der Präferenz in diesem Entscheidungsvorgang kann das VOP in ein **skalares Ersatzproblem** überführt werden. Mit der Ersatzziel- oder Präferenzfunktion  $p$  lautet die skalare Ersatzoptimierungsaufgabe

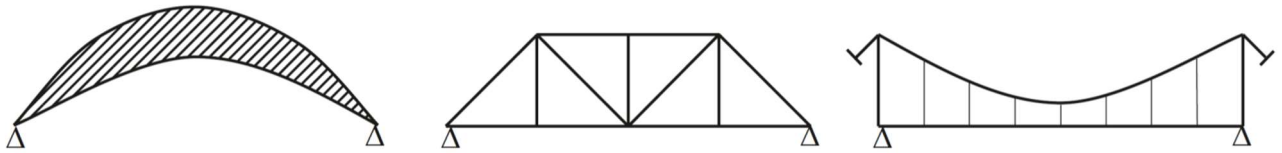
$$\text{Min}_{\vec{x} \in \mathbb{R}_z^n} \left\{ p \left[ \vec{f}(\vec{x}) \right] \right\} = p \left[ \vec{f}(\vec{x}^*) \right] \quad \text{mit} \quad \mathbb{R}_z^n = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{h}(\vec{x}) = \vec{0}, \vec{g}(\vec{x}) \geq \vec{0} \right\} \quad (2.42)$$

und  $\vec{x}^* \in \mathbb{R}_z^n$  als der Menge der PARETO-optimalen Lösungen. Diese Einzelzieloptimierung kann mit den üblichen Möglichkeiten zur Lösung eines SOP behandelt werden. Für die Bildung der Präferenzfunktionen, als generelle Optimierungsstrategie zur Behandlung von Mehrzieloptimierungen (PARETO-, Mehrkriterien- oder Vektoroptimierungen), sind verschiedene Methoden vorhanden (näheres in [Sch13] S.138ff). Eine elegante Vorgehensweise ist dabei die **Methode der restriktionsorientierten Transformation**, die mit der Definition eines Hauptziels und der Umwandlung der restlichen Ziele (Nebenziele) zu Restriktionen eine Ermittlung des funktionaleffizienten Rands erlaubt. Hierzu müssen jedoch mehrere Optimierungen mit unterschiedlichen Restriktionsgrenzen der Nebenziele durchgeführt werden. Prinzipiell ist bei dieser Methode die Wahl von Hauptziel und Nebenzielen willkürlich. Es bietet sich jedoch an, als Hauptziel die Einzelzielfunktion, bei der sich die Definition einer Restriktionsgrenze als schwierig gestaltet, oder die wichtigste Einzelzielfunktion zu wählen. Näheres hierzu und weitere Optimierungsstrategien sind in [Sch13] S.135ff aufgeführt.

Die Suche des Optimierungsalgorithmus nach dem Optimum kann sich unabhängig vom vorliegenden Optimierungsproblem als schwierig gestalten, wenn mehrere Minima möglich sind. Diese ergeben sich aus der **Nichtkonvexität** der Zielfunktion oder des zulässigen Entwurfsraums. Damit kann die Optimierung auch abhängig vom Startentwurf in verschiedenen Minima verharren. Lediglich für ein konvexes Optimierungsproblem kann die Existenz eines globalen Minimums ohne lokale Minima sichergestellt werden (näheres in [Har08] S.9ff).

Neben den bisherigen Unterscheidungsmerkmalen für Optimierungsaufgaben kann eine Einteilung solcher Aufgaben nach Art der Entwurfsvariablen vollzogen werden. Eine derartige Klassifizierung ist in Bild 2.11 dargestellt, wobei der Komplexitätsgrad der Optimierungsaufgabe von oben nach unten abnimmt. Eine optimale Bauweise für ein Optimierungsproblem zu finden ist ungemein komplexer als eine optimale Dicke einer Struktur zu ermitteln. Für diese Arbeit relevante Optimierungsklassen sind die Topologieoptimierung und die Parameteroptimierung, die im Weiteren näher betrachtet werden.

Optimierung der Bauweise: Vergleich vorhandener Bauweisen und Wahl der Bestmöglichen.



Optimierung der Materialeigenschaften: Entwurfsvariablen sind die Werkstoffkennwerte, welche meist diskrete Werte annehmen.

**Aluminium**



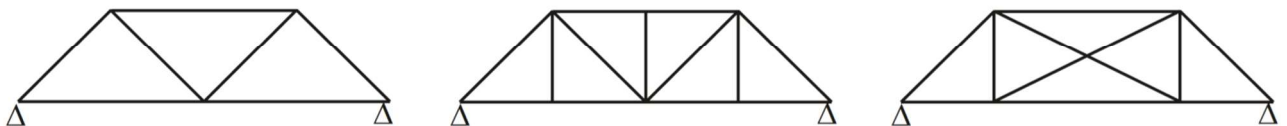
**Stahl**



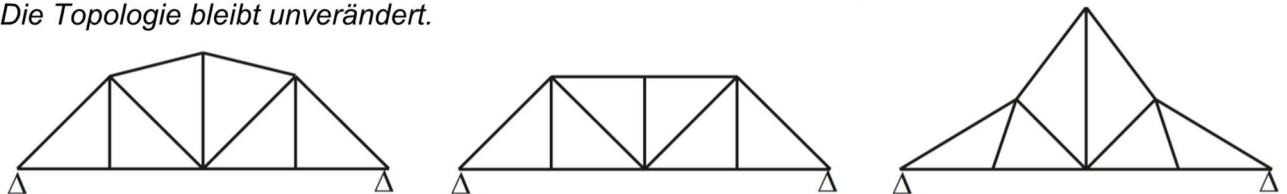
**Verbundwerkstoffe**



Topologieoptimierung: Strukturelemente können in ihrer Lage und Anordnung variiert sowie entfernt oder hinzugefügt werden. Wesentlich ist die Entstehung neuer Topologien.



Formoptimierung/Gestaltoptimierung: Die Form des Bauteilrandes ist veränderlich. Neue Strukturelemente können zur vorhandenen Geometrie nicht hinzugefügt werden. Die Topologie bleibt unverändert.



Dimensionierung/Parameteroptimierung: Entwurfsvariablen sind die einzelnen Parameter einer Struktur.

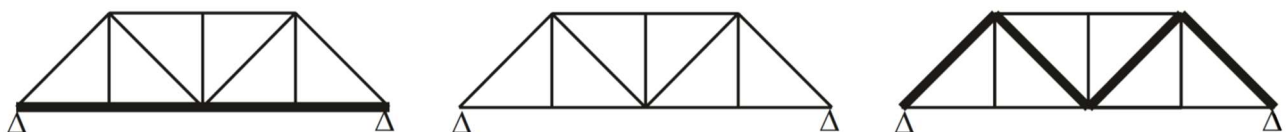


Bild 2.11: Klassifizierung von Strukturoptimierungsaufgaben nach der Art der Entwurfsvariablen am Beispiel einer Brückenkonstruktion (in Anlehnung an [Sch13])

### 2.3.1 Topologieoptimierung

Mit der Topologieoptimierung werden, wie in Bild 2.11 beschrieben, in einem definierten Bauraum unter Vorgabe von Ziel- und Restriktionsfunktionen die wesentlichen Merkmale einer Struktur generiert. Dabei ist die alleinige Änderung der mathematischen Topologieklasse nicht zielführend, weshalb in der Strukturoptimierung eine Topologieoptimierung auch Gestaltanpassungen und Dimensionierungen des topologischen Gebiets beinhaltet. Zur Topologieoptimierung sind unterschiedliche Verfahren vorhanden, unter denen die

Pixel-Methode häufig verwendet wird. Dabei wird der Entwurfsraum in kleine Bereiche (Pixel) aufgeteilt und das Materialverhalten für jeden Bereich bzw. Pixel über dessen Dichte variiert. Damit können Pixel mit verschwindender Dichte entfernt werden und für benötigte Bereiche kann eine Vollfüllung angestrebt werden. Das Kernproblem dieser Topologieoptimierung liegt nun darin, leere und gefüllte Bereiche zu deklarieren, um so die optimale Materialverteilung zu finden. Für die hierbei notwendige Beschreibung des Strukturverhaltens und die Diskretisierung des Entwurfsraums bietet sich die FEM an. Die Pixel sind nun finite Elemente. Die Lösung dieses diskreten Problems ist aufgrund der Entfernung von Elementen numerisch schwierig handzuhaben, womit eine Strategie benötigt wird, um das diskrete in ein kontinuierliches Problem zu transformieren. Mit der Homogenisierungsmethode (näheres in [Ben88], [Har08] S.201ff, [Sch13] S.214ff) ist hierfür eine Möglichkeit vorhanden, die den Zusammenhang zwischen der Elementdichte und -steifigkeit beschreibt. Mit der Charakterisierung des Dichteverlaufs zwischen den beiden Grenzen „Leer“ und „Voll“ kann damit das Strukturverhalten festgelegt werden. Eine einfache Methode hierzu, wie sie auch in kommerzieller Optimierungssoftware eingesetzt wird, bietet der SIMP-Ansatz (Solid Isotropic Material with Penalization, näheres in [Ben89], [Har08] S.205f). Dabei wird ein **normierter Dichtefaktor**  $\chi_i = \rho_i / \rho_{i0}$  als Entwurfsvariable für jedes Element  $i$  mit der Dichte  $\rho_{i0}$  bei voller Füllung sowie der Dichte  $\rho_i$  bei Voll-, Teilfüllung oder ohne Füllung verwendet. Mit der kontinuierlichen Veränderung von  $\chi_i$  kann der **Materialfüllgrad** jedes Elements zwischen  $\chi_i = 0$  und  $\chi_i = 1$  gezielt gesteuert werden. Der lineare Zusammenhang zwischen Dichte und Steifigkeit eines Elements kann viele teilgefüllte Elemente zur Folge haben, was dem Wunsch nach einer scharfen Abgrenzung zwischen vollgefüllten und leeren Elementen widerspricht. Deshalb wird ein Potenzansatz verwendet, um Teilfüllungen zu bestrafen und eine diskrete Materialverteilung zu erzwingen. Mit dem Bestrafungsexponenten  $p$  und der Elementsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{k}_{i0}$  bei voller Füllung wird die aktuelle Elementsteifigkeitsmatrix mit

$$\mathbf{k}_i = \mathbf{k}_{i0} \cdot \chi_i^p \quad (2.43)$$

berechnet, wobei stets  $p > 1$  gilt. Eine Veranschaulichung des Zusammenhangs ist in Bild 2.12 gegeben. Eine Erhöhung von  $p$  schafft bei niedriger Füllung ( $\chi_i \rightarrow 0$ ) einen immer flacheren Verlauf und bei hoher Füllung ( $\chi_i \rightarrow 1$ ) einen immer stärkeren Anstieg. Damit werden Teilfüllungen immer ungünstiger für das Steifigkeitsverhalten. Der Materialfüllgrad von leicht gefüllten Elementen wird erniedrigt, da eine Erhöhung kaum eine Steifigkeitszunahme bewirkt, und das frei werdende Material wird in Elemente mit höherer Füllung investiert, weil hier enorme Steigerungen der Steifigkeit möglich sind.



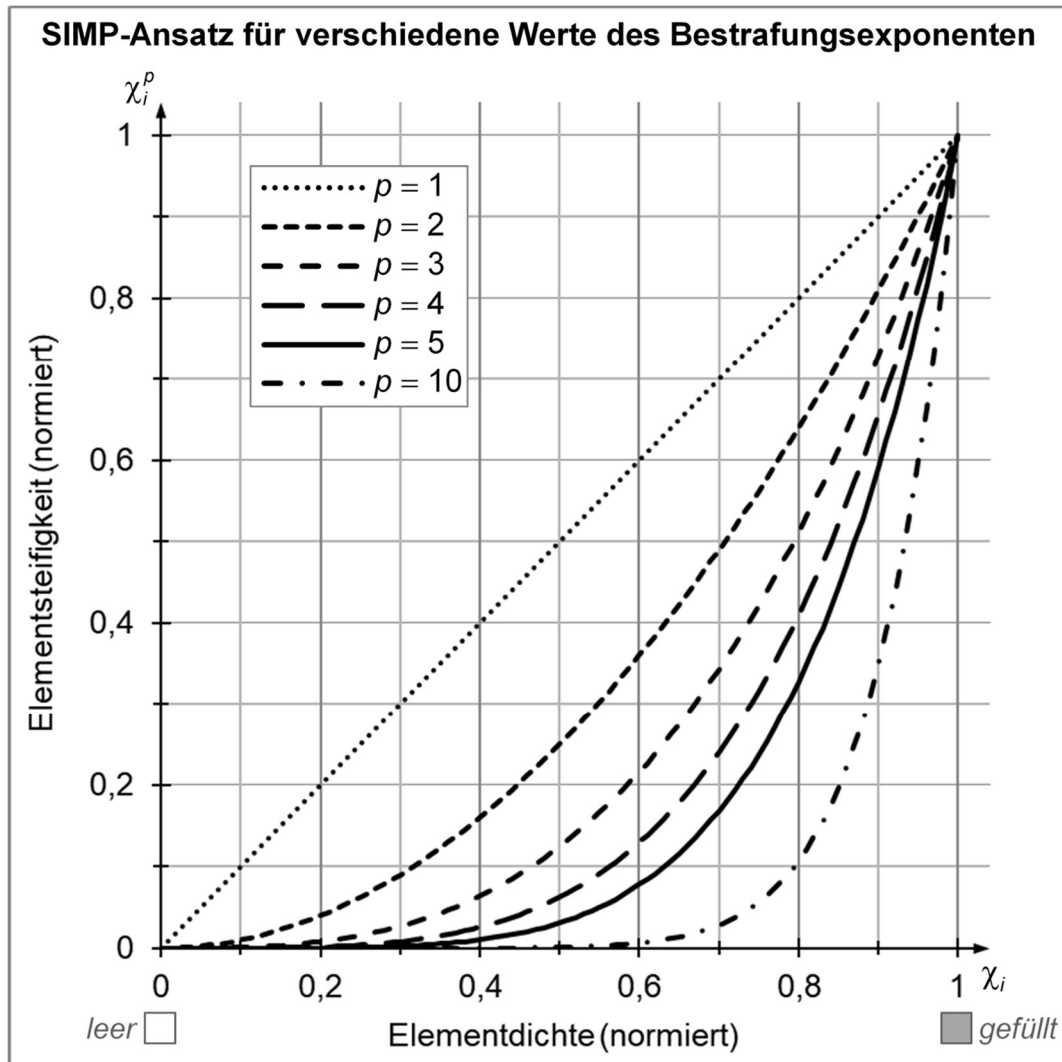


Bild 2.12: Einfluss des Bestrafungsexponenten auf die Elementsteifigkeit in Abhängigkeit der Elementdichte bzw. des Materialfüllgrades

Ein Materialfüllgrad von  $\chi_i = 0$  wird in Optimierungsprogrammen in der Regel durch Definition einer Mindestfüllung ausgeschlossen, um numerische Probleme und Schwierigkeiten mit Spannungssingularitäten zu verhindern. Wird der Materialfüllgrad eines Elements gegen Null erniedrigt, steigen die Spannungen dieses Elements immer weiter an, behalten aber einen endlichen Wert bei. Wird das Element schließlich entfernt, verschwinden auch die Elementspannungen (näheres in [Kob11] S.48ff). Mit der Definition einer Spannungs- bzw. Festigkeitsrestriktion bleibt dieses nicht benötigte Element erhalten, was in der Gesamtheit aller derartiger Elemente und Bereiche dazu führt, dass das globale Optimum nicht erreicht werden kann.

Mit dem SIMP-Ansatz kann, wie die Benennung schon zeigt („... Isotropic ...“), die Anisotropie von FVK nicht vollständig ausgenutzt werden, da jede einzelne Komponente der Elementsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{k}_{i0}$  identisch von der Entwurfsvariable  $\chi_i$  beeinflusst wird. Im ungünstigsten Fall führt eine Beanspruchung quer zur Faser zu einem hohen Materialfüllgrad,

um die Elementsteifigkeit zu erhöhen, obwohl eine Drehung der Faser den größeren Mehrwert hätte.

### 2.3.2 Parameteroptimierung von FVK

Die Parameteroptimierung ist eine einfache Art der Optimierung, bei der nur einzelne Parameterwerte der Struktur variiert werden. Erleichternd kommt hinzu, dass diese Entwurfsvariablen bei einem parametrisierten Strukturmodell direkt zur Verfügung stehen und damit leicht modifiziert werden können. Jedoch wird mit dieser Dimensionierung in der Regel keine größere Umgestaltung der Struktur, wie Topologie- oder Formänderungen, bewirkt. Zudem ist auf die Kompatibilität der Variationsgrenzen einzelner Parameter zu achten. Die definierten Restriktionen müssen eine Durchdringung der Strukturkomponenten verhindern. Typische Entwurfsvariablen der Parameteroptimierung sind Geometriewerte, wie Wandstärken, Durchmesser und Querschnittsflächen. Insbesondere bei FVK bieten sich Schichtdicken und -winkel sowie die Positionen der Einzelschichten (ES) im Laminat als Entwurfsvariablen an, wobei die Lage einer ES durch Tauschen der Schichtwinkel variiert werden kann.

Bei der **Parameteroptimierung von FVK** nehmen Schichtdicken nur diskrete Werte an, wenn die Herstellung mittels Faserhalbzeugen mit einer fertigungsbedingten Mindestdicke beachtet wird. Ebenso kann eine ES nur diskrete Positionen im Laminat annehmen. Anders verhält es sich bei dem Schichtwinkel, der zwar kontinuierlich veränderlich ist, aber aufgrund von Herstellungstoleranzen oder einer einfacheren Fertigung meist als diskrete Entwurfsvariable verwendet wird. Ferner entsteht mit Drehung der Schichtorientierungen in ein Laminatkoordinatensystem ein nichtkonvexes Optimierungsproblem. Ziel- und Restriktionsfunktionen auf Basis der transformierten Schichtgrößen sind abhängig von den trigonometrischen Funktionen der Schichtwinkel (vgl. Transformationsmatrix in Gleichung (2.8)). Demnach besteht die Gefahr, dass diese Optimierung ein lokales Optimum liefert, zumal bei reiner Schichtdickenoptimierung und vorhandener Festigkeitsrestriktion aus Singularitätsgründen, ähnlich wie bei der Topologieoptimierung, die Dicken nichttragender Schichten nur bis zur Festigkeitsgrenze gesenkt werden können. Ein Entfernen der Schichten ist nicht möglich. Mit der gezielten Einstellung der gerichteten Schichtsteifigkeiten durch die Veränderung des Schichtwinkels könnten diese Schichten wieder von Nutzen sein und die Erreichung eines globalen Optimums wieder ermöglichen (näheres in [Kob11] S.157ff).

Eine weitere Schwierigkeit bei der Dimensionierung von FVK ergibt sich für eine Zielformulierung hinsichtlich einer bestmöglichen **Werkstoffausnutzung**. Hierfür muss die Maximierung der Materialanstrengung ( $f \rightarrow 1$ ) als elementabhängige Größe herangezogen werden, womit sich für  $n$  Elemente  $n$  Zielgrößen ergeben, die aber von deutlich weniger Schichtparametern beeinflusst werden. Mit der Definition der Schichtdicke oder des

Schichtwinkels als Entwurfsvariable werden mit einem Parameter mehrere Zielgrößen gleichzeitig gesteuert, da eine Schicht in der Regel aus mehreren Elementen besteht. Damit ist eine gleichmäßige Verteilung der Anstrengung nicht möglich. Zudem kann die Anstrengung bei Erreichen der Mindestschichtdicke nicht weiter gesteigert werden, ohne den Schichtwinkel zu verändern. Eine lastgerechte Faserorientierung führt jedoch in der Regel zur Verringerung der Anstrengung und ein davon abweichender Faserwinkel ist nicht im Sinne einer besseren Werkstoffausnutzung. Abhilfe kann hierbei die zusätzliche Einbeziehung der Steifigkeit in den Optimierungsprozess schaffen, denn eine möglichst steife FVK-Struktur weist eine lastgerechte, beispielsweise entsprechend der Hauptspannungstrajektorien (vgl. Kapitel 2.1.5) ausgerichtete, Faserorientierung auf, die generell eine gute Werkstoffausnutzung aufweist. Eine Minimierung der Anstrengung, wie sie oft in der Literatur angestrebt wird (vgl. Kapitel 1.2) weist obige Problematik nicht auf, da für das Optimum die Schichtdicke maximal werden muss und der Schichtwinkel die Orientierung für die beste Werkstoffausnutzung aufzeigt.

Eine gleichzeitige Behandlung verschiedener und bei FVK meist diskreter Entwurfsvariablen, wie die Schichtdicken und -winkel, erhöht die Komplexität der Optimierungsaufgabe. Der Optimierungsprozess wird deshalb häufig untergliedert. Eine etablierte Vorgehensweise ist hierbei als **dreiphasige Laminatoptimierung** in HyperWorks implementiert (vgl. [Alt18b] S.135ff). Basis hierfür ist ein FE-Modell des Bauraums samt Laminataufbau. Mit der **Phase 1** wird zunächst mit dem definierten Startentwurf ein Konzept für das spätere Laminat bestimmt. Über eine reine Schichtdickenoptimierung werden aus den gegebenen Schichten des Startentwurfs diejenigen ermittelt, deren Faserorientierung benötigt wird. Die Schichtdicken werden dabei je Element als kontinuierliche Entwurfsvariablen verwendet. Mit dieser elementweisen Dickenoptimierung („Free Size“) erhält man eine Dickenverteilung der gegebenen Schichtorientierungen innerhalb des Bauraums. Zur weiteren Verwendung werden die Schichtdicken je Element durch einen internen Algorithmus in Bereiche mit vergleichbaren Dickenniveaus zusammengefasst, die dann als neue Einzelschichten modelliert und als importierbares Modell für **Phase 2** zur Verfügung gestellt werden. Die neuen Schichtdicken werden nun als diskrete Entwurfsvariablen variiert, um für die definierten, vorwiegend fertigungstechnischen Restriktionen einen optimalen Entwurf zu finden. Das Ergebnis dieser diskreten Schichtdickenoptimierung („Size“) wird wiederum als importierbares Modell ausgegeben. Mit der **Phase 3** findet abschließend die Optimierung der Lagenanordnung („Shuffle“) statt. Der Einfluss des Laminataufbaus auf das Strukturverhalten wird damit erst im letzten Optimierungsschritt beachtet. Um diese Beeinflussung in den vorherigen Phasen zu verhindern, wird empfohlen, die Biege-Dehn-Kopplung programmintern zu ignorieren (vgl. CLT in Kapitel 2.1.2). Daneben setzt dieser dreiphasige Optimierungsprozess auf unveränderliche Schichtwinkel. Die im Startentwurf definierten Schichtorientierungen bleiben im gesamten Ablauf konstant. Damit kann, wie oben erläutert, eine reine Elementdicken-

und Schichtdickenoptimierung mit anschließender Optimierung der Lagenanordnung kein globales Optimum liefern, sondern lediglich einen verbesserten Laminatvorschlag mit bereichsbegrenzten Schichten für ein gewähltes Startlaminat eines Bauraums.

### 2.3.3 Optimierungsalgorithmus

Die gezielte Anpassung der Entwurfsvariablen wird während einer Optimierung durch einen Algorithmus herbeigeführt, womit dieser Optimierungsalgorithmus entscheidend die Effizienz einer Optimierungsrechnung bestimmt. Daneben ist die Eignung eines Algorithmus für eine Optimierungsaufgabe ausschlaggebend für deren Einsatz. So sind die meisten Optimierungsalgorithmen entweder für Optimierungsprobleme mit vielen Entwurfsvariablen und wenigen Restriktionen oder für Probleme mit einer hohen Anzahl an Restriktionen ausgelegt. Ersteres trifft in der Regel auf eine Topologieoptimierung zu, während der zweite Fall typisch für Elementdickenoptimierungen mit Herstellungs- und Festigkeitsgrenzen ist. Weitere Einschränkungen für die Benutzung eines Optimierungsalgorithmus entstehen durch fehlende Unterstützung der eingesetzten Software bzw. des Solvers. Für den in dieser Arbeit verwendeten Solver OptiStruct (Teil der Software HyperWorks von Altair) stehen folgende Algorithmen zur Verfügung:

- **MFD – Method of Feasible Directions**  
(Methode der zulässigen Richtungen, näheres in [Har08] S.55ff)
- **SQP – Sequential Quadratic Programming**  
(Sequentielle Quadratische Programmierung, näheres in [Har08] S.84f)
- **CONLIN – Convex Linearization**  
(Konvexe Linearisierung, näheres in [Har08] S.88f)
- **MMA – Method of Moving Asymptotes**  
(Methode der beweglichen Asymptoten, näheres in [Har08] S.89ff)
- **BIGOPT – Large Scale Optimization Algorithm**  
(Verfahren mit mehreren Algorithmen, näheres in [Alt21] unter „User Guide / Design Optimization / Gradientbased Optimization Method“)

MFD stellt eine direkte Methode (näheres in [Har08] S.46ff) zur Lösung von restringierten Optimierungsproblemen dar, während es sich bei SQP, CONLIN und MMA um geläufige Approximationsverfahren (näheres in [Har08] S.81ff) in der Strukturoptimierung handelt, die als Basis für die duale Lösungsmethode bzw. bei SQP für die primale Methode (näheres in [Har08] S.67ff) dienen. Mit dem CONLIN-Algorithmus sind zwei duale Lösungsalgorithmen in OptiStruct umgesetzt. Neben dem Standardverfahren aus der Literatur, das in OptiStruct kurz als **DUAL** bezeichnet wird, ist ein Verfahren mit verbesserter Lösungsstabilität vorhanden (**DUAL2**, näheres in [Alt21] unter „User Guide / Design Optimization / Gradient-based

Optimization Method“). Im Gegensatz zu anderen Optimierungsverfahren wird BIGOPT den indirekten Methoden zugeordnet, bei denen die Restriktionen als externe Straffunktion in die Zielfunktion integriert werden, wodurch das ursprüngliche restringierte Problem als restriktionsfrei behandelt werden kann (näheres in [Har08] S.38ff). Mit der Methode der konjugierten Gradienten (nach POLAK und RIBIÈRE, vgl. [Pol69]) wird die Suchrichtung bestimmt, für die dann mit Hilfe der parabolischen Interpolation nach BRENT<sup>14</sup> (näheres in [Bre73] S.19ff) durch eine eindimensionale Optimierung (näheres in [Har08] S.13ff) die Schrittweite ermittelt wird. Die Vorteile von BIGOPT im Vergleich zu MFD und SQP sind der geringere Speicherbedarf und die höhere Effizienz.

Wie bereits erläutert hat jeder Algorithmus seine Stärken und Schwächen, weshalb auch in OptiStruct in den Standardeinstellungen je nach Optimierungsaufgabe verschiedene Optimierungsalgorithmen bzw. -verfahren vorausgewählt sind. So wird für die **Topologieoptimierung** und die **elementweise Schichtdickenoptimierung („Free Size“)** standardmäßig **DUAL2** verwendet und bei Konvergenzproblemen DUAL oder MMA empfohlen. Bei einem Optimierungsproblem mit vielen Restriktionen, wie es meist bei **Parameteroptimierungen („Size“)** von **Schichtgrößen**, Wandstärken oder anderen Größen vorkommt, ist **MFD** die Standardeinstellung. Alternativen sind hierzu SQP und BIGOPT, wobei SQP standardmäßig verwendet wird, sobald eine Gleichheitsrestriktion vorliegt. Die beschriebenen Algorithmen behandeln nur kontinuierliche Entwurfsvariablen, werden in OptiStruct aber auch bei diskreten Optimierungsproblemen eingesetzt, obwohl diese nicht dafür ausgelegt sind. Deshalb ist es empfehlenswert den ermittelten diskreten Entwurf mit der kontinuierlichen Lösung zu vergleichen. Dadurch kann die Diskrepanz der diskreten Lösung quantifiziert und die hierbei tendenziell höhere Gefahr eines lokalen Optimums abgeschätzt werden. Verschiedene Startentwürfe können dabei auch hilfreich sein. Die Standardeinstellung für **Optimierungen mit diskreten Entwurfsvariablen** ist in OptiStruct **MFD**, womit dieser auch zur **Optimierung der Lagenanordnung („Shuffle“)** verwendet wird.

Unabhängig von der Auswahl eines Optimierungsalgorithmus wird stets das Erreichen einer Konvergenz im Optimierungslauf als Indiz für ein Optimum angesehen. In OptiStruct wird dabei zwischen der regulären Konvergenz und der „weichen“ Konvergenz (soft convergence) unterschieden. Die reguläre Konvergenz tritt ein, wenn in zwei aufeinanderfolgenden Iterationen die Verbesserung der Zielfunktionswerte unterhalb einer definierten Konvergenzgrenze liegt, obwohl die Entwurfsvariablen signifikant verändert wurden. Werden die Entwurfsvariablen in zwei aufeinanderfolgenden Iterationen nicht oder kaum verändert, kommt es zur weichen Konvergenz. Im Suchfeld des Algorithmus sind keine anderen Entwurfsvariablen vorhanden, die eine Verbesserung der Zielfunktion herbeiführen. Dies tritt insbesondere bei diskreten Problemstellungen auf.

---

<sup>14</sup> Brent, Richard Peirce (1946); australischer Mathematiker und Informatiker



# Kapitel 3

## Modellierung einer Bolzenverbindung

### 3.1 Auslegung der Bolzenverbindung

Die Bolzenverbindung als Kräfteinleitungselement in FVK bietet durch konstruktive Maßnahmen die Möglichkeit, das Bruchverhalten bei Überlastung gezielt zu steuern. Kritische Versagensarten, die zum Funktionsverlust der Verbindung führen, können durch einen günstigen Laminataufbau sowie passende Geometrie vermieden und ein Lochleibungsversagen angestrebt werden. Diese Versagensart führt nicht zwangsläufig zu einem Totalversagen der Verbindung und ist durch die fortschreitende Lochaufweitung gut beobachtbar. Ein Versagen wird nach DIN 65562 [Deu91] meistens bei einer Lochaufweitung von 2 % angenommen. Wichtige Merkmale für die Auslegung einer Bolzenverbindung sind, wie in Kapitel 2.1.4 aufgeführt, die Verbindungsart, die Werkstoffe, die äußeren Lasten, die Geometrie und der Laminataufbau. Diese Merkmale gilt es nun für das Modell der Bolzenverbindung festzulegen.

#### Schnittigkeit und Stoßart

Zur Vermeidung einer Exzentrizität und dem damit einhergehenden unerwünschten Versatzmoment wird eine zweiseitige Verbindung mit gleich dicken Verbindungselementen verwendet. Eine Ausfertigung als Zangenstoß wird wegen der weiten Anwendung (z.B. Gelenkbolzenverbindungen) gewählt. Eine schematische Abbildung einer derartigen Verbindung ist links in Bild 3.1 dargestellt.

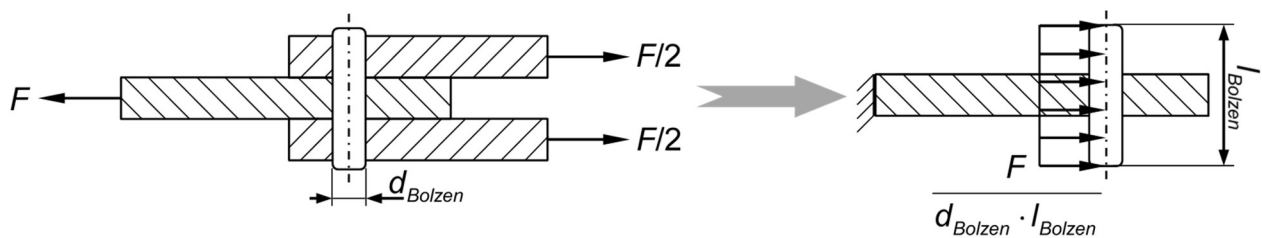


Bild 3.1: Schematische Darstellung einer als Zangenstoß gefügten zweiseitigen Bolzenverbindung (links) und das dazugehörige idealisierte Modell (rechts)

#### Passung

Für Bolzenverbindungen in FVK wird in der Regel eine Spielpassung verwendet, da eine Übermaßpassung aufgrund der Kriechneigung der Matrix kaum dauerhaft zu realisieren ist. Außerdem wird dadurch der FVK vorgeschädigt und so die gesamte Bolzenverbindung geschwächt. Für den Bolzen wird laut Norm ISO 2340 (Bolzen ohne Kopf, Form A) [Deu92]

die Toleranzklasse h11 angenommen. Für die Bohrung wird unter Einhaltung eines Kleinstspiels die Toleranzklasse D11 gewählt. Dadurch ergibt sich eine übliche Passung D11/h11 gemäß ISO 286-1 [Deu10].

### **Werkstoff und Herstellung**

Die Herstellung des FVK erfolgt mit Schichten aus einzelnen unidirektionalen Fasergelegen. Dabei werden Kohlenstofffaser-Prepregs mit einer Schichtdicke von 0,1 mm verwendet, die dann ein Laminat mit 60 % Faservolumengehalt bilden. Die Bohrung wird erst beim ausgehärteten Laminat eingebracht. Stütz- und Verstärkungselemente sind nicht vorgesehen, ebenso wie die Umleitung der Fasern um die Bohrung. Derartige Maßnahmen werden vielmehr als Ergebnis der Optimierungsrechnungen in Kapitel 5 erwartet. Ferner wird nur eine einfach gefügte Verbindung mit einem Stahlbolzen (S235) betrachtet, da eine Mehrfachfügung in den kritischen Bohrungsbereichen prinzipiell die gleichen mechanischen Zusammenhänge aufweist. Die Werkstoffkennwerte für den Bolzen und die faserverstärkten Verbindungselemente der Bolzenverbindung sind in Tabelle 3.1 aufgeführt.

	<b>Stahl S235</b>	<b>CFK<sup>15</sup></b>
<b>Elastizitäten</b> in $\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$	$E = 210\,000$ $G = 81\,000$	$E_{11} = 165\,000$ ; $E_{22} = E_{33} = 8\,400$ $G_{12} = G_{13} = 5\,600$ ; $G_{23} = \frac{E_{22}}{2(1+\nu_{23})} = 2\,800$
<b>Querkontraktionszahlen</b>	$\nu = \frac{E}{2G} - 1 = 0,296$	$\nu_{12} = \nu_{13} = 0,34$ , $\nu_{23} = 0,5$
<b>Festigkeiten</b> in $\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$	$R_{eH} = 235$ $R_m = 360$	$R_{11Z} = 2\,560$ ; $R_{11D} = 1\,590$ $R_{22Z} = 73$ ; $R_{22D} = R_{33D} = 185$ ; $R_{33Z} = 63$ $R_{12} = R_{13} = 90$ ; $R_{23} = 57$

Tabelle 3.1: Werkstoffkennwerte für Bolzen (S235) und Verbindungselement (CFK)

### **Äußere Lasten**

Eine Bolzenverbindung wird in aller Regel in einer Vorzugsrichtung auf Zug belastet, wobei der Lastangriff meist über eine Stirnfläche, wie links in Bild 3.1 schematisch dargestellt, stattfindet. Diese Krafteinleitung der äußeren Lasten in die Struktur sowie die Kraftübertragung auf den Bolzen sollen idealisiert betrachtet werden. Wesentlich für die Modellierung soll die Kraftübertragung vom Bolzen auf das mittlere Verbindungselement sein. Das derart vereinfachte Modell ist rechts in Bild 3.1 dargestellt. Die Gesamtbelastung wird hierbei als

<sup>15</sup> IM7 Kohlenstofffaser und 8551-7 Epoxidmatrix, Werkstoffkennwerte laut [Kad12] S.2297f



Flächenlast auf die Querschnittsfläche entlang der Bolzenachse idealisiert. Mit der Betrachtung der belasteten Bolzenverbindung kann eine axiale Sicherung des Bolzens aufgrund des aufgebauten Reibschlusses vernachlässigt werden.

### **Geometrie und Laminataufbau**

Die Geometrie der Bolzenverbindung wird mit ausreichender Sicherheit hinsichtlich der in Kapitel 2.1.4 beschriebenen Versagensarten ausgelegt, womit ein Totalversagen der Verbindung ausgeschlossen wird. Diese Sicherheit soll auch für verschiedene Laminat- und Lastrichtungen gegeben sein. Eine entsprechende Abschätzung der Bruchkräfte der einzelnen Versagensarten ist im Anhang B aufgeführt. Diese und weitere Berechnungen sowie numerische und experimentelle Voruntersuchungen zeigen, dass die obigen Vorgaben sowie die Neigung zum Lochleibungsversagen mit folgenden Abmessungen erfüllt werden:

- Bolzennormdurchmesser nach ISO 2340 [Deu92]  $d_{\text{Bolzen}} = d = 8 \text{ mm}$  mit der kleinsten handelsüblichen Bolzenlänge (abzüglich der Phasen)  $l_{\text{Bolzen}} = 12 \text{ mm}$ .
- Verbindungselement bzw. Laminat mit Länge  $2e = 200 \text{ mm}$ , Breite  $B = 100 \text{ mm}$ , Dicke  $t = 4 \text{ mm}$  und mit Randabstand  $e$  bzw.  $B/2$  der Bohrung.

Dabei ist die Bohrung mittig im Laminat platziert und die lange Seite des Laminats ist in Richtung der Last gerichtet. Berücksichtigt sind hierbei außerdem eine gleichmäßige Verteilung der Gesamtdicke, entspricht der Bolzenlänge, auf die drei Verbindungselemente sowie allgemeine Gestaltungshinweise, insbesondere der Mindestrandabstand  $e$  der Bohrung (näheres in [Sch07] unter anderem S.542).

Mit der Vermeidung eines globalen Versagens der Bolzenverbindung durch die geometrischen Anpassungen genügt es einzig die Beanspruchung durch die Lochleibung zu betrachten und lokale Schädigungen mittels der in Kapitel 2.1.3 aufgeführten Versagenskriterien zu beurteilen. Um hierbei auch größere Lasten zu übertragen, wird ein Laminat mit einer hohen Lochleibungsfestigkeit verwendet. Nach SCHÜRMANN bietet sich hierfür ein Flugzeugbaulaminat  $[0^\circ/\pm 45^\circ/90^\circ]_s$  mit den Faserwinkelanteilen (50/40/10) % an (näheres in [Sch07] S.535). Bis zum Erstsichtversagen nach dem PUCK-Kriterium kann dieses Laminat mit der obigen Geometrie eine Kraft von etwas mehr als 750 N aufnehmen. Ein Bolzenversagen tritt dabei gemäß den überschlägigen Berechnungen im Anhang B erst bei ca. 5,4 kN und ein Lochleibungsversagen bei 29,7 kN auf.

## **3.2 Aufbau des FE-Modells der Bolzenverbindung**

Die im vorigen Kapitel dimensionierte Bolzenverbindung ist für weitere Simulationen in einem FE-Modell abzubilden. Hierzu wird die Programmumgebung HyperWorks der Firma Altair verwendet, wobei für die Modellierung HyperMesh, als Solver OptiStruct und für die

Ergebnisbewertung HyperView zum Einsatz kommen. Das FE-Modell der Bolzenverbindung wird als Volumenmodell aufgebaut, um mit Hilfe einer Kontaktanalyse eine möglichst reale Krafteinleitung in das faserverstärkte Verbindungselement zu simulieren. Dabei ist die Netzqualität für dieses Laminat, den Bolzen und die Verbindung aus beiden zu prüfen.

### 3.2.1 FE-Modell des Laminats

Gemäß der festgelegten Bolzenverbindung in Kapitel 3.1 wird das Verbindungselement des idealisierten Modells (vgl. Bild 3.1 rechts) als Laminat aufgebaut. Das verwendete symmetrische Laminat erlaubt die Nutzung einer Symmetriebedingung und somit genügt es, im FE-Modell die obere Hälfte des Laminats abzubilden. Dabei wird zunächst ein zweidimensionales Netz der Laminatmittelfläche mittels Viereckselementen erzeugt und anschließend in Laminatdickenrichtung erweitert. Infolge der Faserwinkelanteile des verwendeten Laminats wird die größtmögliche Elementdicke von 0,2 mm gewählt, um die 90°-Schicht mit einer Elementlage abzubilden. Bei einer gleichmäßigen Verteilung folgen daraus 10 gleiche Elementschichten, die das halbe Laminat repräsentieren. Der Laminataufbau ist rechts in Bild 3.2 ersichtlich.

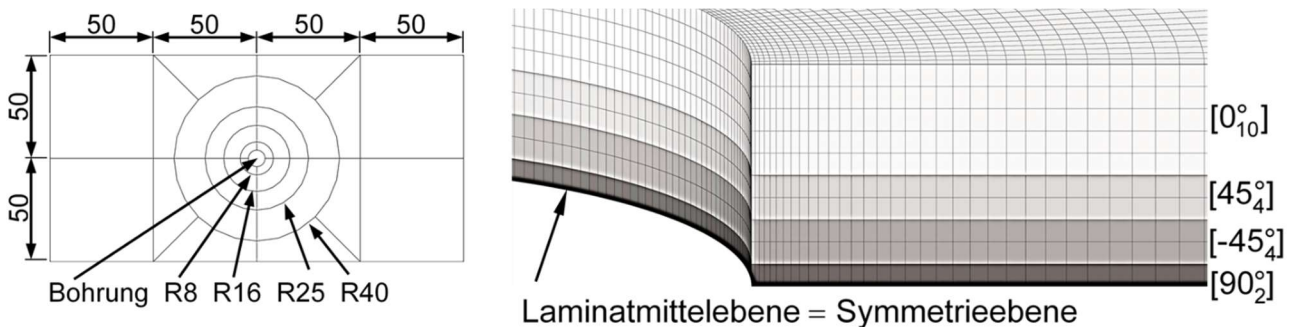


Bild 3.2: Segmentierung der Laminatmittelfläche zur angepassten Diskretisierung (links) sowie FE-Netz mit Schichtverteilung des Segments am Lochrand (rechts)

Für die Laminatmittelfläche wird ebenso ein einheitliches Netz angestrebt. Dazu wird die Mittelfläche, wie links in Bild 3.2 dargestellt, in unterschiedliche Bereiche eingeteilt, deren Ränder mit unterschiedlichen Elementanzahlen diskretisiert werden: die vier äußeren Quadrate mit 32 mal 32 Elementen, jeder Kreisumfang mit 256 Elementen und die restlichen Kanten in den übrigen Segmenten zur Bohrung hin gesehen mit 16, 20, 24, 28 und 32 Elementen. Ergänzt wird lediglich die Diskretisierung der innersten Kreisfläche durch eine Verringerung des Elementkantenverhältnisses<sup>16</sup> zum Lochrand hin, was zur Netzverfeinerung des kritischen Bereichs führt. Damit wird der Lochrand mit einer Elementgröße von ca.

<sup>16</sup> „Biasing“ mit linearem Kantenverhältnis von 10 (näheres in [Alt18] S.252ff)

(0,03 x 0,1 x 0,2) mm vernetzt, wodurch insbesondere die hohen Spannungsgradienten hinreichend erfasst werden sollen.

Die Prüfung der Netzqualität findet anhand der analytischen Lösung einer einachsigt zugbelasteten Scheibe mit Kreisloch statt, wobei die Umfangsspannung direkt am Lochrand sowie entlang des Querschnitts herangezogen wird. Zur einfacheren Handhabung der analytischen Lösung wird für die Lochscheibe ein unidirektionales Laminat mit einem Faserwinkel in Lastrichtung verwendet. Das Vergleichsbeispiel zur Beurteilung der Netzqualität ist in Bild 3.3 dargestellt.

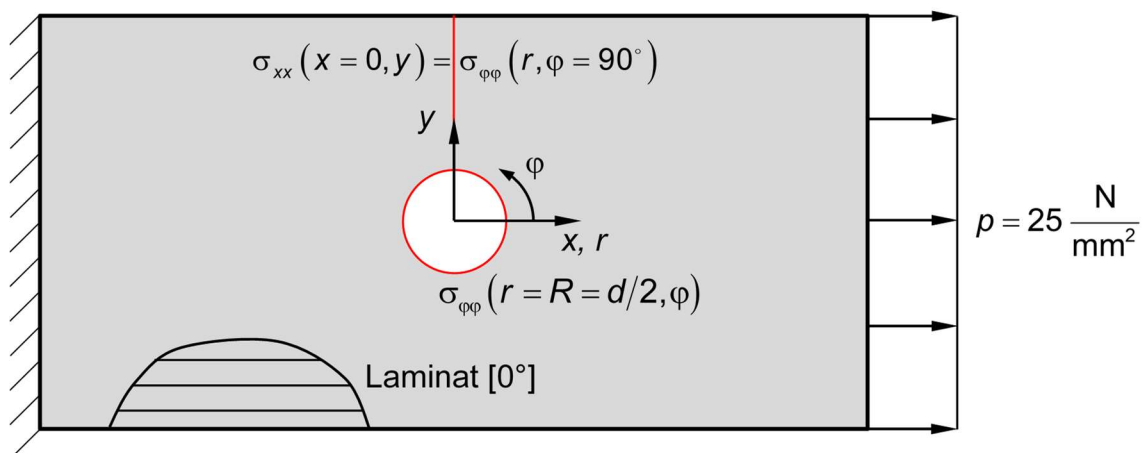


Bild 3.3: Zugbelastete Scheibe mit Kreisloch und die charakteristischen Spannungen

Die benötigten charakteristischen Spannungsverläufe können aus den Herleitungen von LEKHNITSKII in [Lek63] abgeleitet werden. Unter der Annahme eines ebenen Falls<sup>17</sup> können die drei relevanten Spannungen im kartesischen Koordinatensystem mit

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = 2\text{Re} \left\{ \begin{bmatrix} \mu_1^2 & \mu_2^2 \\ 1 & 1 \\ -\mu_1 & -\mu_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi_1'(z_k) \\ \phi_2'(z_k) \end{bmatrix} \right\} + \begin{bmatrix} p \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.1)^{18}$$

bestimmt werden, wobei der zusätzliche Term mit der Last  $p$  sich durch die Randbedingungen des Lastfalls bei der Ermittlung der komplexen Funktionen ergeben wird (vgl. [Sav56] S.172ff). Die beiden zu bestimmenden komplexen Funktionen können mit der komplexen Koordinate<sup>19</sup>  $z_k = x + \mu_k y = R(\cos \varphi + \mu_k \sin \varphi)$  durch

<sup>17</sup> EVZ nach [Lek63] S.134f

<sup>18</sup> [Lek63] S.137, Gl. (22.11)

<sup>19</sup> Kartesisches oder Zylinderkoordinatensystem, [Lek63] S.136

$$\phi'_k = P_k \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \cdot \frac{R(1 - i\mu_k)}{z_k + \sqrt{z_k^2 - R^2(1 + \mu_k^2)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{z_k^2 - R^2(1 - \mu_k^2)}} ; k = 1, 2 \quad (3.2)^{20}$$

berechnet werden, wobei für die lastabhängigen Faktoren  $P_1 = a_1\mu_2 - b_1$  und  $P_2 = b_1 - a_1\mu_1$  im vorliegenden Lastfall

$$a_1 = 0 \quad \text{und} \quad b_1 = -i \frac{\rho}{2} R \quad (3.3)^{21}$$

gilt. Ferner sind  $\mu_1$  und  $\mu_2$  die Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$\frac{\mu^4}{E_{11}} + \left( \frac{1}{G_{12}} - \frac{2\nu_{12}}{E_{11}} \right) \mu^2 + \frac{1}{E_{22}} = 0 . \quad (3.4)^{22}$$

Um nun die Umfangsspannung zu erhalten, sind die kartesischen Spannungen aus Gleichung (3.1) in ein Zylinderkoordinatensystem wie folgt zu transformieren

$$\begin{bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\varphi\varphi} \\ \tau_{r\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \varphi & \sin^2 \varphi & 2\sin \varphi \cdot \cos \varphi \\ \sin^2 \varphi & \cos^2 \varphi & -2\sin \varphi \cdot \cos \varphi \\ -\sin \varphi \cdot \cos \varphi & \sin \varphi \cdot \cos \varphi & \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} . \quad (3.5)^{23}$$

Die Verläufe für die Umfangsspannung am Lochrand (näheres in [Lek63] S.164, S.170) und die Umfangsspannung entlang des Querschnitts sind grafisch in Bild 3.4 dargestellt, wobei für die Letztere zusätzlich eine Näherungslösung aufgeführt ist. Diese Approximation

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(x=0, y) &= \sigma_{\varphi\varphi}(r, \varphi = 90^\circ) \\ &= \frac{\rho}{2} \left[ 2 + \left( \frac{d}{2r} \right)^2 + 3 \left( \frac{d}{2r} \right)^4 + \left( 2 - \sqrt{\frac{E_{11}}{G_{12}} - 2\nu_{12}} + 2\sqrt{\frac{E_{11}}{E_{22}}} \right) \left( 5 \left( \frac{d}{2r} \right)^6 - 7 \left( \frac{d}{2r} \right)^8 \right) \right] \quad (3.6) \end{aligned}$$

<sup>20</sup> [Lek63] S.157, Gl. (25.11)

<sup>21</sup> [Lek63] S.160, Gl. (25.18)

<sup>22</sup> [Lek63] S.163

<sup>23</sup> Drehung erfolgt gegen Uhrzeigersinn [Lek63] S.4, Gl. (1.4)

ist eine Erweiterung der analytischen Lösung für einen isotropen Werkstoff (Problem von KIRSCH<sup>24</sup>, [Kir98] S.799) und erreicht eine sehr gute Übereinstimmung zur Lösung nach LEKHNITSKII (näheres in [Kon75] S.166 und [Die07] S.83).

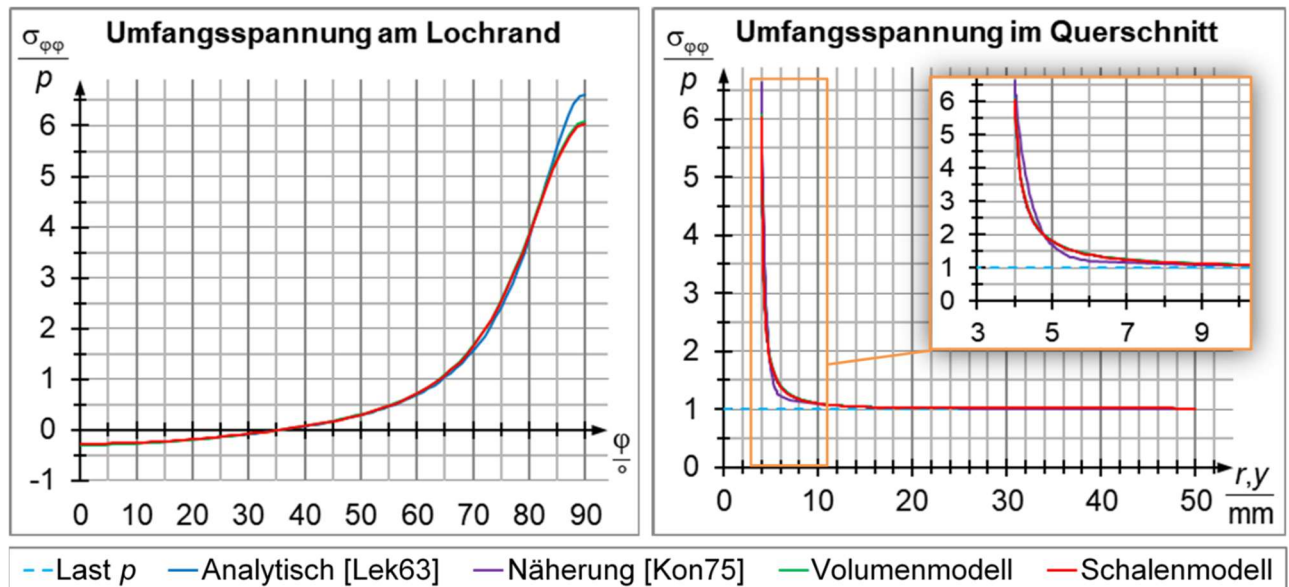


Bild 3.4: Umfangsspannungen einer einachsig zugbelasteten Scheibe mit Kreisloch

Im Vergleich zum isotropen Werkstoff, bei dem am Lochrand die dreifache Spannung in Bezug zur Last wirkt, zeigt Bild 3.4 eine deutlich stärkere Spannungsüberhöhung, die zudem, wie die Gleichungen (3.4) und (3.6) darlegen, vom Orthotropiegrad abhängig ist (vgl. Kapitel 2.2). Im Verlauf entlang des Querschnitts weist die Näherungslösung, bis ca. 1 mm vom Lochrand entfernt ( $r = 5$  mm), im Unterschied zur analytischen Lösung einen flacheren Abfall der Umfangsspannung auf. Bis etwa  $r = 10$  mm sind noch leichte Unterschiede zu erkennen, während im weiteren Verlauf beide Kurven nahezu identisch sind. Ebenso zeigen beide FE-Modelle, Schalen- und Volumenmodell, eine gute Übereinstimmung zur analytischen Lösung. Lediglich am Lochrand bei  $\varphi = 90^\circ$  sind Abweichungen um die 10 % festzustellen, wie die Werte in Tabelle 3.2 zeigen, wobei die Abweichung zur analytischen Lösung in Klammern aufgeführt ist. Am Laminatrand weisen beide FE-Modelle keine Spannungsüberhöhung auf, womit ein Einfluss des Randes auf die Beanspruchung am Lochrand in diesem Vergleichsbeispiel (vgl. Bild 3.3) ausgeschlossen werden kann.

Untersuchungen zur Netzverfeinerung am Schalenmodell zeigen, dass die Verwendung von Elementen 2. Ordnung (vgl. Kapitel 2.1.5) oder die Vervielfachung der Elementanzahl nur eine Verbesserung von etwa 1 % bzw. 4 % in Bezug zur der analytischen Lösung bringt, wofür jedoch etwa die vierfache Rechenzeit benötigt wird. Abweichungen von unter 2% zur analytischen Lösung sind erst mit der 64-fachen Elementanzahl und mit ungefähr der

<sup>24</sup> Kirsch, Ernst Gustav (1841 – 1901); dt. Ingenieur

130-fachen Rechenzeit möglich. Im Vergleich dazu hat die verwendete Verringerung des Elementkantenverhältnisses bei gleichbleibender Rechenzeit einen Mehrwert von etwa 15 %. Unter diesen Gesichtspunkten stellen die erzielten Ergebnisse mit dem vorliegenden FE-Netz eine ausreichende Güte dar. Eine weitere Überprüfung des Volumenmodells, das im Wesentlichen den Bolzenkontakt abbilden soll, findet am Gesamtmodell der Bolzenverbindung in Kapitel 3.2.3 statt.

	Analytisch	Näherung	Volumenmodell	Schalenmodell
$\sigma_{\varphi\varphi}(r = 4\text{ mm}, \varphi = 0^\circ)/p$	-0,226	–	-0,252 (+11,50%)	-0,221 (-2,21%)
$\sigma_{\varphi\varphi}(r = 4\text{ mm}, \varphi = 90^\circ)/p$	7,136	7,136 (0%)	6,466 (-9,39%)	6,420 (-10,03%)
$\sigma_{\varphi\varphi}(r = 50\text{ mm}, \varphi = 90^\circ)/p$	1,003	1,003 (0%)	1,009 (+0,60%)	1,009 (+0,60%)

Tabelle 3.2: Charakteristische Umfangsspannungen (normiert) unterschiedlicher Modelle im Vergleich zur analytischen Lösung

### 3.2.2 FE-Modell des Bolzens

Das FE-Modell des Bolzens ist hinsichtlich einer späteren Kontaktmodellierung vorzugsweise passend zum FE-Modell des Laminats zu gestalten. Hierbei wird sowohl die Symmetrie des Laminatmodells wie auch die Netzfeinheit des Lochrands übernommen. Zusätzlich wird der Bolzen entlang der Bolzenachsebene senkrecht zur Last, entsprechend dem idealisierten Modell in Bild 3.1, halbiert, womit lediglich ein Viertelbolzen zu diskretisieren ist. Es wird ein zweidimensionales Netz mit Viereckelementen gemäß Bild 3.5 für den inneren und äußeren Bereich erzeugt und dieses in 0,2 mm Schritten in Richtung der Bolzenachse erweitert. Damit folgt ein gleichmäßiges Netz mit einer Elementgröße von ca. (0,1 x 0,1 x 0,2) mm. Eine Verringerung des Elementkantenverhältnisses zum Bolzenrand hin wird nicht verwendet, da die deutlich niedrigeren Spannungsgradienten beim isotropen Werkstoff mit der gewählten Elementgröße ausreichend erfasst werden.

Die Prüfung der Netzqualität erfolgt mit Hilfe der Balkentheorie, wobei ein schubstarrer EULER<sup>25</sup>-BERNOULLI<sup>26</sup>-Balken (EBB) sowie ein schubweicher TIMOSHENKO<sup>27</sup>-Balken (TB) als Referenz dienen. Als Vergleichsgröße wird die Biegelinie der Balken bzw. die Durchbiegung der Bolzenachse des in Bild 3.6 dargestellten Lastfalls verwendet. Dieser beschreibt die realitätsnahen Randbedingungen der zweiseitigen Bolzenverbindung aus

<sup>25</sup> Euler, Leonhard (1707 – 1783); schweiz. Mathematiker und Physiker

<sup>26</sup> Bernoulli, Jakob I. (1654 – 1705); schweiz. Mathematiker und Physiker

<sup>27</sup> Timoshenko, Stepan (1878 – 1972); russ. Ingenieur

Bild 3.1, wobei wie erläutert  $l_{\text{Bolzen}} = 3t$  gilt. Die Last wird hierbei jedoch in z-Richtung über die Länge  $t$  sowie in y-Richtung über die Bogenlänge  $R \cdot \gamma$  (mit  $\gamma$  im Bogenmaß) als gleichmäßig verteilt idealisiert. Dadurch können bekannte analytische Ergebnisse aus der Literatur zur Überprüfungen des FE-Modells herangezogen werden. Untersuchungen der genauen Lastverteilung finden ab der Kontaktdefinition in Kapitel 3.2.3 statt.

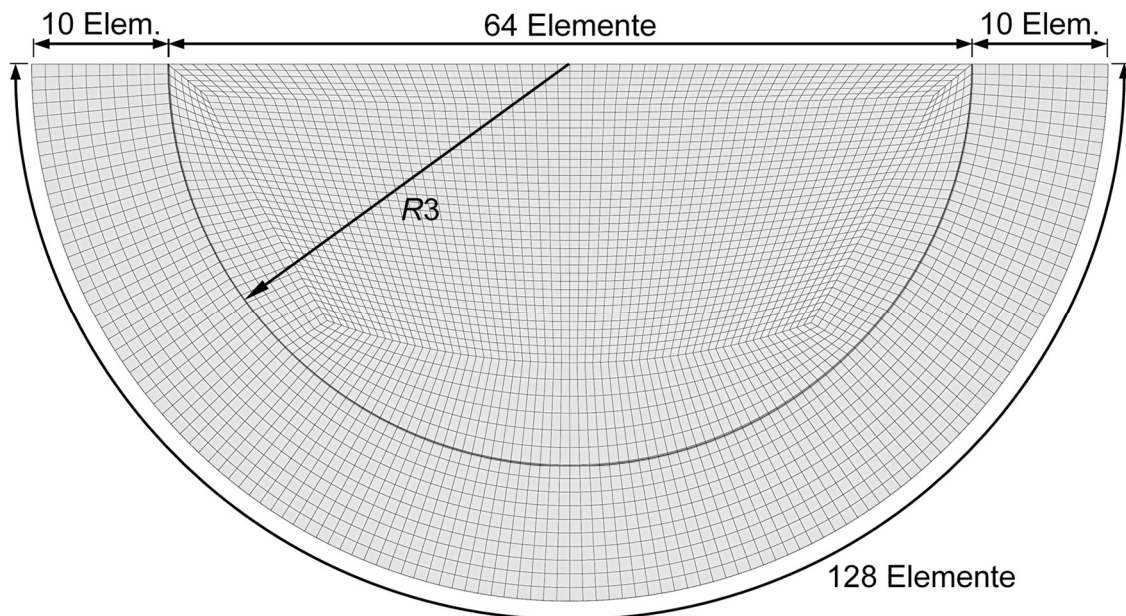


Bild 3.5: Draufsicht auf das FE-Netz des Bolzens mit Bereichen und Elementanzahlen für die Vernetzung

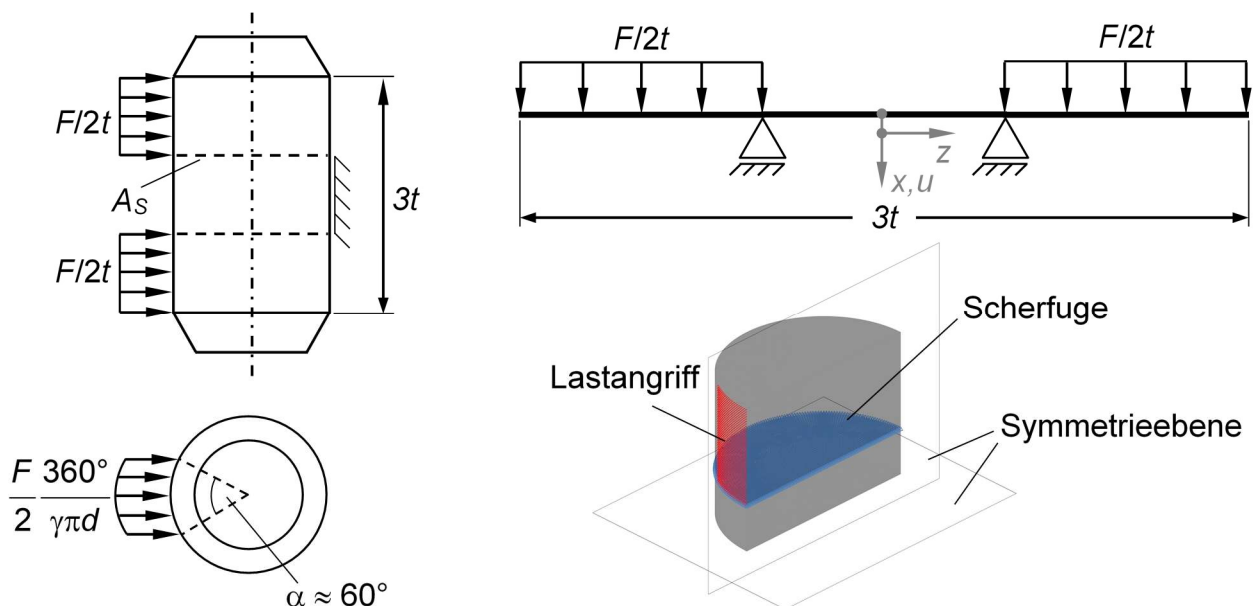


Bild 3.6: Referenzlastfall zur Verifikation des FE-Bolzenmodells mit den zugehörigen Randbedingungen (links), dem idealisiertes Balkenmodell (rechts oben) und dem verwendeten Volumenmodell (rechts unten)

Ansonsten wird für die Verifikation des FE-Bolzenmodells das mittlere Verbindungselement als starr angesehen, wodurch sich der obere und untere Teil des Bolzens um die Scherfuge  $A_S$  herum biegen und der mittlere Teil entgegen der Lastrichtung deformiert. Unter diesen Aspekt wird die Scherfuge im Balkenmodell und entsprechend im Volumenmodell (Viertelbolzen gemäß Bild 3.5) in Lastrichtung fixiert (vgl. Bild 3.6). Der angegebene Lastangriffsbereich entspricht in etwa der Kontaktfläche einer Bolzenverbindung mit Stahlbolzen (S235) und Stahlverbindungselement (S235) unter einer Last von  $F = 10$  kN.

Die Biegelinie des schubstarrten Balkens (EBB) kann durch Superposition zweier Lastfälle mit nur einer Streckenlast gemäß [Wit13] TB11-6 Nr.6 ermittelt werden. Mit entsprechender Koordinatensystemanpassung gilt für Lastfall 1 (Streckenlast nur auf der rechten Seite)

$$u_{EBB,1}(z) = \left(-z - \frac{t}{2}\right) \cdot \tan(\beta) = \left(-z - \frac{t}{2}\right) \cdot \left(\frac{Ft^2}{24EI_b}\right) \quad \text{für } -1,5t \leq z \leq -0,5t,$$

$$u_{EBB,1}(z) = -\frac{Ft^3}{24EI_b} \left[ \frac{z + \frac{t}{2}}{t} - \left(\frac{z + \frac{t}{2}}{t}\right)^3 \right] \quad \text{für } -0,5t \leq z \leq 0,5t, \quad (3.7a-c)$$

$$u_{EBB,1}(z) = \frac{Ft^3}{48EI_b} \left[ 4 \frac{z - \frac{t}{2}}{t} + 6 \left(\frac{z - \frac{t}{2}}{t}\right)^2 - 4 \left(\frac{z - \frac{t}{2}}{t}\right)^3 + \left(\frac{z - \frac{t}{2}}{t}\right)^4 \right] \quad \text{für } 0,5t \leq z \leq 1,5t,$$

wobei  $\beta$  der Biegewinkel am freien Ende und  $I_b$  das Flächenträgheitsmoment gemäß [Wit13] TB11-3 ist. Für den zweiten Lastfall (Streckenlast nur auf der linken Seite) sind lediglich die Gleichungen für die linke und rechte Seite zu vertauschen sowie in allen Gleichungen das Vorzeichen von  $z$  zu ändern. Für die gesamte Durchbiegung sind im Sinne des Superpositionsprinzips die jeweiligen Gleichungen von Lastfall 1 und Lastfall 2 zu summieren ( $u_{EBB} = u_{EBB,1} + u_{EBB,2}$ ). Die maximale Durchbiegung an beiden Rändern  $z = -1,5t$  bzw.  $z = 1,5t$  und die Durchbiegung in der Mitte  $z = 0$  ergeben sich für einen schubstarrten Balken (EBB) damit zu

$$u_{EBB\_max}(z = \pm 1,5t) = \frac{3Ft^3}{16EI_b} \quad \text{und} \quad u_{EBB\_min}(z = 0) = -\frac{Ft^3}{32EI_b}. \quad (3.8a,b)$$



Für den vorliegenden kurzen, dicken Bolzen sind die Voraussetzungen zur Vernachlässigung der Schubverformungen nicht gegeben. Der Anteil der Verschiebung in Folge des Schubs ist nicht mehr verschwindend klein (näheres in [Öch16] S.5ff). Die Ermittlung der Durchbiegung des schubweichen Balkens (TB) erfolgt auf Basis der Differentialgleichungen für die Querkraft  $Q_x$  und das Moment  $M_y$ :

$$\frac{du}{dz^*} + \psi = \frac{Q_x}{\kappa AG}, \quad \frac{d\psi}{dz^*} = \frac{M_y}{EI_b}. \quad (3.9a,b)$$

Dabei wird  $z^*$  als Hilfskoordinate ab dem linken Balkenrand positiv in  $z$ -Richtung gezählt, wobei  $z^* = z + 1,5t$  gilt. Die Drehung um die  $y$ -Achse wird mit  $\psi$  bezeichnet und der Schubkorrekturfaktor mit  $\kappa$ , der gemäß [Cow66] für einen Kreisquerschnitt mit

$$\kappa = \frac{6(1+\nu)}{7+6\nu} \quad (3.10)$$

berechnet wird. Mit dem ermittelten Querkraft- und Biegemomentverlauf kann die Durchbiegung für den linken, mittleren und rechten Abschnitt durch Integration der beiden Differentialgleichung (3.9a,b) und mit den geometrischen Randbedingungen

$$u(z^* = t) = 0 = u(z^* = 2t), \quad \psi_{li}(z^* = t) = \psi_{mi}(z^* = t), \quad \psi_{mi}(z^* = 2t) = \psi_{re}(z^* = 2t)$$

berechnet werden. Damit erhält man für einen schubweichen Balken (TB)

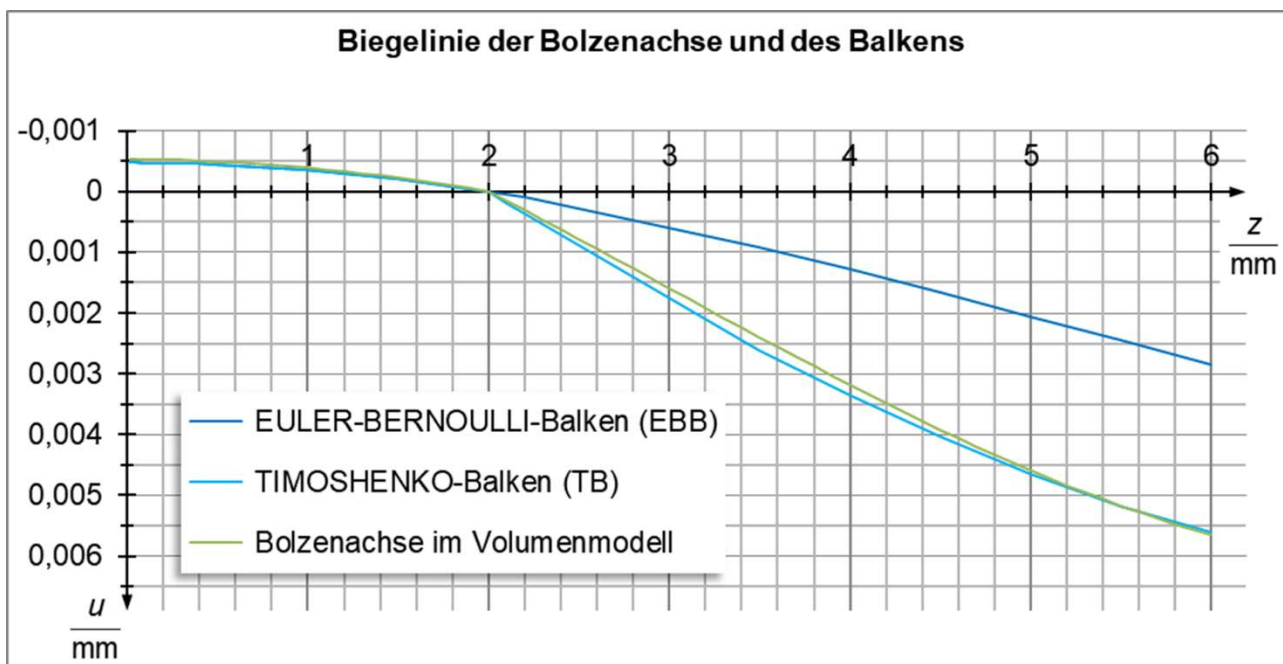
$$u_{TB}(z) = u_{EBB}(z) + \frac{Ft}{4\kappa AG} \left[ 1 - \left( \frac{z}{t} + \frac{3}{2} \right)^2 \right] \quad \text{für } -1,5t \leq z \leq -0,5t,$$

$$u_{TB}(z) = u_{EBB}(z) \quad \text{für } -0,5t \leq z \leq 0,5t, \quad (3.11a-c)$$

$$u_{TB}(z) = u_{EBB}(-z) + \frac{Ft}{4\kappa AG} \left[ 1 - \left( \frac{-z}{t} + \frac{3}{2} \right)^2 \right] \quad \text{für } 0,5t \leq z \leq 1,5t.$$

Wie zu erkennen ist, verschwindet im mittleren Abschnitt der Anteil der Schubverformung, da sich die Querkräfte durch den symmetrischen Lastfall gegenseitig aufheben. Dies wird in

der Darstellung der symmetrischen Biegelinie der halben Bolzenachse bzw. des halben Balkens in Bild 3.7 nochmals grafisch verdeutlicht. Im Vergleich hierzu zeigt der Verlauf beim Volumenmodell bis zur Scherfuge ( $-2 \text{ mm} < z < 2 \text{ mm}$ ) kaum Unterschiede auf, wobei die größte Abweichung in der Mitte der Bolzenachse ( $z = 0$ ) mit etwas über 10% auftritt. Zum Rand hin ( $z > 2 \text{ mm}$ ) gleichen sich die Verläufe von TB und Volumenmodell weiterhin. Lediglich der EBB zeigt durch den fehlenden Schubanteil eine deutlich flachere Biegelinie. Am Rand ( $z = 6 \text{ mm}$ ) sind es schließlich knapp 50 % Unterschied zu den anderen beiden Biegelinien. Die größte absolute Diskrepanz der Durchbiegungen von TB und Volumenmodell kann bei  $z = 3,4 \text{ mm}$  festgestellt werden. Insgesamt zeigt das vorliegende FE-Netz des Bolzens im Vergleich zum schubweichen Balken (TB) eine ausreichende Güte. Die Abweichungen um etwa 10 % sind in Anbetracht der eingesparten Rechenzeit gegenüber einer feineren Vernetzung gut tolerierbar. Eine weitere Prüfung des Bolzenvolumenmodells findet am Gesamtmodell der Bolzenverbindung in Kapitel 3.2.3 statt.



	EBB	TB	Volumenmodell
$u_{\min}(z = 0 \text{ mm})$ (Abweichung zu TB)	-0,474 $\mu\text{m}$ (0%)	-0,474 $\mu\text{m}$	-0,528 $\mu\text{m}$ (+11,4%)
$u(z = 3,4 \text{ mm})$ (Abweichung zu TB)	0,846 $\mu\text{m}$ (-65,4%)	2,447 $\mu\text{m}$	2,240 $\mu\text{m}$ (-8,5%)
$u_{\max}(z = 6 \text{ mm})$ (Abweichung zu TB)	2,842 $\mu\text{m}$ (-49,4%)	5,614 $\mu\text{m}$	5,641 $\mu\text{m}$ (+0,5%)

Bild 3.7: Durchbiegung der halben Bolzenachse bzw. des Balkens

### 3.2.3 FE-Modell der Bolzenverbindung

Neben den separat untersuchten FE-Modellen von Laminat und Bolzen ist auch deren Verbindung zu prüfen. Hierbei ist in erster Linie die Kontaktmodellierung entscheidend, da diese einen starken Einfluss auf den Spannungszustand im Laminat hat. Für das Kontaktmodell sind zunächst die genauen Durchmesser von Bolzen und Bohrung festzulegen, denn mit der in Kapitel 3.1 festgelegten Passung liegt der Toleranzbereich für das Passungsspiel zwischen 0,04 mm und 0,22 mm. Beim Kleinstspiel folgt gemäß Gleichung (2.30) eine mehr als doppelt so große Kontaktfläche wie beim größtmöglichen Spiel. Um eine bessere Vergleichbarkeit mit der HERTZschen Kontakttheorie zu gewährleisten, wird eine möglichst kleine Kontaktfläche angestrebt, weshalb für das FE-Modell der Bolzenverbindung ein Spiel von 0,22 mm verwendet wird (näheres in [Die94] und [Guo01] S.64ff). Demzufolge werden erhöhte Kontaktdrücke erwartet, die eine konservativere Auslegung der Bolzenverbindung erlauben. Der Lochbereich des FE-Modells der Bolzenverbindung ist samt Last und Koordinatensystem (Ursprung im Lochmittelpunkt) im Schnitt ( $x$ - $z$ -Ebene) in Bild 3.8 dargestellt, wobei  $z$  die Laminatdickenrichtung wiedergibt. Die eingezeichnete Last ist dabei auf die gesamte, zur  $y$ - $z$ -Ebene parallele Bolzenfläche bezogen und wird als Knotenkraft auf alle Knoten dieser Fläche aufgeteilt.

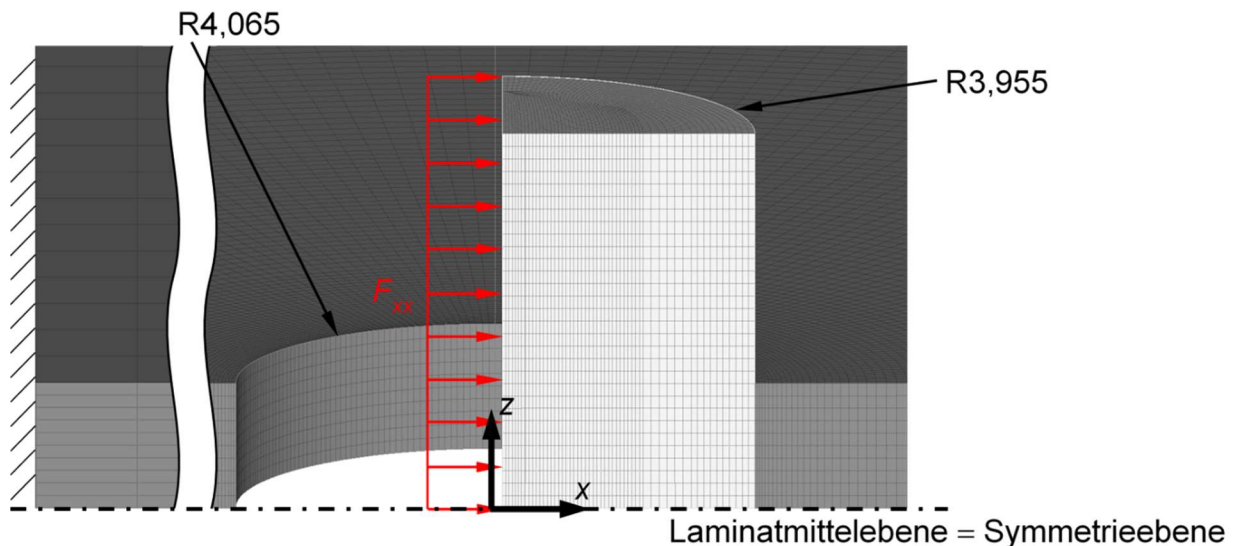


Bild 3.8: Ausschnitt des FE-Modells der Bolzenverbindung mit Randbedingungen

Des Weiteren sind für das Kontaktmodell

- die inkrementelle Lastaufbringung,
- die Kontaktflächendiskretisierung und
- der Kontakttyp

ausschlaggebend.

Die **inkrementelle Lastaufbringung** ist zur sauberen Findung der Kontaktfläche des FE-Modells notwendig. Dabei wird schrittweise, je definiertem Lastinkrement, aus der Durchdringung der FE-Netze beider Körper der Kontakt entsprechend der Kontaktflächen-diskretisierung gesucht und eine neue Kontaktfläche definiert. Mit einer feineren Aufteilung der Last (Erhöhung der Zahl der Lastinkremente) werden in der Regel bessere Ergebnisse erreicht, jedoch steigt damit auch die Rechenzeit. Für das FE-Modell der Bolzenverbindung liegen ab 10 Lastinkrementen die Veränderungen unter 1 %, womit eine weitere Verfeinerung der Schrittweite nicht sinnvoll erscheint.

Zur **Diskretisierung der Kontaktfläche** ist ein knoten- und flächenbasierter Ansatz möglich. Dabei werden die potenziellen Kontaktflächenknoten des einen Kontaktpartners zu den Elementflächen der anderen Kontaktfläche zugeordnet (node-to-surface, N2S). Alternativ kann die Zuordnung zwischen den Kontaktelementflächen der Kontaktpartner stattfinden (surface-to-surface, S2S). Ein weiterer Ansatz ist eine Zuordnung von Knoten (node-to-node, N2N), was jedoch für eine nichtlineare Kontaktanalyse nicht unterstützt wird (näheres in [Alt21]). In zahlreichen Voruntersuchungen mit verschiedenen Lasthöhen, Werkstoffen, Bolzenlängen, Netzfeinheiten, Größen der potenziellen Kontaktflächen, Kontakttypen, Lastinkrementen und weiteren programminternen Parametern zeigt die S2S-Modellierung den plausibleren Spannungszustand und ein nachvollziehbares Verformungsverhalten. In Bild 3.9 ist exemplarisch dafür der Kontaktdruck am halben Lochrand einer Bolzenverbindung aus Baustahl (S235) mit überstehendem Bolzen dargestellt. Die in Kapitel 2.2.2 beschriebene Spannungsüberhöhung am oberen Lochrand ist deutlich zu erkennen. Mit der N2S-Modellierung ergeben sich bei ausreichender Netzqualität (vgl. Kapitel 3.2.1 und 3.2.2) in der initialen Berührungslinie teilweise niedrigere Kontaktdrücke als in der direkten Umgebung, was nicht der Realität entspricht. In Bild 3.9 ist dies schwach erkennbar. Sowohl in der Mitte wie auch am Rand der Kontaktfläche zeigt sich im Kontaktdruckverlauf eine Druckerhöhung bei  $y = 0$  mm, was eine Unstetigkeit im sonst glatten Verlauf darstellt. Das S2S-Modell liefert ohne diese Unstetigkeit beinahe den gleichen Kontaktdruckverlauf, der in der Mitte der Kontaktfläche ebenfalls dem analytischen Verlauf gemäß Gleichung (2.30) ähnelt. Die Kontaktflächenbreite ist allerdings gegenüber dem analytischen Wert um knapp 8 % kleiner und der maximale Kontaktdruck um etwa 7 % geringer. Diese Diskrepanz rührt von dem überstehenden Bolzen her, der über den oberen Lochrand kippt und so die Mitte der Kontaktfläche entlastet (vgl. Kapitel 2.2.2).

Als **Kontakttypen** stehen der freie, der reibungsbehaftete, der haftende und der eingefrorene Kontakt zur Verfügung, wobei letzterer eine starre Verbindung der Kontaktpartner darstellt und somit jegliche Kontaktdeformation vernachlässigt. Eine realitätsnahe Kontaktuntersuchung ist damit nicht möglich. Der freie Kontakt (SLIDE) gibt ein reibungsfreies Gleiten der Kontaktkörper wieder und erlaubt damit, dass einmal in Kontakt tretende Knoten bzw. Elemente sich wieder lösen können, wobei die Durchdringung beider FE-Netze

weiterhin ausgeschlossen ist. Das Gegenstück dazu ist der haftende Kontakt (STICK), der mit der Annahme einer unendlich großen Reibung dieses Lösen der Kontaktflächenknoten und -elemente verhindert. Zwischen diesen beiden Extremen kann beim reibungsbehafteten Kontakt mit der Definition eines Reibungskoeffizienten  $\mu$  der Übergang zwischen Haften und Gleiten festgelegt werden.

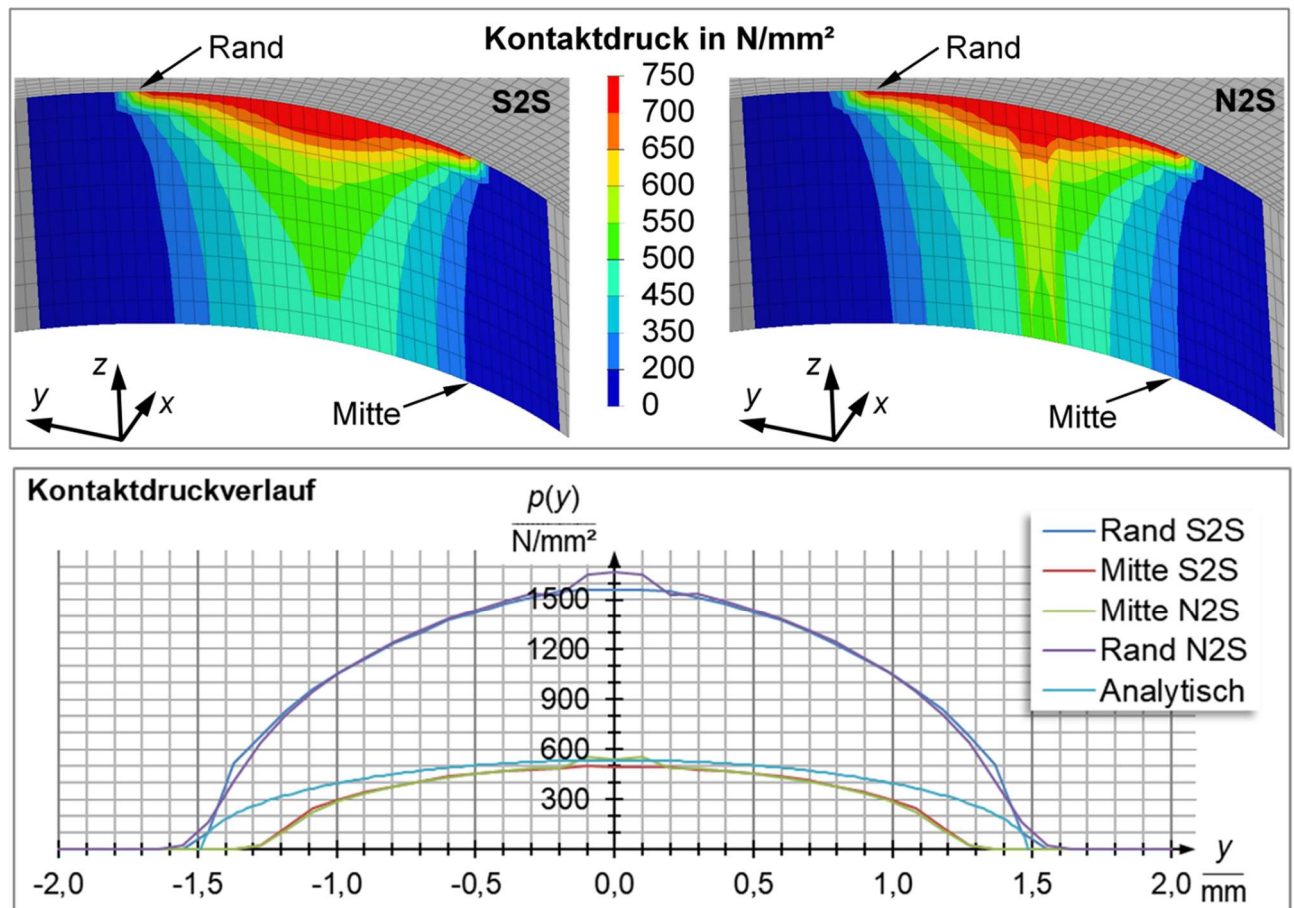


Bild 3.9: Vergleich der Kontaktflächendiskretisierung anhand des Kontaktdrucks über der gesamten Kontaktfläche sowie in der Mitte und am Rand der Kontaktfläche

Ein Vergleich der Kontakttypen – SLIDE, STICK und verschiedener  $\mu$ -Werte – mit einem S2S-Modell zeigt, wie aufgrund der reinen Normalbelastung (vgl. Bild 3.1) erwartet, kaum Unterschiede. Fast uneingeschränkt liegen die Abweichungen für verschiedene Spannungs- und Verschiebungsgrößen teils deutlich unter 10 % und ergeben sich hauptsächlich durch die Querkontraktion. Lediglich beim SLIDE-Kontakt kommt es zu einer leichten Asymmetrie bei der Verschiebung in  $y$ -Richtung, was eine Drehung des Bolzens um die Bolzenachse verursacht. Dieser Effekt verschwindet bereits mit einem minimalen Reibungskoeffizienten von  $\mu = 0,01$ . Der fundamentale Unterschied der Kontakttypen zeigt sich bei der Deformation des oberen Lochrands, wie Bild 3.10 anhand einer Bolzenverbindung aus Baustahl (S235) verdeutlicht. Während ein SLIDE-Kontakt die freie

Verformung in Dickenrichtung erlaubt und somit zum Rand hin den kleinsten Spannungsgradienten aufweist, steigt mit höherem Reibungskoeffizienten die Dehnungsbehinderung und damit der Spannungsgradient. Ein STICK-Kontakt erreicht dabei in der Mitte des oberen Lochrands ( $y = 0$ ) den 1,5-fachen Kontaktdruck eines SLIDE-Kontakts. Der in Bild 3.10 dargestellte Gesamtdeformationszustand (überhöhte Darstellung mit Skalierungsfaktor 100) mit der Verschiebung in z-Richtung zeigt, dass eine realitätsnahe Abbildung des Kontakts einen passenden Reibungskoeffizienten erfordert. Aus der Untersuchung geht hervor, dass bei der hier vorliegenden Anpresskraft bereits ein  $\mu$ -Wert von 0,2 ausreicht, um vom Gleiten ins Haften zu kommen. Da nun reale Reibwerte zwischen Stahl und CFK bei Bolzenverbindungen im Bereich von  $\mu = 0,26$  bis  $\mu = 0,45$  schwanken und von vielen Faktoren abhängig sind (näheres in [Her16]), wird für das FE-Modell der Bolzenverbindung ein haftender Kontakt (STICK) angenommen. Dieser erlaubt zudem durch die höheren Spannungen eine gegenüber Versagen konservativere Auslegung der Bolzenverbindung.

**Verschiebung in z-Richtung**

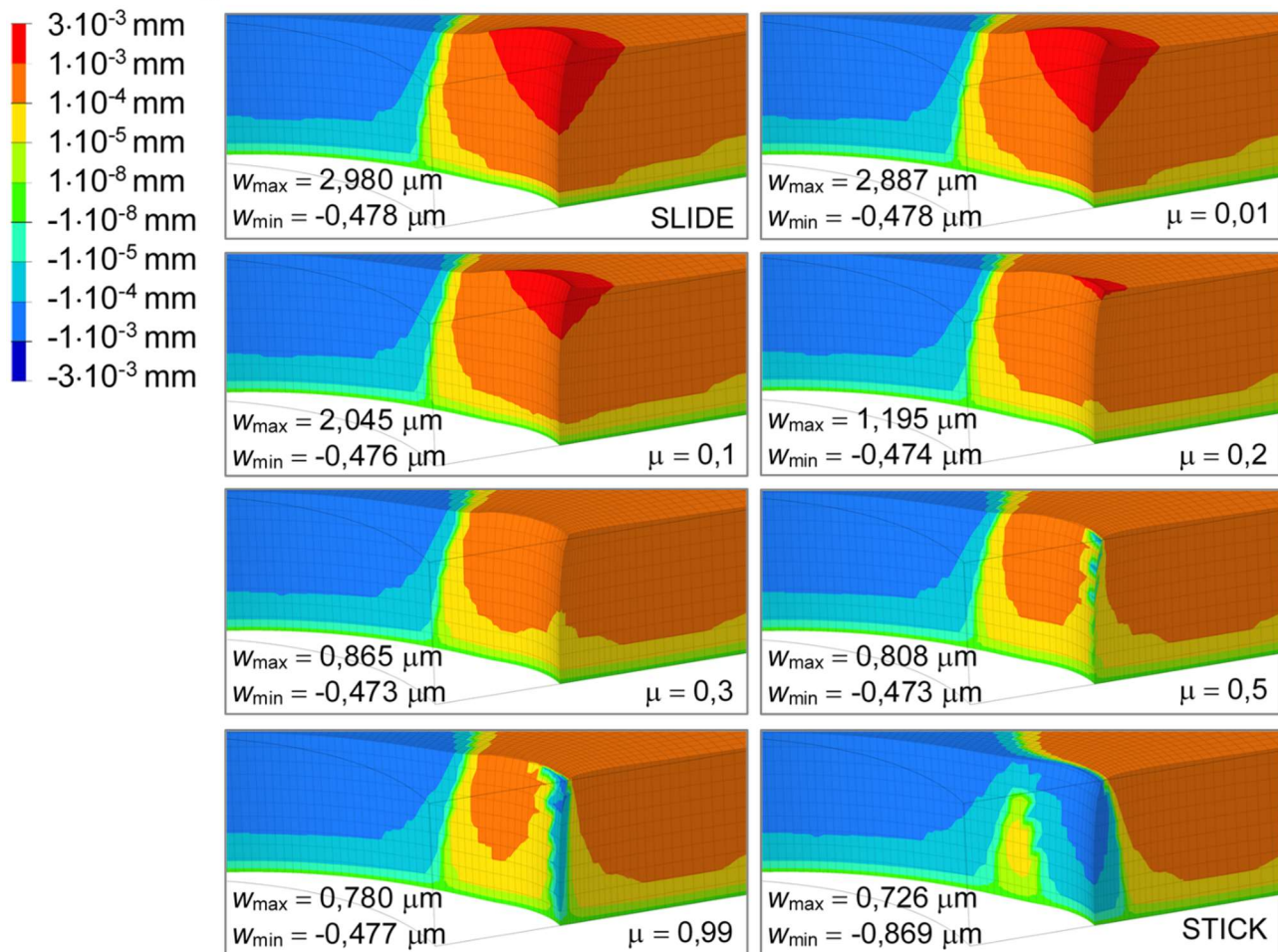


Bild 3.10: Lochrandverformung einer Bolzenverbindung mit isotropen Werkstoff bei unterschiedlichen Reibungskoeffizienten und Kontakttypen (Viertelmodell-darstellung)

Die softwaretechnische Umsetzung des FE-Modells der Bolzenverbindung ist im Anhang C dokumentiert. Die dazugehörige FE-Analyse ergibt mit einer Gesamtlast von  $F_{xx} = 750$  N (für das aufgrund der Symmetrie halbe FE-Modell entsprechend 375 N) ein Verformungsverhalten des Bolzens, welches tendenziell dem Referenzlastfall in Bild 3.6 entspricht. Ein quantitativer Vergleich der Bolzenbiegung ist jedoch wegen der vorhandenen Nachgiebigkeit des Laminats nicht sinnvoll. Dessen ungeachtet kann für die Bolzenverbindung ein Kontakt zwischen Lochrand und Bolzen quer zur Lastrichtung ( $\varphi = 90^\circ$ ) aufgrund der geringen Ovalisierung der Bohrung ausgeschlossen werden. Der Abstand zwischen den beiden Körpern verringert sich in dieser Richtung nur um 1,3 %. Für den Bolzen kann bei einer maximalen v. Mises-Spannung von  $\sigma_{vMises,max} = 97,1$  N/mm<sup>2</sup> und einer maximalen Verschiebung von  $|\vec{v}|_{max} = 11,64 \cdot 10^{-3}$  mm ein Versagen ausgeschlossen werden. Ferner weist auch das Laminat eine ausreichende Festigkeit auf. Die Beanspruchung findet hauptsächlich im Kontaktbereich statt, wie in Bild 3.11 verdeutlicht. Der größte Kontaktdruck herrscht dabei in der 0°-Schicht mit einem Maximum  $p_{max}$  am oberen Rand. Durch die Faserorientierung parallel zur Lastrichtung fällt die Anstrengung der 0°-Schicht jedoch gering aus. Aufgrund der Krümmung des Lochrands ist diese Parallelität jedoch nur in der initialen Berührungslinie, der Mitte der Kontaktfläche ( $y = 0, \varphi = 0^\circ$ ), gegeben, wodurch der Bruchfunktionswert in Umfangsrichtung etwas zunimmt. Der links in Bild 3.11 angegebene maximale Bruchfunktionswert ist dabei für jedes Element und jede Auswertungsebene (Schichtunterseite, -mittelebene und -oberseite) der Höchstwert aller Versagensmodi nach PUCK (vgl. Kapitel 2.1.3). Weiterhin ist zu erkennen, dass die höchsten Bruchfunktionswerte sich für den Übergangsbereich zwischen der -45°-Schicht und der 45°-Schicht ergeben. Eine Druckbelastung quer zur Faser ist für die 90°-Schicht dabei unkritischer, zumal durch das Kippen des überstehenden Bolzens diese Lage am stärksten entlastet wird (vgl. Kapitel 2.2.2).

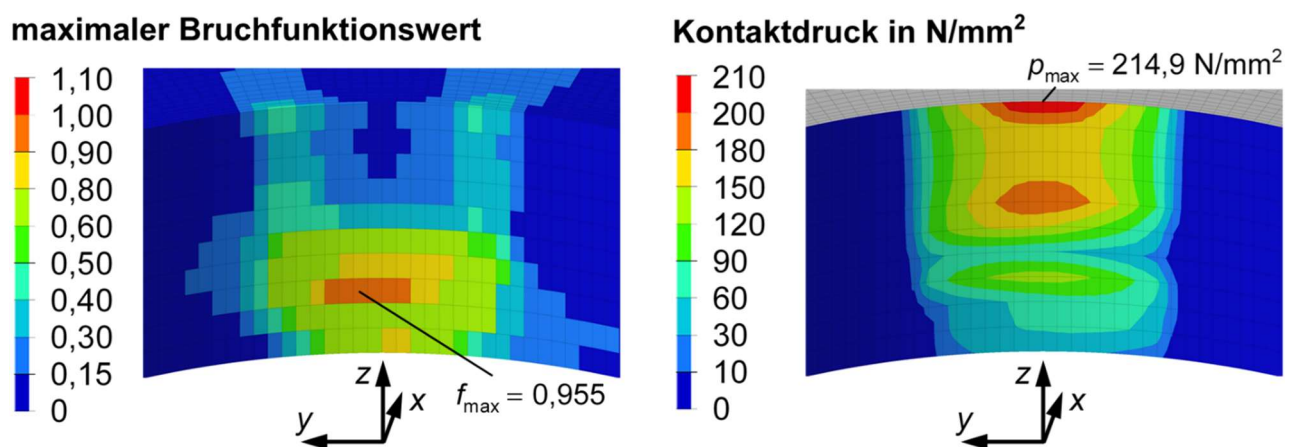


Bild 3.11: Maximaler Bruchfunktionswert aller Versagensmodi nach PUCK (links) und Kontaktdruckverteilung (rechts)

Eine genauere Betrachtung des Kontaktdrucks in ausgewählten Höhen ermöglicht Bild 3.12. Dabei kann eine unsymmetrische Kontaktfläche für die 90°-Schicht festgestellt werden. Wie auch rechts in Bild 3.11 ansatzweise sichtbar, verschwindet der Kontaktdruck in positiver y-Richtung um eine Elementbreite früher als in negativer Richtung. Ursache hierfür ist die darüberliegende -45°-Schicht, die die 90°-Schicht in positiver y-Richtung entlastet. Für die restlichen Schichten fällt die Kontaktflächenbreite mit  $2b = 2,168 \text{ mm}$  identisch aus. Des Weiteren liegen die Maxima der Kontaktdruckverläufe der  $\pm 45^\circ$ -Schichten außerhalb der Kontaktflächenmitte, da hier der Winkelunterschied zwischen dem Kontaktdruck und der Faserorientierung höher ist. Zum Rand der Kontaktfläche fällt der Druck wieder ab. Rechts in Bild 3.12 ist der Kontaktdruck entlang der Laminatdickenrichtung aufgetragen. Dabei ergeben sich aufgrund der unterschiedlichen Schichtsteifigkeiten an den Schichtgrenzen Unstetigkeiten im Verlauf. Daneben ist bei der 0°-Schicht ein Randeffect wie in Kapitel 2.2.2 beschrieben zu erkennen. Eine bessere Auflösung des  $p(z)$ -Verlaufs erfordert eine deutlich feinere Netzaufteilung je Schichtwinkel, was wiederum zu einer höheren Rechenzeit führt. Weitere Ergebnisse der FE-Analyse zeigen, dass die höchsten Verschiebungen in der initialen Berührungslinie ( $y = 0, \varphi = 0^\circ$ ) auftreten und dass diese mit

$$\begin{aligned} |\bar{v}(r = 4,065 \text{ mm}, \varphi = 0^\circ, z = 0 \text{ mm})| &= 9,30 \cdot 10^{-3} \text{ mm} \text{ in der Laminatmittelebene und} \\ |\bar{v}(r = 4,065 \text{ mm}, \varphi = 0^\circ, z = 2 \text{ mm})| &= 9,50 \cdot 10^{-3} \text{ mm} \text{ am oberen Laminatrand} \end{aligned}$$

einen vergleichbaren Wert besitzen. Ferner weist das Laminat eine mittlere Nachgiebigkeit von  $C = 1,899 \text{ Nmm}$  auf.

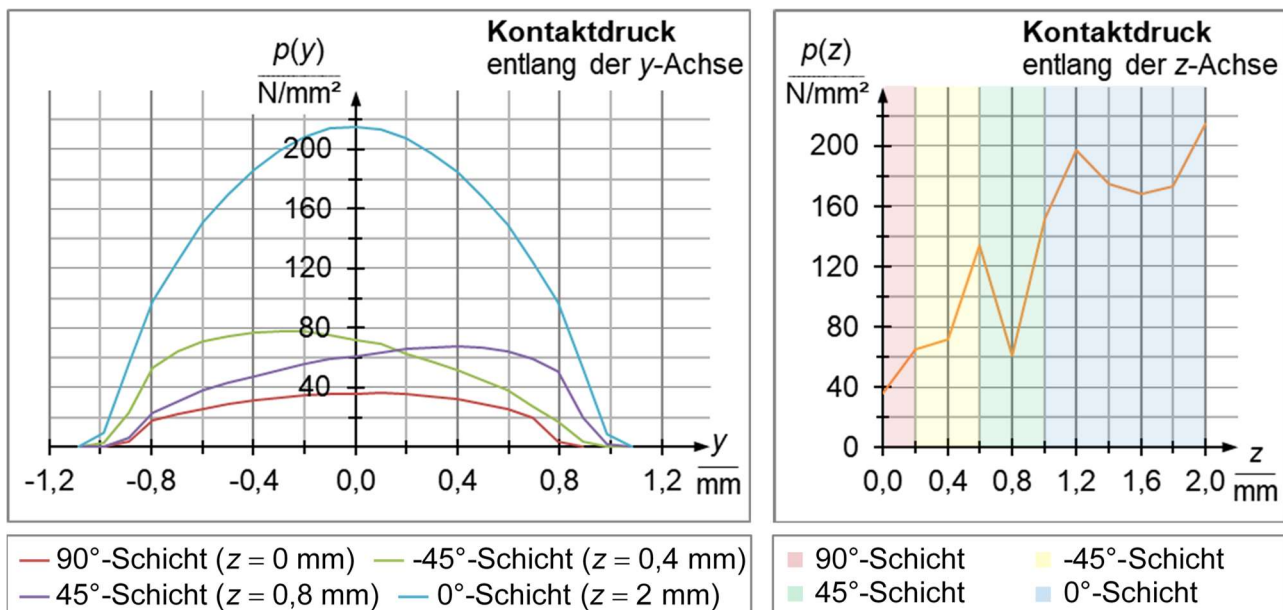


Bild 3.12: Kontaktdruckverlauf in verschiedenen Schichten (links) und Kontaktdruckveränderungen an den Schichtgrenzen (rechts)



Der plausible und nachvollziehbare Deformations- und Spannungszustand erlaubt die Verwendung des FE-Modells der Bolzenverbindung innerhalb der Optimierungen in Kapitel 5. Die hier ermittelten Strukturantworten dienen der späteren Optimierungsrechnung als Ausgangszustand.

### 3.3 Approximation des Kontaktproblems der Bolzenverbindung

Der Kontakt zwischen Bolzen und Verbindungselement erfordert ein Kontaktmodell (vgl. Kapitel 3.2.3), um eine genaue FE-Analyse durchzuführen. Dies führt wiederum zu einer nichtlinearen Berechnung, die viel Rechenzeit kostet. Um den Rechenaufwand zu reduzieren bietet sich eine Approximation des Kontakts an. Dazu kann, wie in Kapitel 2.2.1 erläutert und in Bild 3.13 veranschaulicht, der auftretende Kontaktdruck durch ein Lastmodell beschrieben werden. Auf diese Weise wird eine vereinfachte Berechnung ohne Bolzen und Kontaktmodell möglich.

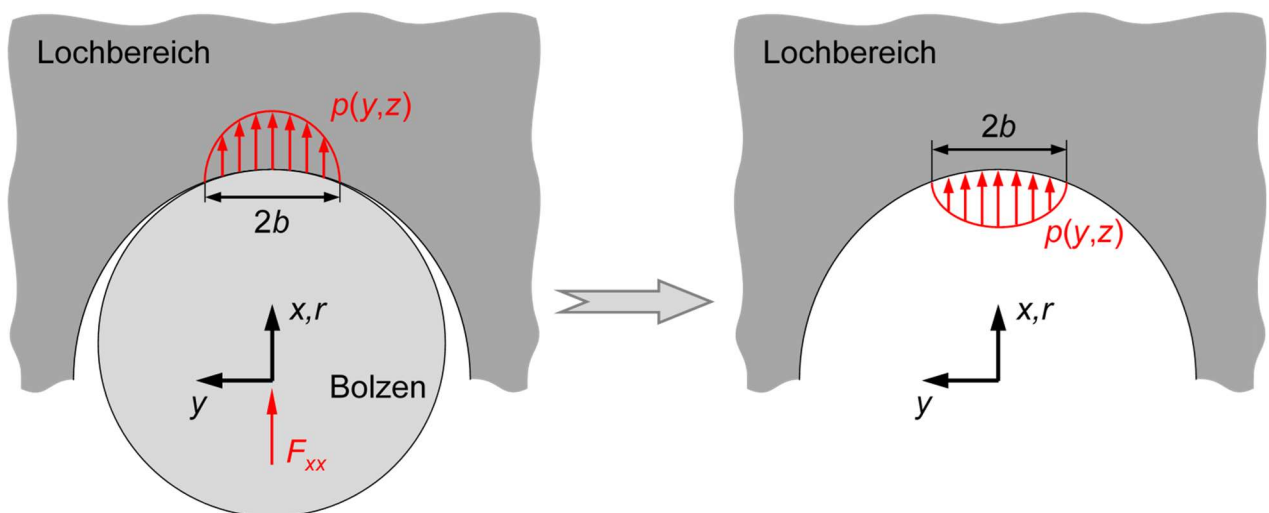


Bild 3.13: Vereinfachung der Kontaktsituation durch Modellierung des Kontaktdrucks

Neben der ebenen Betrachtung  $p(y)$  ist für eine detaillierte Analyse der Kontaktdruckverlauf in Dickenrichtung  $p(z)$  mit abzubilden, um für die vorliegende Bolzenverbindung den Randeffekt des überstehenden Bolzens (vgl. Kapitel 2.2.2) zu berücksichtigen. Die sich ergebende dreidimensionale Kontaktdruckverteilung  $p(y,z)$  ist am Beispiel eines UD-Laminats mit Faserrichtung parallel zur  $x$ -Achse in Bild 3.14 abgebildet. Hierbei ist jeweils die halbe obere Laminathälfte des symmetrischen Laminats mit dem globalen Koordinatensystem und den lokalen Koordinaten  $(\zeta, \xi)$  dargestellt. Im Graphen sind der Kontaktdruck auf den Druck  $p_0$  im Mittelpunkt der Kontaktfläche ( $y = z = 0$ ), die Kontaktbreite  $\zeta$  auf die halbe Kontaktflächenbreite  $b$  und die Kontaktlänge  $\xi$  auf die halbe Laminatdicke  $t/2$  bezogen. Dabei verläuft  $\xi$  parallel zur  $z$ -Achse und  $\zeta$  in Umfangsrichtung am Lochrand, wobei  $\xi = 2z/t$  und

näherungsweise  $\zeta = y/b$  angenommen wird. Zur Ermittlung der dreidimensionalen Kontaktdruckverteilung  $p(y,z)$  wird der Kontaktdruckverlauf in der  $x$ - $y$ -Ebene entlang der Kontaktbreite  $\zeta$  (violette Linie am Lochrand) auf die  $y$ -Achse und der Verlauf in der  $x$ - $z$ -Ebene entlang der Kontaktlänge  $\xi$  (rote Linie am Lochrand) auf die  $z$ -Achse modelliert. Das Produkt der modellierten Kontaktdruckverläufe  $p(y, z = 0)$  und  $p(y = 0, z)$  ist dann auf den Kontaktdruck  $p_0$  zu normieren. Ferner wird mit dem Kontaktdruckverlauf  $p(y, z = t/2)$  die Beanspruchung am oberen Lochrand abgebildet.

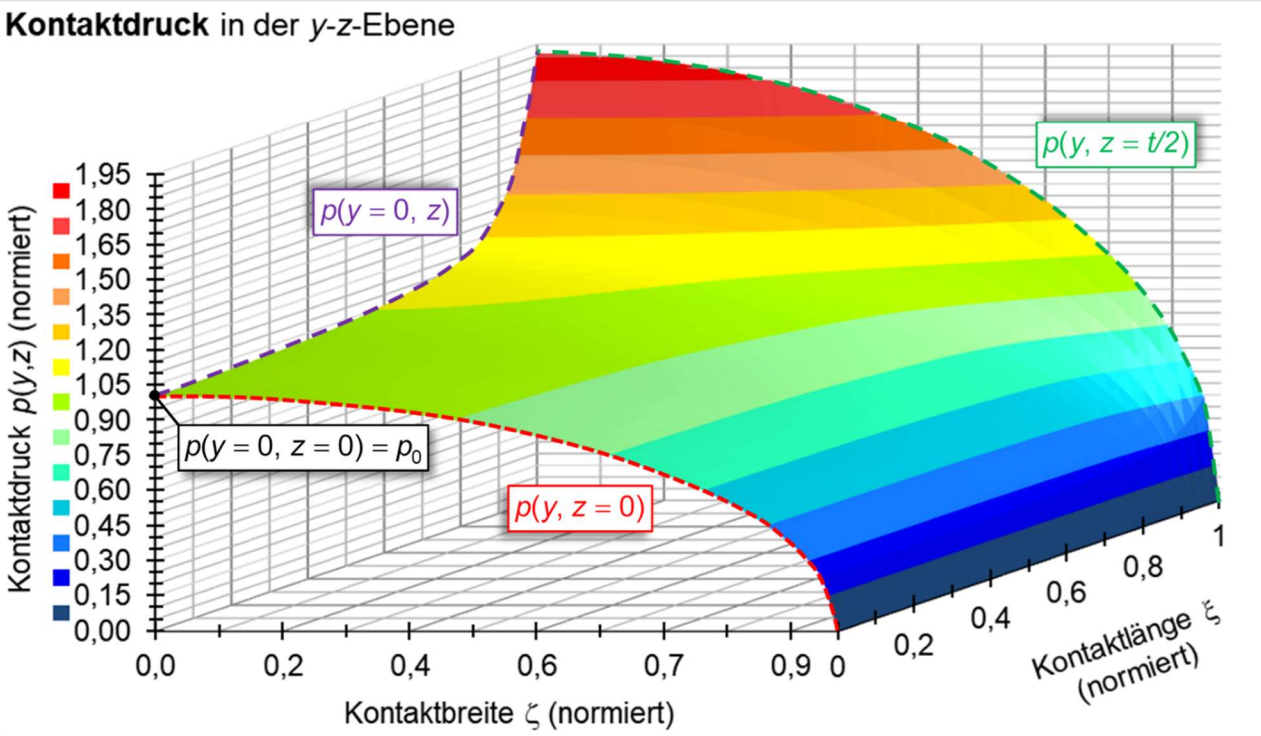
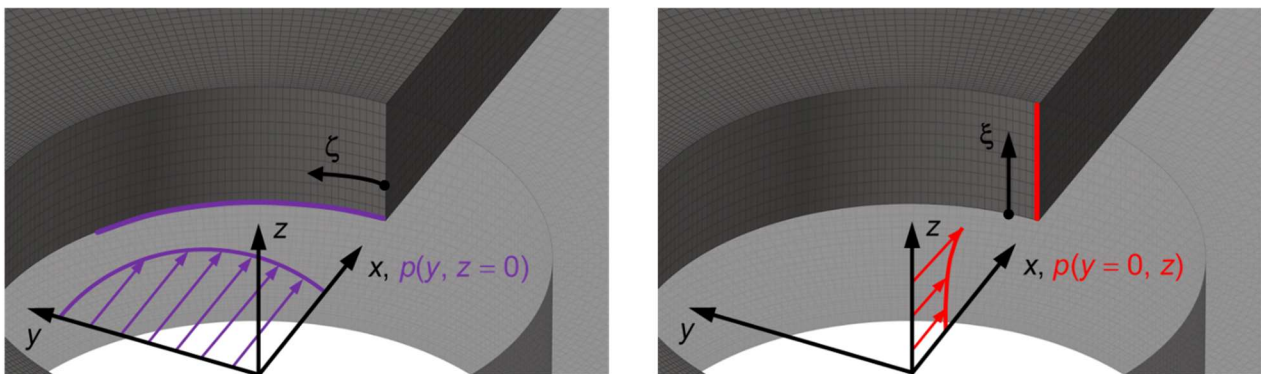


Bild 3.14: Dreidimensionale Kontaktdruckverteilung  $p(y,z)$  zusammengesetzt aus den ebenen Kontaktdruckverläufe  $p(y)$  und  $p(z)$  für ein UD-Laminat

Zur Beschreibung von  $p(y)$  können unter anderem die drei Lastmodelle aus Kapitel 2.2.1 verwendet werden, die ebenfalls die Bestimmung von  $p_0$  ermöglichen. Für die Modellierung von  $p(z)$  wird eine Näherung mittels einer Polynomfunktion verwendet, wobei auch andere Näherungsfunktionen denkbar sind. Der genaue Ablauf zur Modellierung des Kontaktproblems der Bolzenverbindung durch ein Lastmodell ist in Bild 3.15 aufgeführt. Die Modellbildung ist dabei aufgrund der Schichtwinkelabhängigkeit des Kontaktdrucks, wie Bild 3.12 zeigt, schichtweise auszuführen.

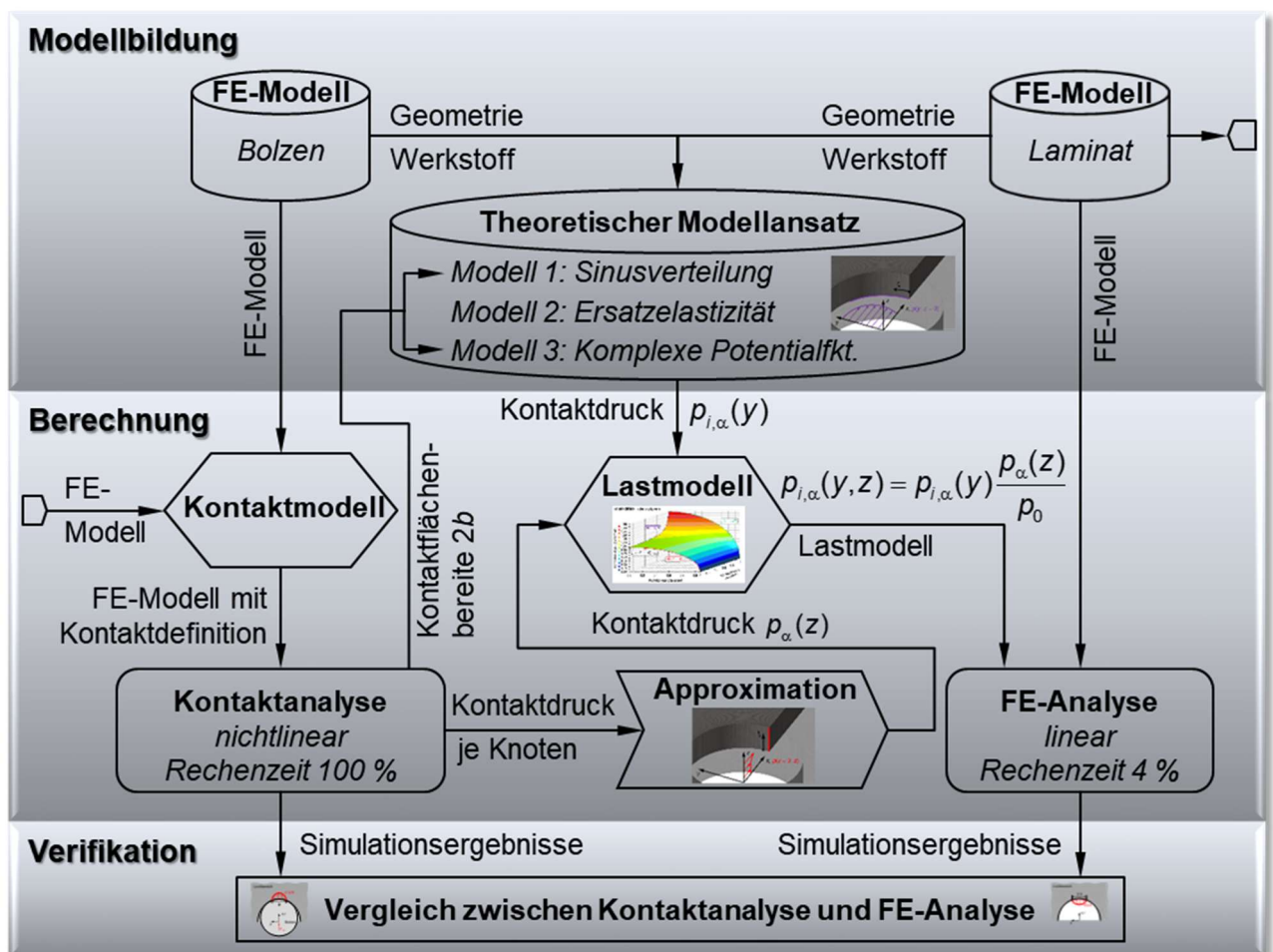


Bild 3.15: Methode zur Approximation des Kontaktproblems einer Bolzenverbindung

Zunächst wird aus den Geometrie- und Werkstoffdaten des FE-Modells der Bolzenverbindung je nach theoretischem Modellansatz  $i$  und Schichtwinkel  $\alpha$  ein Kontaktdruck  $p_{i,\alpha}(y)$  ermittelt, wobei modellabhängig die Kontaktflächenbreite  $2b$  benötigt wird. Diese Information wird aus der Kontaktanalyse mit dem entsprechenden Kontaktmodell der Bolzenverbindung ermittelt. Des Weiteren liefert diese Kontaktanalyse die Kontaktdrücke in den Elementknoten als Stützpunkte für die Approximationsfunktion. Der damit ermittelte, schichtwinkelabhängige Kontaktdruck  $p_{\alpha}(z)$  fließt in das nun vollständige Lastmodell ein, womit eine lineare FE-Analyse des Laminats ohne Bolzen durchgeführt werden kann. Die

hiermit erreichte Rechenzeiteinsparung von etwa 96 % ist gegenüber dem Genauigkeitsverlust und dem Modellierungsaufwand abzuwägen. Eine abschließende Bewertung der Simulationsergebnisse ist demnach stets anzuraten, um die Effektivität der Modellierung der Krafteinleitung zu beurteilen.

Vorteile bietet diese Methode der Kontaktapproximation insbesondere mit dem theoretischen Modellansatz nach Modell 2 und Vernachlässigung des Randeffekts, da so ohne Kontaktanalyse schnelle Voruntersuchungen durchgeführt werden können. Einen weiteren Vorteil gestattet die Methode beim Einsatz innerhalb von Optimierungsrechnungen, um die Anzahl an Iterationen mit Kontaktanalysen zu senken. Nach einer vorausgegangenen Kontaktanalyse können nachfolgende Iterationen mit einem Lastmodell durchgeführt werden, solange sich Kontaktfläche und Kontaktdruck nicht drastisch verändern. Näheres zur Methode, den Lastmodellen und zur Anwendung an einer Bolzenverbindung mit UD-Laminat sind in [Sch19] aufgeführt.

Der Einsatz für das hier vorliegende Laminat  $[0_{10}^{\circ}/45_4^{\circ}/-45_4^{\circ}/90_2^{\circ}]_s$  gestaltet sich jedoch aufwendiger, da der un stetige Verlauf von  $p(z)$  in Bild 3.12 eine lineare Approximation von Elementknoten zu Elementknoten erfordert, womit auch für jede Elementreihe  $p_{i,\alpha}(y)$  zu ermitteln ist. Eine programmtechnische Alternative erlaubt die Übertragung der Kontaktknotenkräfte aus der durchgeführten Kontaktanalyse auf das FE-Modell des Laminats. Die aus HyperView exportierten Kräfte mit zugehöriger Knotennummer werden dabei mit einer Excel-Tabelle aufgearbeitet und über ein tcl-Skript direkt in HyperMesh an die richtige Stelle am Laminat aufgebracht. Anstatt einer Belastung des Laminats durch den Bolzen wird das Laminat über die Kontaktknotenkräfte belastet. Eine zeitintensive nichtlineare Kontaktanalyse ist nicht mehr notwendig.

# Kapitel 4

## Optimierungsverfahren für FVK – speziell für Bolzenverbindungen

### 4.1 Neue Optimierungsstrategie – LTgSL-Verfahren

Die auftretende Komplexität bei der Auslegung und Optimierung von FVK erfordert eine systematische Vorgehensweise, die es erlaubt, strukturiert ein Ergebnis zu erzielen. Basis für eine derartige Strategie sind in der Regel die Anforderungen aus der Problemstellung, deren Erfüllung das Ziel der Auslegung bzw. Optimierung ist. Eine Methode nach diesem Prinzip wird mit dem LTgSL-Verfahren<sup>28</sup> im Weiteren vorgestellt. Grundlage dieser Optimierungsstrategie sind zwei Optimierungsstufen, die ausgehend von einem vorliegenden Strukturmodell nacheinander durchgeführt werden. Die erste Optimierung dient dabei der Findung eines optimalen Startentwurfs für die zweite Optimierung. In der zweiten Optimierungsstufe wird dann ein endgültiger optimaler Entwurf ermittelt. Das Ablaufschema der entwickelten Optimierungsstrategie ist in Bild 4.1 dargestellt.

Im Hinblick auf das Ziel der Arbeit (vgl. Kapitel 1.3) ist die Vorgehensweise insbesondere auf Bolzenverbindungen zugeschnitten, lässt sich aber im Prinzip universell auf faserverstärkte Strukturen anwenden. Deshalb werden die nachfolgenden Erläuterungen zur Optimierungsstrategie allgemein gehalten. Eine spezielle Betrachtung für Bolzenverbindungen findet in Kapitel 5 statt.

#### **Spezifikationsliste** (Schritt 0)

Mit der Spezifikationsliste werden die Anforderungen und Möglichkeiten der Optimierungsaufgabe definiert und somit die erforderlichen Modellierungen und Berechnungen gesteuert. Hierbei sind in erster Linie die Entwurfsvariablen, der Entwurfsraum, die Ziel- und Restriktionsfunktionen sowie die Lastfälle ausschlaggebend. Daneben sind die Werkstoffauswahl, die zu berücksichtigten Fertigungsrestriktionen und insbesondere bei FVK das zu verwendete Halbzeug anzugeben. Für die entwickelte Optimierungsstrategie wird von einem unidirektionalen Gelege in den einzelnen Lagen des Laminats ausgegangen.

#### **Strukturmodell** (Schritt 1)

Die Aufbereitung einer vorhandenen Geometrie bzw. eines möglichen Bauraums ist Ausgangspunkt der Optimierungsstrategie. Daraus wird durch Diskretisierung, Materialzuweisung und Definition der Randbedingungen ein FE-Modell erzeugt. Wenn in der Spezifi-

---

<sup>28</sup> nähere Erläuterung der Abkürzung am Ende des Kapitels 4.1

kationsliste kein Ausgangszustand vorgegeben ist, wird dem Strukturmodell auch bei einem FVK ein isotropes Materialverhalten zugewiesen, wobei die globalen Materialeigenschaften eines quasiisotropen Laminats  $[0^\circ/45^\circ/-45^\circ/90^\circ]_s$  gewählt werden. Dies erspart die Suche nach einem geeigneten Startentwurf für die Topologieoptimierung (vgl. Schritt 5). Die Vernetzung der gegebenen Geometrie kann mit Schalen- oder Volumenelementen erfolgen, wobei der Einsatz dreidimensionaler Elemente es ermöglicht, für form- und kraftschlüssige Verbindungen genauere Kontaktmodelle zu erzeugen. Zudem können die Lagerbedingungen realitätsnaher definiert werden.

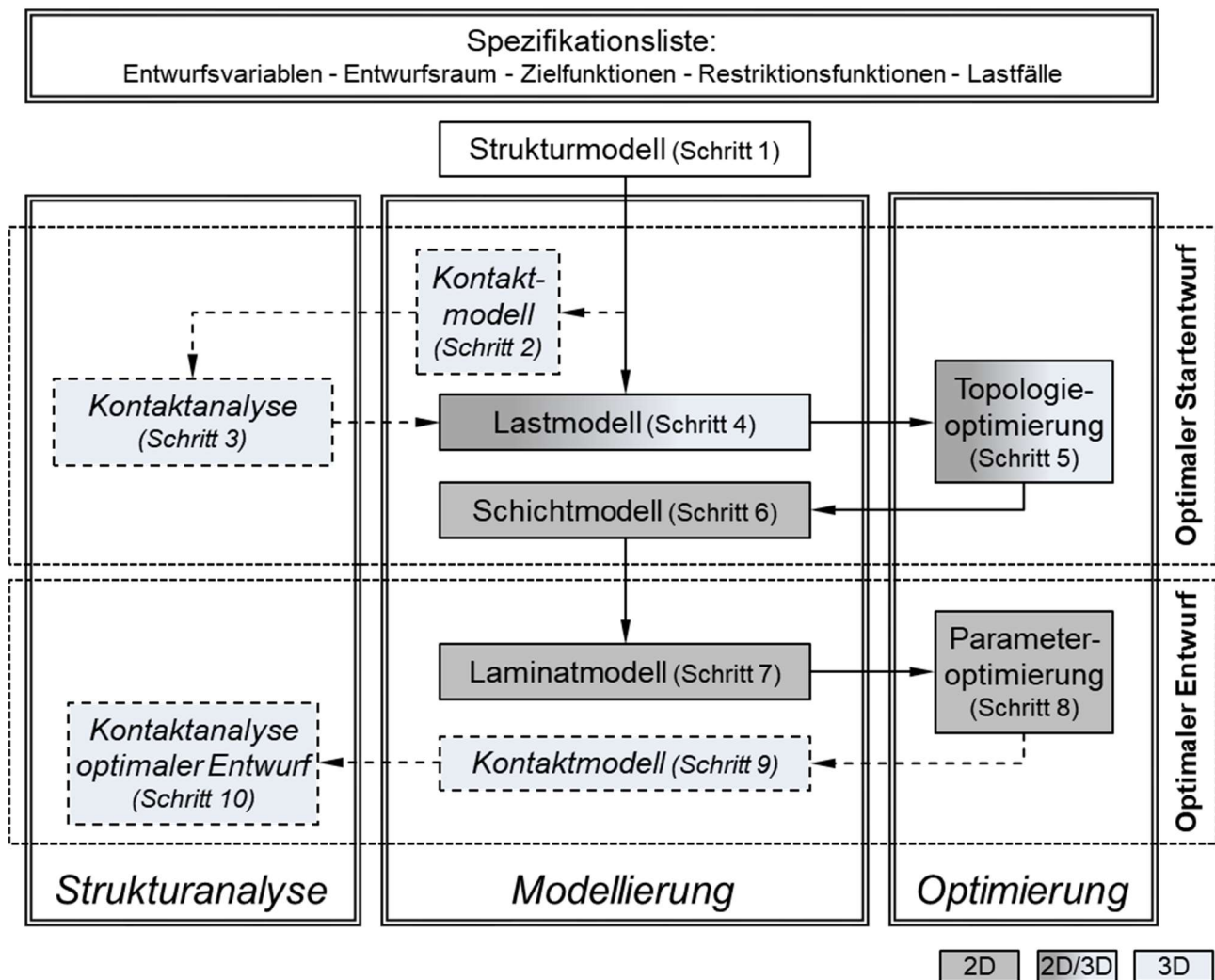


Bild 4.1: Ablaufschema der entwickelten Optimierungsstrategie – LTgSL-Verfahren

**Kontaktmodell** (Schritt 2)

Bei einer dreidimensionalen Diskretisierung des Strukturmodells kann die Modellierung eines auftretenden Kontakts genutzt werden, um eine genauere Abbildung der Kräfteinleitung bzw. Kraftübertragung zu erhalten. In Kapitel 3.2.3 wird die Kontaktmodellierung für eine Bolzenverbindung gezeigt. Innerhalb der entwickelten Optimierungsstrategie ist die

Erstellung des Kontaktmodells ein optionaler Schritt und kann ebenso wie die anschließende Kontaktanalyse übersprungen werden.

### **Kontaktanalyse** (Schritt 3)

Für ein formuliertes Kontaktmodell kann mit Hilfe einer nichtlinearen Kontaktanalyse das Kontaktproblem gelöst werden. Diese Analyse des Ausgangszustands liefert wichtige Kennwerte zur späteren Bewertung des Optimierungsergebnisses. Zudem werden die Kontaktlasten zur Herleitung des realitätsnahen Lastmodells verwendet. Eine ausgiebige Beschreibung dieser Approximation des Kontaktproblems ist in Kapitel 3.3 für eine Bolzenverbindung aufgeführt.

### **Lastmodell** (Schritt 4)

Werden die optionalen Schritte 2 und 3 ausgeführt, kann mit den Ergebnissen ein Lastmodell erzeugt werden, welches wiederum eine lineare Berechnung erlaubt und somit enorm viel Rechenzeit einspart. Mit der Annahme, dass zwischen den Iterationen einer späteren Optimierung keine großen Veränderungen der Kontaktlasten auftreten, kann das Lastmodell auch für die anschließende Topologieoptimierung verwendet werden. Der Fehler dieser Näherung ist in Voruntersuchungen abzuschätzen und nach der Optimierung zu quantifizieren. Bei nicht akzeptabler Diskrepanz kann die Optimierung mit iterativ angepassten Kontaktlasten erfolgen. Alternativ zur Modellierung eines Lastmodells mit Hilfe der berechneten Kontaktlasten kann für das aufgearbeitete Strukturmodell (Schritt 1) eine äußere Last angenommen oder ein theoretisches Lastmodell (vgl. Kapitel 2.2) definiert werden. Dadurch ist jedoch in der Regel der Detaillierungsgrad der realen Lastsituation geringer als bei der Verwendung eines Kontaktmodells. Je nach Diskretisierung des Strukturmodells (Schritt 1) liegt das Lastmodell letztlich als zwei- oder dreidimensionales FE-Modell vor.

### **Topologieoptimierung** (Schritt 5)

Mit dem erzeugten Lastmodell ist für die Topologieoptimierung ein zwei- oder dreidimensionales Analysemodell vorhanden. Das Optimierungsproblem der Topologieoptimierung kann mit bekannten Strategien (vgl. Kapitel 2.3) gelöst werden. Ferner liegt der Topologieoptimierung in der Regel ein isotropes Materialverhalten mit den globalen Materialeigenschaften eines quasiisotropen Laminats vor (vgl. Schritt 1). Dadurch wird die Wahl eines geeigneten Startentwurfs, die bei mehrschichtigen Laminaten nicht trivial ist, umgangen und der Einfluss des Startentwurfs auf das Optimierungsergebnis reduziert. Jedoch ist eine quantitative Beurteilung der Beanspruchung innerhalb der Topologieoptimierung aufgrund der verschmierten Werkstoffeigenschaften nicht möglich. Allein eine Einschätzung mit fiktiv abgeschätzten Festigkeitswerten ist denkbar. Eine Festigkeitsuntersuchung sowie die

Verwendung richtungsabhängiger Lamineigenschaften erfolgt im weiteren Verlauf der entwickelten Optimierungsstrategie.

### **Schichtmodell** (Schritt 6)

Mit der Aufbereitung der Ergebnisse der Topologieoptimierung zu einem Einzelschichtmodell wird schließlich ein optimaler Startentwurf (vgl. Bild 4.1) für den weiteren Optimierungsprozess generiert. Dieses Schichtmodell ist stets ein zweidimensionales FE-Modell, bei dem jedes finite Element eine Einzelschicht mit einer Dicke und einem Faserwinkel darstellt. Die Elementdicken werden entsprechend ihres Materialfüllgrades (vgl. Bild 4.2) und der Faserwinkel gemäß der Hauptnormalspannungstrajektorien („Lastpfade“) aus der Topologieoptimierung ermittelt. Dabei werden nur Elemente mit einem Materialfüllgrad über einem individuell festgelegten Schwellenwert  $\chi_{sw}$  betrachtet.

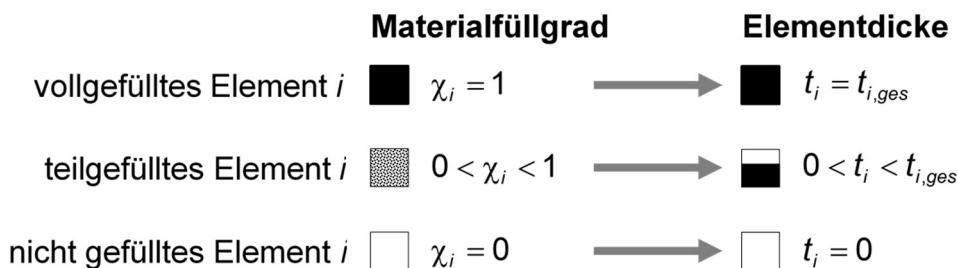


Bild 4.2: Prinzipielle Ermittlung der Elementdicke aus dem Materialfüllgrad

Eine vollständige Materialfüllung ( $\chi_i = 1$ ) eines Elements  $i$  kann nur mit der Gesamtdicke  $t_{i,ges}$  des Elements erreicht werden. Ebenso hat ein nicht gefülltes Element  $i$  die Dicke  $t_i = 0$ . Für alle Teilfüllungen ist die Elementdicke dann entsprechend

$$\begin{aligned}
 t_i &= \chi_i \cdot t_{i,ges} & \text{für } \chi_i > \chi_{sw} \\
 t_i &= 0 & \text{für } \chi_i \leq \chi_{sw}
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

zu bestimmen. Bei einer Topologieoptimierung mit Volumenmodell sind die Ergebniswerte der Elemente übereinander (Dickenrichtung) zusammenzufügen: Für die Elementdicken ist eine Summation und für die Elementorientierung  $\alpha_i$  eine Mittelwertbildung bzw. gezielte Auswahl der Winkel notwendig, wobei die Hauptnormalspannungstrajektorien als Projektion in der Laminebene betrachtet werden. Diese Projektion entspricht der Vorgabe eines Laminats nach einer ebenen flächigen Struktur, womit Faserrichtungen außerhalb der Laminebene ausgeschlossen werden sollen. Für die Hauptnormalspannungstrajektorien wird mit Hilfe der Normalenvektoren der jeweiligen Hauptspannungsebene (vgl. Gl.(2.27)) für jedes Element  $i$  mit  $\chi_i > \chi_{sw}$  der Winkel der Hauptrichtung der betragsmäßig größeren Hauptnormalspannung in Bezug zur 1-Achse (Richtung der  $0^\circ$  Faser) berechnet. Hierbei



wird die Arkustangensfunktion verwendet, um die Winkel direkt zwischen  $-90^\circ$  und  $90^\circ$  zu erhalten. Demnach kann die Elementfaserorientierung mit

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \arctan\left(\frac{n_{yi,I}}{n_{xi,I}}\right) && \text{für } |\sigma_{i,I}| > |\sigma_{i,III}| \\ \alpha_i &= \arctan\left(\frac{n_{yi,III}}{n_{xi,III}}\right) && \text{für } |\sigma_{i,I}| \leq |\sigma_{i,III}| \end{aligned} \quad (4.2)$$

ermittelt werden, wobei für den Sonderfall eines reinen hydrostatischen Spannungszustands  $\sigma_{i,I} = \sigma_{i,III}$  die Hauptspannungsrichtung  $\vec{n}_{i,III}$  zur Berechnung des Faserwinkels herangezogen wird.

Ein dreidimensionales Lastmodell wird ebenfalls in die Schalenebene projiziert. Hierbei können die räumlich verteilten Kräfte mit programminternen Mittel in die Ebene referenziert werden oder die Kräfte werden samt Position ausgegeben, mit externen Mitteln in die Schalenebenen umgerechnet und an entsprechender Stelle wieder importiert. Alternativ kann ein theoretischer Ansatz für ein zweidimensionales Lastmodell verwendet werden (vgl. Kapitel 2.2 und Kapitel 3.3). Unabhängig von diesen Möglichkeiten ist für eine genaue Abbildung der Last in die Ebene die Berücksichtigung eventuell auftretender Versatzmomente wichtig.

### **Laminatmodell** (Schritt 7)

Die elementweise verteilten Schichtdicken und -winkel des zweidimensionalen Schichtmodells (vgl. Schritt 6) werden zu größeren Bereichen zusammengefasst, um ein unidirektionales Gelege (vgl. Schritt 0) zu modellieren. Hierzu werden die Elemente des Schichtmodells gemäß ihrer Faserorientierung in diskrete Zonen eingeteilt, wobei der Basiswinkel  $\Omega$  und der Winkelbereich  $\omega$  dieser Zonen frei gewählt werden kann. Aus fertigungstechnischer Sicht bietet es sich hierbei an, eine realisierbare Winkelabstufung und im Schichtmodell häufig vorkommende Schichtwinkel zu verwenden. Damit wird ein Element  $i$  mit dem Faserwinkel  $\alpha_i$ , der im Bereich  $\pm\omega$  um den Basiswinkel  $\Omega_m$  einer Zone  $m$  liegt, der Zone  $m$  zugeordnet und erhält den Schichtwinkel  $\Omega_m$  (vgl. Bild 4.3). Die so entstehenden Zonen werden als Einzelschichten aufgefasst, wobei nicht zusammenhängende Zonen als separate Einzelschichten mit gleichem Faserwinkel  $\Omega_m$  angesehen werden. Eine weitere Unterteilung der Zonen in verschiedene Einzelschichten mit gleichem Winkel ist ebenso möglich. Die Schichtdicke dieser Einzelschichten wird als Mittelwert der Dicken aller enthaltener Elemente festgelegt.

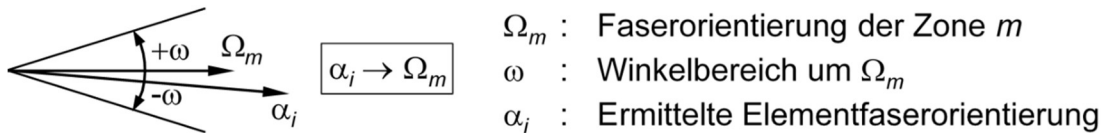


Bild 4.3: Zuordnung der Elementfaserwinkel in eine Zone mit vordefiniertem Winkel

Diese diskrete Verteilung der Zonen bzw. Einzelschichten erlaubt einen guten Überblick der notwendigen Schichten und deren Gestalt. Außerdem werden einzelne Elemente und sehr kleine Zonen offenbart, die sich nicht in das Bild der übrigen Zonenverteilung eingliedern. Diese nicht eindeutig zugeordneten Elemente können vorwiegend in Randbereichen oder an Zonengrenzen auftreten, da hier der optimale Entwurf der Topologieoptimierung wechselnde Hauptspannungsrichtungen und damit teils stark unterschiedliche Faserwinkel (vgl. Schritt 6) aufweisen kann. Die hiervon betroffenen Elemente sind manuell zu bereinigen, indem diese in entsprechende Nachbarzonen integriert werden. Das nun erhaltene FE-Modell ist bis dahin aus mehreren, innerhalb des Bauraums verteilten und nebeneinander angeordneten, Einzelschichten aufgebaut. Bei Bedarf kann daraus beispielsweise durch Erweiterung der Schichten auf Nachbarzonen und Erzeugung von Überlappungsbereichen ein Mehrschichtverbund erzeugt werden. Zudem sind gegebenenfalls große Zonen zu unterteilen, um in der nachfolgenden Optimierung mehr Freiheiten zu zulassen. Die in diesem Modellierungsschritt vorgenommenen Anpassungen bei der Erstellung des Laminatmodells orientieren sich an den vorherigen Ergebnissen (Schritt 5 und 6) und sollten stets in Abstimmung mit der Spezifikationsliste (Schritt 0) stattfinden. Hiervon betroffen sind insbesondere die Fertigungsrestriktionen wie die Winkelabstufung, die Zonenunterteilung und der Aufbau eines Mehrschichtverbunds. Je nach Spezifikationsliste kann dieser Schritt damit viele individuelle Gestaltungsmöglichkeiten bieten.

### **Parameteroptimierung** (Schritt 8)

Das erstellte zweidimensionale Laminatmodell bildet das Analysemodell für die Parameteroptimierung, wobei die Schichtdicken und -winkel der separaten Zonen als Entwurfsvariablen dienen. Diese werden aus fertigungstechnischen Aspekten nur diskrete Werte annehmen, womit eine bessere Herstellbarkeit des optimierten Laminats gewährleistet werden soll. Zudem sind bei Bedarf die gleichen Schichtwinkel mehrerer angrenzender Zonen als eine Entwurfsvariable zu wählen, um einen kontinuierlichen Verlauf der unidirektionalen Schichten über die Zonengrenzen zu gewährleisten. Die Durchführung der diskreten Schichtdicken- und Schichtwinkeloptimierung liefert einen optimalen Entwurf für das definierte Laminat.

### **Kontaktmodell des optimalen Entwurfs** (Schritt 9)

Die Kontaktmodellierung des optimalen Entwurfs bietet sich an, um einen Vergleich zum Ausgangszustand, falls ein Kontaktmodell vorhanden ist (vgl. Schritt 2), zu ermöglichen. Zur

Überführung des optimalen Entwurfs in ein Kontaktmodell werden die Informationen, insbesondere Schichtdicken und -winkel, aus der Parameteroptimierung in einem Volumenmodell verarbeitet und der Kontaktpartner mit den Randbedingungen aus Schritt 2 eingefügt.

Eine genauere Nachrechnung eines optimalen Entwurfs anhand eines Volumenmodells kann auch ohne vormals durchgeführter Kontaktanalyse (Schritt 3) erfolgen. Mit zusätzlicher Modellierung eines Kontaktpartners, des Kontakts und der Randbedingungen kann daraus ebenfalls ein Kontaktmodell aufgebaut werden.

### **Kontaktanalyse des optimalen Entwurfs** (Schritt 10)

Mit der Kontaktanalyse des optimalen Entwurfs kann das Verhalten der optimierten Struktur detaillierter als mit einem Schalenmodell untersucht werden, womit genauere Rückschlüsse auf die Erfüllung der Anforderungen der Spezifikationsliste (Schritt 0) gezogen werden können. Zudem wird das Verbesserungspotenzial gegenüber den Ergebnissen der Startentwurfsanalyse ersichtlich.

### **Zusammenfassung der entwickelten Optimierungsstrategie**

Die entwickelte Optimierungsstrategie erfordert mindestens 3 Modellierungen und 2 Optimierungen (Schritt 4 bis 8), um aus einem aufgearbeiteten Strukturmodell (Schritt 1) einen optimalen Laminatentwurf zu erhalten. Zur detaillierteren Betrachtung mittels Kontaktanalyse sind zur Voruntersuchung und Nachrechnung zusätzlich jeweils eine Modellierung und eine FE-Analyse erforderlich. Die Methode sieht einen sequentiellen Ablauf vor, bei dem Änderungen in den Modellierungsschritten stattfinden. Bei einem nicht zufriedenstellenden Optimierungsergebnis sind in der vorangegangenen Modellierung Anpassungen im Einklang mit der Spezifikationsliste durchzuführen. Ausschlaggebend kann hierbei besonders die Anpassung des individuell gestalteten Laminatmodells (Schritt 7) sein. Aber auch ein verändertes Lastmodell (Schritt 4) kann das Optimierungsergebnis wesentlich beeinflussen. Bleiben diese Änderungen in den Modellen erfolglos, kann ein Neustart des Prozesses ab Schritt 0 notwendig sein. Dabei können gewonnene Erkenntnisse unter anderem in die Wahl eines Startentwurfs mit einbezogen werden.

Insgesamt bietet die entwickelte Optimierungsstrategie eine Lastmodellunterstützung und einen generalisierten Startentwurf für die Topologieoptimierung sowie eine anschließende Laminatmodelloptimierung. Im Weiteren wird die entwickelte Optimierungsstrategie deshalb als LTgSL-Verfahren (*Lastmodellbasierte Topologieoptimierung mit generalisiertem Startentwurf und anschließender Laminatmodelloptimierung*) bezeichnet.

Mit der Demonstration des LTgSL-Verfahrens am Beispiel einer Kragsscheibe in Kapitel 4.2 sollen nochmals der Ablauf und die Möglichkeiten der Vorgehensweise verdeutlicht werden. Die dabei erzielten Ergebnisse dienen zur Diskussion des LTgSL-Verfahrens. Die Anwendung der Methode an der Bolzenverbindung aus Kapitel 3 erfolgt in Kapitel 5.

## 4.2 LTgSL-Verfahren am Beispiel einer Kragplatte

Die im vorherigen Kapitel beschriebene Optimierungsstrategie – LTgSL-Verfahren – soll an einer einfachen Kragplatte (vgl. Bild 4.4) veranschaulicht werden. Hierbei wird zum einen der Ablauf demonstriert und zum anderen werden die erzielten Ergebnisse sowie das Verfahren selbst diskutiert (vgl. Kapitel 4.3). Die softwaretechnische Umsetzung dieses Optimierungsproblems ist im Anhang C dokumentiert.

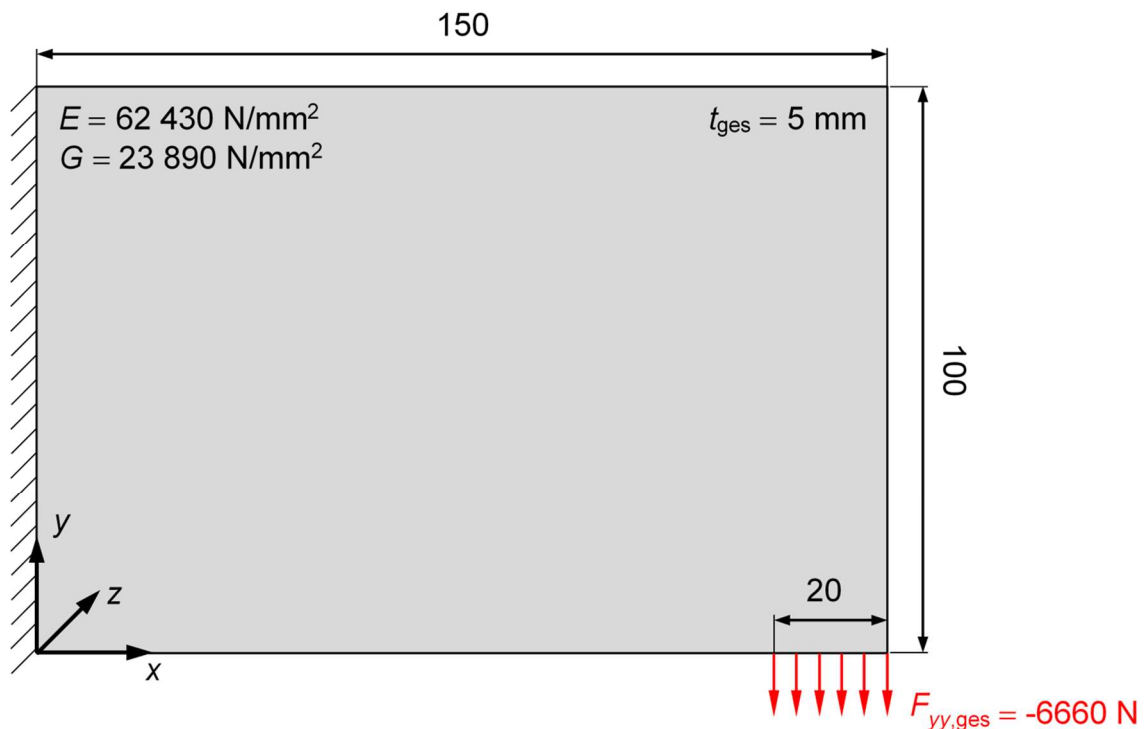


Bild 4.4: Geometrie und Randbedingungen der Kragplatte

### Schritt 0: Spezifikationsliste

Die Optimierung soll bei ausreichender Festigkeit eine möglichst steife Struktur mit 20 % des Bauraumvolumens liefern. Der einseitig fest eingespannte Bauraum wird dabei mit einer Gesamtkraft von 6660 N belastet. Der Kraftangriffsbereich erstreckt sich dabei über eine definierte Strecke. Weitere Einzelheiten zu den Randbedingungen sind laut Struktur- und Lastmodell (Schritte 1, 4) zu beachten. Als Entwurfsvariablen stehen der Materialfüllgrad für die Topologieoptimierung sowie Schichtdicken und -winkel für die Parameteroptimierung zur Verfügung (vgl. Kapitel 2.3). Während der Materialfüllgrad kontinuierliche Werte zwischen einem definierten Mindestwert von 0,001 und 1 annehmen kann, sind bei den Schichtdicken nur Vielfache einer fertigmöglichen Mindestdicke von 0,1 mm möglich, wobei die Bauraumgrenze von 5 mm auch als MSV eingehalten werden muss. Für die Schichtwinkel sind ebenso nur diskrete Werte in 5° Schritten zwischen -90° und 90° zugelassen. Des Weiteren wird

als Werkstoff ein CFK verwendet, der auf Basis unidirektionaler Einzelschichten zu einem Laminat verarbeitet werden soll. In Tabelle 4.1 ist die Optimierungsaufgabe für alle  $n$  Elemente der Kragsscheibe zusammengefasst. Dabei ist zu erkennen, dass für die Festigkeitsbeurteilung innerhalb der Parameteroptimierung das Versagenskriterium nach PUCK verwendet wird, wobei die Bruchbedingung als zulässiger Grenzzustand verstanden (vgl. Kapitel 2.1.3) und als ausreichende Festigkeit definiert wird. Damit sollen während der Optimierung auch Entwürfe mit einer Beanspruchung bis zur Versagenslast berücksichtigt werden.

	Topologieoptimierung	Parameteroptimierung
<b>Entwurfsvariablen</b>	$\vec{x} = [\chi_1 \ \chi_2 \ \dots \ \chi_n]^T$	$\vec{x} = [t_1 \ t_2 \ \dots \ t_n \ \alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_n]^T$
<b>Zielfunktion</b>	$f(\vec{x}) = C(\vec{x})$	
<b>Entwurfsraumgrenzen / Restriktionen</b>	$0,001 \leq \chi_i \leq 1 ; i = 1, \dots, n$  $g_1(\vec{x}) = 0,2 - \frac{V(\vec{x})}{V_{ges}} \geq 0$	$0,1 \text{ mm} \leq t_i \leq 5 \text{ mm} ; i = 1, \dots, n$ $; t_i = \eta \cdot 0,1 \text{ mm}$ $-90^\circ \leq \alpha_i \leq 90^\circ ; i = 1, \dots, n$ $; \alpha_i = \kappa \cdot 5^\circ$ mit $\eta \in \mathbb{N}^+$ und $\kappa \in \mathbb{Z}$  $g_1(\vec{x}) = 0,2 - \frac{V(\vec{x})}{V_{ges}} \geq 0$ $g_2(\vec{x}) = 1 - f_{\text{PUCK}}(\vec{x}) \geq 0$
<b>Optimierungsproblem</b>	$\text{Min}_{\vec{x}} \{f(\vec{x}) \mid \vec{x} \in \mathbb{R}_z^n\}$ mit $\mathbb{R}_z^n = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{g}(\vec{x}) \geq \vec{0}\}$	
<b>Material</b>	CFK UD-Gelege: Werkstoffkennwerte gemäß Tabelle 3.1	
<b>Randbedingungen</b>	$\vec{v}(x=0, y, z=0) = \vec{0}$ ; $F_{yy, ges}(130 \leq x \leq 150, y=0, z=0) = -6660 \text{ N}$	

Tabelle 4.1: Optimierungsaufgabe für die Kragsscheibe

### Schritt 1: Strukturmodell

Das Strukturmodell der Kragsscheibe mit Kantenlängen von 150 mm und 100 mm bildet den möglichen Bauraum ab. Dieser wird mit quadratischen Schalenelementen mit einer Kantenlänge von 1 mm modelliert, wobei den Elementen eine Dicke von 5 mm zugewiesen wird. Zudem wird ein isotropes Material mit den globalen Materialeigenschaften eines quasiisotropen Laminats  $[0^\circ/45^\circ/-45^\circ/90^\circ]_s$  mit den Werkstoffkennwerten gemäß Tabelle 3.1 definiert. Damit ergibt sich ein Elastizitätsmodul von  $E = 62430 \text{ N/mm}^2$  und ein Schubmodul von  $G = 23890 \text{ N/mm}^2$ .

### **Schritt 2: Kontaktmodell**

Aufgrund einer nicht vorhandenen Kontaktsituation entfällt die Kontaktmodellierung.

### **Schritt 3: Kontaktanalyse**

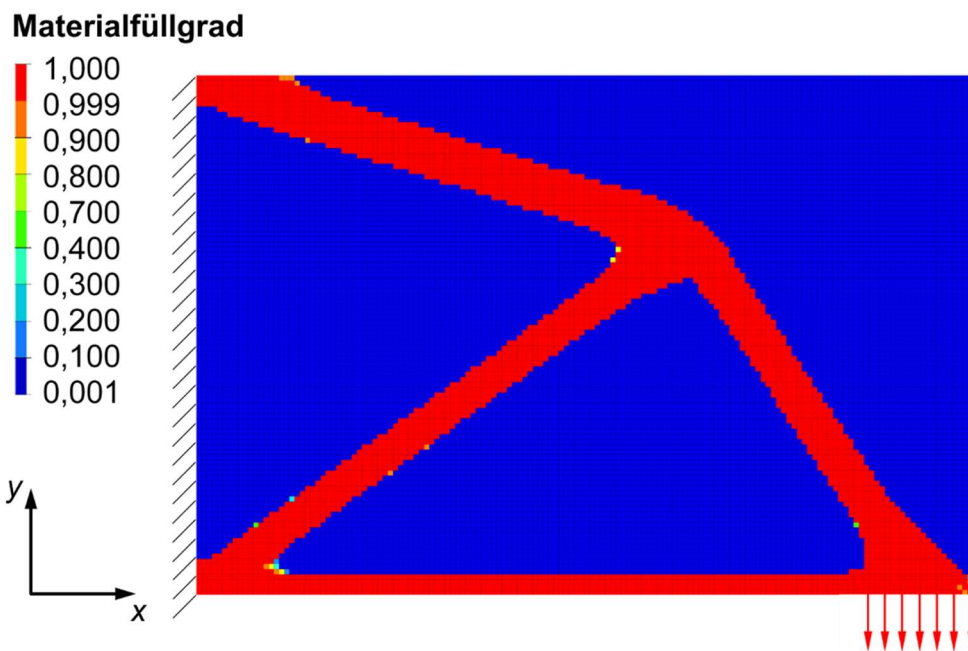
Eine Kontaktanalyse erübrigt sich ebenfalls.

### **Schritt 4: Lastmodell**

Das FE-Modell der Kragsscheibe wird, wie in Tabelle 4.1 aufgeführt, einseitig fest eingespannt. Auf der gegenüberliegenden Seite wird am unteren Eck an der Kante zur Lagerung auf einer Länge von 20 mm eine gleichmäßig verteilte Kraft parallel zur kürzeren Bauteilkante angenommen. Für das vorliegende FE-Netz werden damit 21 Knotenkräfte definiert. Randbedingungen, Koordinatensystem und maßstäbliche Bauraumabmessungen sind in Bild 4.4 dargestellt.

### **Schritt 5: Topologieoptimierung**

Für das Analysemodell mit dem erzeugten Lastmodell wird durch Definition des Optimierungsproblems gemäß Tabelle 4.1 ein Optimierungsmodell für die Topologieoptimierung erstellt. Die Berechnung liefert schließlich nach 80 Iterationen einen zulässigen Entwurf mit einer diskreten Materialverteilung, die eine eindeutige Topologie mit einer scharfen Kontur wiedergibt. Diese besteht, wie Bild 4.5 zeigt, aus zwei zugbeanspruchten und aus zwei druckbeanspruchten Bereichen. Der Zuglastpfad vom Kraftangriffsbereich zum oberen Lagerbereich wird durch einen Druckstab zum unteren Lagerbereich gestützt. Ein weiterer Druckstab führt vom Kraftangriffsbereich zum unteren Lagerbereich. Diese Kombination aus Zug- und Druckstäben ermöglicht es der vorherrschenden Biegung der Kragsscheibe bestmöglich entgegen zu wirken und so mit dem eingeschränkten Volumen die höchste Steifigkeit der Struktur zu erreichen. Wie die Ergebnisse in Bild 4.5 zeigen, gelingt es mit einem Fünftel des Volumens in etwa die Vierfache mittlere Nachgiebigkeit (Zielfunktion) zu erreichen. Neben der stärkeren Verformung der Struktur weist der beste Entwurf in den gefüllten Bereichen eine höhere Beanspruchung mit deutlichen Spannungsüberhöhungen im oberen und unterem Lagerbereich auf. Eine quantitative Beurteilung der Beanspruchung ist aufgrund der verschmierten Werkstoffeigenschaften nicht möglich. Eine Festigkeitsuntersuchung wird im weiteren Verlauf des Optimierungsprozesses durchgeführt.



	<b>Ausgangs- zustand</b>	<b>Startentwurf (Iteration 0)</b>	<b>Bester Entwurf (Iteration 80)</b>	<b>Veränderung (gegenüber Startentwurf / Ausgangszustand)</b>
<b>Zielfunktion</b>	$C = 1,177 \text{ Nm}$	$C = 29,417 \text{ Nm}$	$C = 5,097 \text{ Nm}$	-82,7% / +333,1 %
<b>Restriktion</b>	$V/V_{ges} = 1$	$V/V_{ges} = 0,2$	$V/V_{ges} = 0,2$	0 % / -80 %

Bild 4.5: Materialfüllgrad und weitere Ergebnisse der Topologieoptimierung im Vergleich

### Schritt 6: Schichtmodell

Die Ergebnisse der Topologieoptimierung werden zu einem FE-Modell mit transversal isotropen Materialeigenschaften verarbeitet. Für dieses Einzelschichtmodell sind die Dicke und der Faserwinkel für jedes Element zu ermitteln, wobei Elemente mit sehr kleinem Materialfüllgrad  $\chi_i \leq 0,01$  entfernt werden. Für die anderen Elemente wird die Dicke entsprechend des Materialfüllgrades gemäß Gleichung (4.1) berechnet. Der Faserwinkel wird an den Hauptnormalspannungstrajektorien ausgerichtet, wobei für jedes Element  $i$  mit  $\chi_i > 0,01$  der Winkel laut Gleichung (4.2) bestimmt wird. Für das FE-Modell mit der neuen Topologie können nun elementweise Schichten mit den dazugehörigen Schichtdicken und Schichtwinkeln modelliert werden. Die Berechnung der Schichtdicken und -winkel erfolgt über eine Excel-Tabelle und die Zuordnung im Schalenmodell wird mit einem tcl-Skript durchgeführt.

### Schritt 7: Laminatmodell

Die Elemente des erstellten Schichtmodells werden entsprechend ihres Faserwinkels mittels einer Excel-Tabelle in 5°-abgestufte Bereiche zwischen -90° und 90° eingeordnet, wobei -90° die gleiche Faserrichtung wie 90° darstellt. Die Zuordnung der einzelnen Elemente in

diskrete Zonen wird über ein tcl-Skript im FE-Modell realisiert. Die entstandene Zuordnung ist in Bild 4.6 dargestellt. Darin sind die dominanten Winkelbereiche klar erkennbar. In den Winkelbereichen der Basiswinkel  $-55^\circ$ ,  $-15^\circ$ ,  $0^\circ$  und  $35^\circ$  sind 61,2 % der Elemente enthalten, wobei diese Winkelbereiche auf die vier Stäbe der Struktur verteilt sind. Weitere 18,7 % der Elemente sind in benachbarten Winkelbereichen ( $-20^\circ$ ,  $-60^\circ$ ,  $40^\circ$ ,  $30^\circ$ ) gruppiert. Mit dieser eindeutigen Tendenz werden die Elemente in den Stäben entsprechend den dominierenden Winkeln  $-55^\circ$  (blau),  $-15^\circ$  (grün),  $0^\circ$  (violett),  $35^\circ$  (rot) zugeordnet. Diese vier Regionen der Struktur werden als unidirektionale Einzelschichten (UD-ES) mit den jeweiligen Winkeln realisiert. Die Verbindungsstellen dieser UD-ES werden als Mehrschichtverbunde (MSV) mit den beteiligten Einzelschichten (ES) modelliert, wobei die ES stetig vom ES-Bereich in den MSV-Bereich übergeht. Hierzu sind die Elemente der Verbindungsstellen allen beteiligten ES zuzuordnen. In diesen MSV-Bereichen ergeben sich Überlappungsflächen von  $105 \text{ mm}^2$  für den Kraftangriffsbereich,  $115 \text{ mm}^2$  für den unteren Lagerbereich und  $152 \text{ mm}^2$  für die obere Verbindungsstelle. Die Anbindung der verschiedenen ES könnte damit bei ausreichend hoher Beanspruchung kritisch werden. Abhilfe kann hierbei eine Erhöhung der Klebeflächen durch abwechselnde Staffelung der verschiedenen ES im Laminataufbau schaffen. Eine Festigkeitsuntersuchung erfolgt innerhalb der Parameteroptimierung im nächsten Schritt.

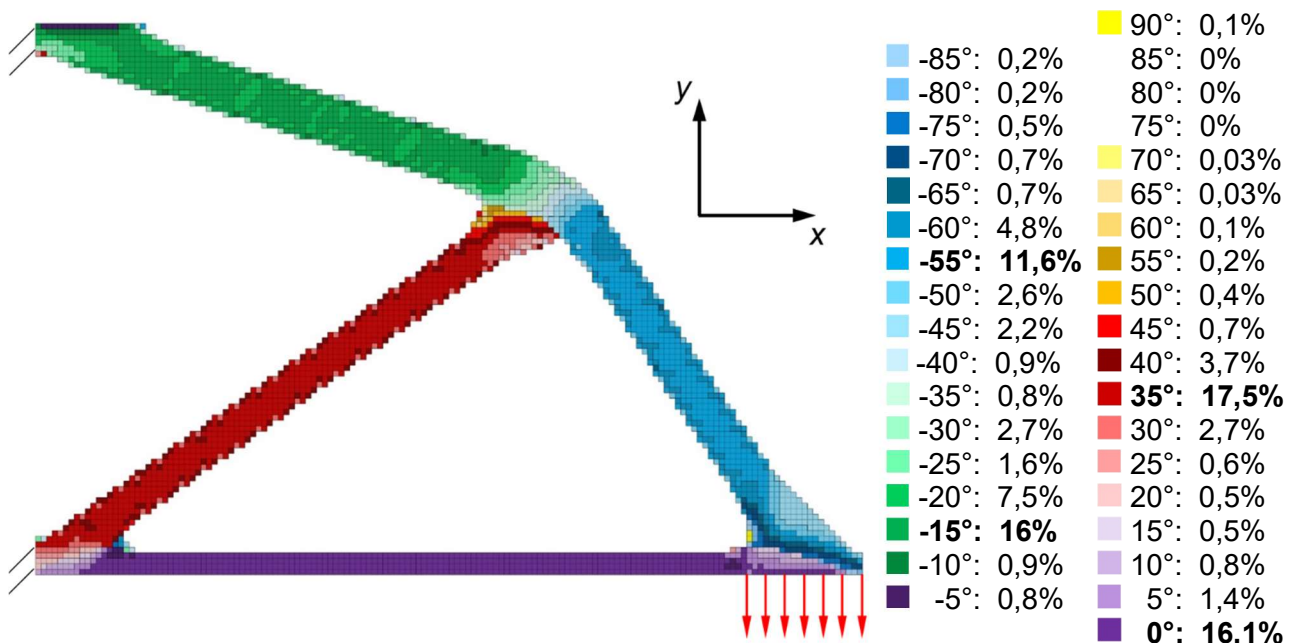


Bild 4.6: Verteilung der Elementzonen und der Anteil an der Gesamtstruktur

Die Einteilung der Elemente in die ES- und MSV-Bereiche ist links in Bild 4.7 veranschaulicht. Das Laminatmodell besteht damit aus 4 Einzelschichten, die sich in 2 zweischichtigen und einem dreischichtigen MSV überlappen. Die Schichtdicken der ES ergeben



sich als Mittelwerte der enthaltenen Elementdicken, was für die MSV-Bereiche dann entsprechend die doppelte bzw. dreifache Dicke bedingt. Um eine Biege-Dehn-Kopplung auszuschließen, wird ein symmetrisches Laminat angestrebt, womit die errechneten Schichtdicken der ES zu halbieren sind.

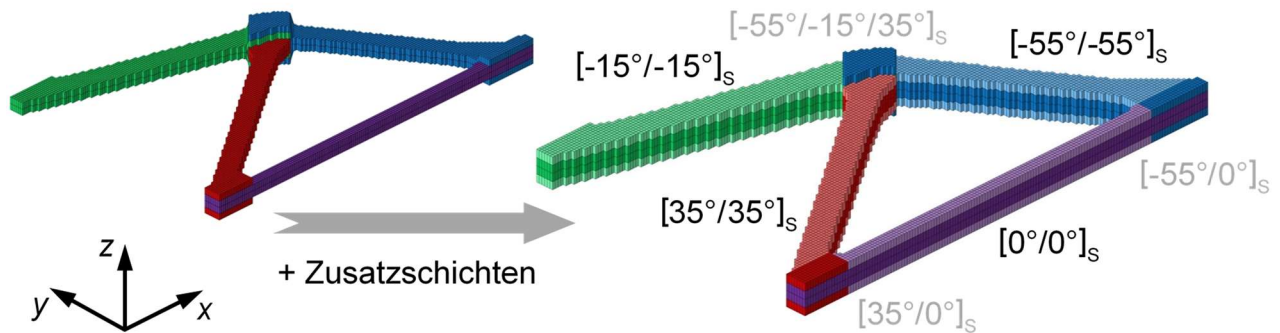


Bild 4.7: Laminatmodell der Kragsscheibe ohne (links) und mit (rechts) Zusatzschichten

Um in der nachfolgenden Optimierung eine Unabhängigkeit der Entwurfsvariablen von MSV und ES zu schaffen, ohne dabei den stetigen Übergang zwischen ES- und MSV-Bereich zu beeinträchtigen (unterschiedliche Schichtdicken in ES und MSV können dazu führen, dass eine Faserlage auf Stoß zu einer anderen Lage liegt), werden in den ES-Bereichen jeweils eine zusätzliche Schicht eingefügt. Für die Dicken und Winkel dieser Zusatzschichten werden die ermittelten Werte der vorhandenen ES gewählt. In den ES-Bereichen ergibt sich damit die doppelte Laminatdicke. Ferner wirken sich Veränderungen an den Zusatzschichten, anders als bei den ES, die Teil der entsprechenden MSV sind, nicht auf die MSV-Bereiche aus. Somit sind mit den eingefügten Zusatzschichten neue Entwurfsvariablen für die anschließende Parameteroptimierung vorhanden.

Die einfachen Anpassungen und Modellierungen bei der Erstellung des Laminatmodells können programmintern durchgeführt werden. Das erzeugte Laminatmodell ist rechts in Bild 4.7 veranschaulicht, wobei die Zusatzschichten mit einer helleren Farbe dargestellt sind. Der Lagenaufbau in den MSV-Bereichen (graue Schrift) setzt sich aus den Schichten der ES-Bereiche zusammen. Die laut Spezifikationsliste vorgegebene Verwendung von UD-Gelegen erlaubt keinen kontinuierlichen Faserverlauf zwischen den Stäben und führt damit zur höheren Beanspruchungen in den MSV-Bereichen (vgl. Schritt 8, Bild 4.9). Wie erwähnt, findet die Festigkeitsbeurteilung im nächsten Schritt statt.

### **Schritt 8: Parameteroptimierung**

Mit dem erstellten Schalenmodell des Laminats wird mit den Vorgaben gemäß Tabelle 4.1 ein Optimierungsmodell für die Parameteroptimierung formuliert. Als Entwurfsvariablen

dienen jeweils 4 Schichtdicken und -winkel für die Grund- und Zusatzschichten, wobei aufgrund der Laminatsymmetrie die Parameter des halben Modells ausreichen. Eine Optimierung mit diesen 16 Entwurfsvariablen liefert nach 17 Iterationen einen zulässigen Entwurf mit diskreten Werten für die Schichtdicken und -winkel. Das optimierte Laminatmodell in Bild 4.8 zeigt mit der Schichtanzahl in den einzelnen Bereichen, dass jeder Lagenaufbau an der Bauraumgrenze von 5 mm liegt.

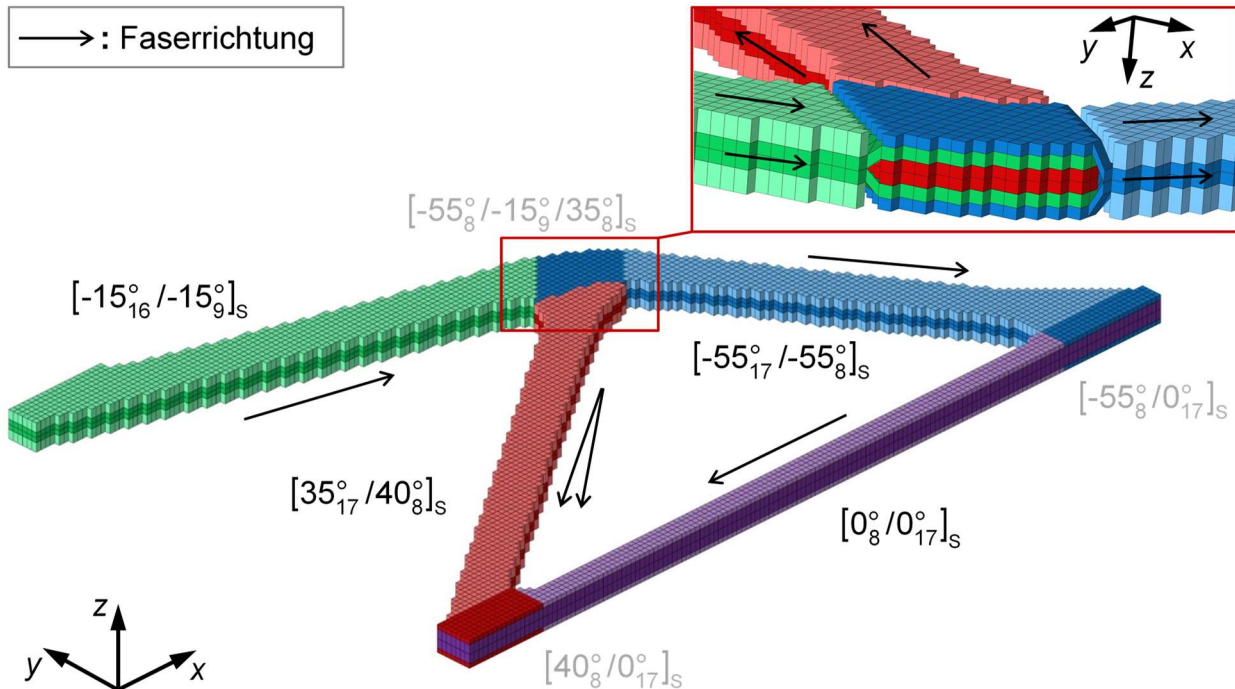


Bild 4.8: Optimierte Laminatmodell der Kragenscheibe

Damit ist auch die Notwendigkeit der eingearbeiteten Zusatzschichten ersichtlich. Bedingt dadurch, dass eine weitere Schichtdickenerhöhung in den Verbindungstellen (graue Schrift) aufgrund der Bauraumgrenze nicht möglich ist, könnte ohne Zusatzschicht in den übrigen Bereichen das verfügbare Material nicht vollständig genutzt werden (näheres in Kapitel 4.3.2). Zudem gewährleisten die Zusatzschichten eine ausreichende Festigkeit, insbesondere im oberen Lagerbereich. Die vollständige Beanspruchung der Kragenscheibe zeigt Bild 4.9, wobei für jedes Element (Bezugsebene ist die Schichtmittelebene) der maximale Bruchfunktionswert aller Schichten und aller Versagensmodi nach PUCK dargestellt ist (vgl. Kapitel 2.1.3). Dabei sind mit den Lagerbereichen und dem Kraftangriffsbereich die höher beanspruchten Stellen zu erkennen. Hierbei sind jedoch noch genügend Reserven vorhanden, bis es zum Versagen kommt. Damit bleibt die Festigkeitsrestriktion inaktiv, während die anderen Restriktionen (Volumen und Gesamtlaminatdicke bzw. Bauraumgrenze) aktiv sind. Der Grund hierfür ist, dass Änderungen der Entwurfsvariablen, die sich positiv auf die

Zielfunktion (mittlere Nachgiebigkeit) auswirken, den Bruchfunktionswert erniedrigen. Trotzdem ist die Festigkeitsrestriktion nicht unnötig, denn diese dient der Berücksichtigung kritischer, höher beanspruchter Stellen und wird zur Findung dieses Entwurfs des Laminatmodells benötigt. Bei mehreren Iterationen wird die Festigkeitsrestriktion verletzt, womit die Suchrichtung des MFD-Optimierungsalgorithmus beeinflusst wird (vgl. Kapitel 2.3.3 und näheres in [Har08] S.55ff). Dieser Einfluss sorgt dafür, dass für dieses diskrete, nicht-konvexe Optimierungsproblem ein leicht besseres Optimum gefunden wird als mit Optimierungen ohne Festigkeitsrestriktion.

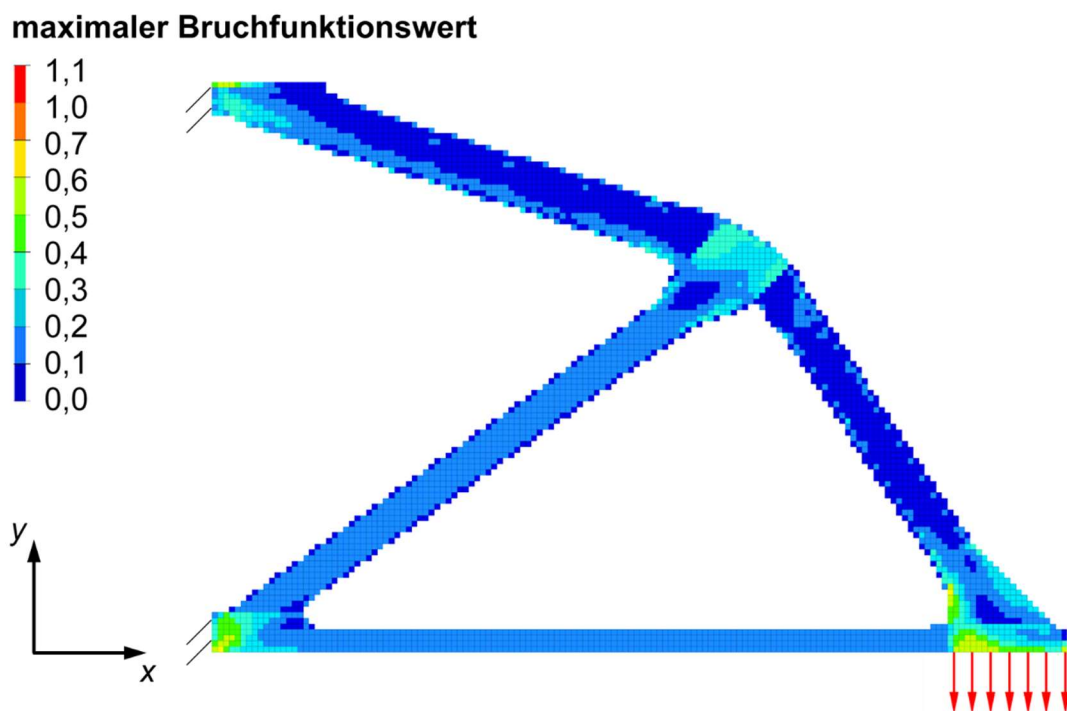


Bild 4.9: Verteilung der Bruchfunktionswerte für die optimierte Kragsscheibe

Die Überprüfung eines interlaminaren Versagens (ohne Berücksichtigung von Laminat-Randeffekten) erfolgt durch Abschätzung, da beim Schalenmodell mit symmetrischem Laminataufbau und Scheibenbelastung die interlaminaren Spannungen verschwinden. Kritische Stellen sind hierbei die MSV-Bereiche mit den unterschiedlichen Faserorientierungen und den relativ kleinen Überlappungsflächen (vgl. Schritt 7). Mit den ermittelten Stabkräften aus der Nachrechnung der Topologiestruktur als Stabtragwerk ergeben sich gemäß [Kle12a] S.300 mittlere Schubspannungen, die mit maximal  $50 \text{ N/mm}^2$  unterhalb der Schichtfestigkeiten und der Schubfestigkeit der Matrix von  $R_{M,\text{Schub}} = 57 \text{ N/mm}^2$  (Epoxidmatrix 8551-7 nach [Kad12]) liegen. Eine Nachrechnung des optimierten Laminatmodells als einfaches Volumenmodell liefert mit maximal  $56,8 \text{ N/mm}^2$  Schichtschubspannungen an der Versagensgrenze. Für eine genauere Untersuchung sind im Volumenmodell insbesondere die Höhenunterschiede bei den Übergängen zwischen ES- und MSV-Bereich feiner

abzubilden und Zwischenschichten für die Matrix zu modellieren. Für die Kragsscheibe als reines Demonstrationsobjekt für das entwickelte LTgSL-Verfahren wird der Aufwand nicht erbracht. Mit den obigen Abschätzungen wird eine ausreichende Verbindungsfestigkeit der Einzelschichten als gegeben angenommen.

Eine Zusammenfassung der Optimierungsergebnisse ist in Tabelle 4.2 aufgeführt.

	<b>Bezeichnung</b>	<b>Startentwurf</b>	<b>Beste Entwurf (Iteration 17)</b>	<b>Veränderung</b>
<b>Entwurfsvariablen</b>	ES-UD0	$t_{UD0} = 2,5 \text{ mm}$ $\alpha_{UD0} = 0^\circ$	$t_{UD0} = 1,7 \text{ mm}$ $\alpha_{UD0} = 0^\circ$	-0,8 mm –
	ES-UD-55	$t_{UD-55} = 2,5 \text{ mm}$ $\alpha_{UD-55} = -55^\circ$	$t_{UD-55} = 0,8 \text{ mm}$ $\alpha_{UD-55} = -55^\circ$	-1,7 mm –
	ES-UD-15	$t_{UD-15} = 2,5 \text{ mm}$ $\alpha_{UD-15} = -15^\circ$	$t_{UD-15} = 0,9 \text{ mm}$ $\alpha_{UD-15} = -15^\circ$	-1,6 mm –
	ES-UD35	$t_{UD35} = 2,5 \text{ mm}$ $\alpha_{UD35} = 35^\circ$	$t_{UD35} = 0,8 \text{ mm}$ $\alpha_{UD35} = 40^\circ$	-1,7 mm +5°
	ES-UD0 <sup>+</sup>	$t_{UD0^+} = 2,5 \text{ mm}$ $\alpha_{UD0^+} = 0^\circ$	$t_{UD0^+} = 0,8 \text{ mm}$ $\alpha_{UD0^+} = 0^\circ$	-1,7 mm –
	ES-UD-55 <sup>+</sup>	$t_{UD-55^+} = 2,5 \text{ mm}$ $\alpha_{UD-55^+} = -55^\circ$	$t_{UD-55^+} = 1,7 \text{ mm}$ $\alpha_{UD-55^+} = -55^\circ$	-0,8 mm –
	ES-UD-15 <sup>+</sup>	$t_{UD-15^+} = 2,5 \text{ mm}$ $\alpha_{UD-15^+} = -15^\circ$	$t_{UD-15^+} = 1,6 \text{ mm}$ $\alpha_{UD-15^+} = -15^\circ$	-0,9 mm –
	ES-UD35 <sup>+</sup>	$t_{UD35^+} = 2,5 \text{ mm}$ $\alpha_{UD35^+} = 35^\circ$	$t_{UD35^+} = 1,7 \text{ mm}$ $\alpha_{UD35^+} = 35^\circ$	-0,8 mm –
<b>Zielfunktion</b>	Mittlere Nachgiebigkeit	$C = 1,120 \text{ Nm}$	$C = 2,306 \text{ Nm}$	+105,9 %
<b>Restriktionen</b>	Volumenanteil	$V/V_{ges} = 0,41$	$V/V_{ges} = 0,2$	-51,2 %
	Bruchfunktionswert nach PUCK <sup>29</sup>	$f_{max} = f_3 = 0,324$ in ES-UD-55 <sup>+</sup>	$f_{max} = f_3 = 0,638$ in ES-UD35	+96,9 %

Tabelle 4.2: Übersicht der Optimierungsergebnisse für die Kragsscheibe

<sup>29</sup> Höchstwert jedes Elements (Bezugsebene ist die Schichtmittelebene) aller Versagensmodi nach PUCK (vgl. Kapitel 2.1.3).  $f_3$  = ZFB Modus A

Neben den Entwurfsvariablen sind die Zielfunktion und die Restriktionen im Vergleich zum Startentwurf der Parameteroptimierung dargestellt. Die Bezeichnung der Entwurfsvariablen enthält den Startwinkel des entsprechenden ES-Bereichs, wobei die Zusatzschichten mit einem + gekennzeichnet sind. Ferner entsprechen die dargestellten Schichtdicken in Tabelle 4.2 dem halben Modell und sind aufgrund der Laminatsymmetrie für ein Gesamtmodell zu verdoppeln. Infolge des erhöhten Startvolumens sind die Veränderungen unter dem Aspekt eines Startentwurfs im unzulässigen Bereich zu betrachten. Zum größten Teil resultiert die Zunahme des Startvolumens aus dem Hinzufügen von Zusatzschichten (vgl. Schritt 7). Zudem wird das Volumen durch die Völlfüllung von teilgefüllten Elementen (vgl. Schritt 6) etwas erhöht. Damit sind innerhalb der Optimierung die Schichtdicken zu verringern, um die notwendige Volumenreduktion zu erreichen, wodurch es zur höheren Beanspruchung und zum Verlust der Steifigkeit kommt. Bis auf eine kleine Anpassung im ES-UD35 Bereich sind Veränderungen des Schichtwinkels gegenüber dem, aus dem Optimum der vorangegangenen Topologieoptimierung, ermittelten Startentwurf nicht nötig. Wegen der Bauraumgrenze fallen die Schichtdicken (ES-UD-55, ES-UD-15, ES-UD35) im dreischichtigen MSV in der oberen Verbindungsstelle gering aus. Die entsprechenden Zusatzschichten werden dadurch dicker ausgeprägt. Des Weiteren geht aus Tabelle 4.2 hervor, dass eine aktive Volumenrestriktion bei voller Bauraumfüllung in allen Bereichen erreicht wird. Der beste Entwurf liegt dabei jedoch nicht exakt auf der Restriktionsgrenze, sondern besitzt ein Mehrvolumen von  $20 \text{ mm}^3$ , was bei dem verwendeten FE-Netz 4 Elementen entspricht. Diese Abweichung liegt unterhalb der festgelegten Toleranz und ist somit zulässig (vgl. Anhang C). Eine weitere Bewertung der Ergebnisse erfolgt in Kapitel 4.3.2.

## 4.3 Diskussion des LTgSL-Verfahrens

### 4.3.1 Zusammenfassung und Diskussion der Einzelschritte

Das in Kapitel 4.1 vorgestellte LTgSL-Verfahren und dessen Anwendung bei der Optimierung einer Kragsscheibe in Kapitel 4.2 zeigen, dass mit dieser Optimierungsstrategie ein plausibles und nachvollziehbares Ergebnis erzielt wird. Die Aufteilung in zwei separate Optimierungen erweist sich hierbei als hilfreich, um der Laminatoptimierung einen guten Startentwurf zu liefern. Die Optima von Schichtdicken- und Schichtwinkeloptimierungen sind insbesondere bei vielen diskreten Entwurfsvariablen stark vom Startentwurf abhängig. Zudem führen diese Parameteroptimierungen kaum zu Topologieveränderungen, was aber für einen generellen Bauraum wünschenswert wäre. Mit der vorgeschalteten Topologieoptimierung kann beiden Problemen entgegengewirkt werden.

Für die **Topologieoptimierung** selbst wird mit der Nutzung eines isotropen Werkstoffverhaltens ein generalisierter Startentwurf verwendet. Die Vorteile hiervon sind zum einen

die Vermeidung einer Startentwurfsuche bei unbekanntem Ziellaminat, zum anderen eine diskrete Materialverteilung mit schärferer Kontur als mit orthotropem Werkstoff, wie in Bild 4.10 am Beispiel der Kragsscheibe zu sehen ist. Als Vergleichswerkstoff dient dabei ein quasiisotropes Laminat  $[0^\circ/45^\circ/-45^\circ/90^\circ]_s$  mit den Werkstoffkennwerten gemäß Tabelle 3.1, wobei für die isotropen Kennwerte die globalen Steifigkeiten dieses Laminats verwendet werden. Bei der Topologieoptimierung eines Mehrschichtverbunds erhält jede Schicht eines Elements maximal eine Materialfüllung, die dem Anteil der Schicht an der Gesamtdicke entspricht. Für die obigen 8 Schicht des quasiisotropen Laminats ergibt sich demnach ein Materialfüllgrad von maximal 0,125 pro Schicht bzw. aufgrund der Symmetrie 0,25 pro Schichtorientierung. Damit wird ein Element nur vollgefüllt sein, wenn alle Schichten dieses Elements zur Zielerfüllung benötigt werden. Diese Aufteilung ist in Bild 4.10 mit einem Gesamtmaterialfüllgrad von 0,251 an den Kanten der inneren Dreiecksausparung, die vorzugsweise jeweils nur durch  $0^\circ$ -,  $45^\circ$ - oder  $-45^\circ$ -Schichten realisiert werden, zu erkennen. Um diese nur teilgefüllte Bereiche bestmöglich zu versteifen wird die Breite genutzt. Bei einem isotropen Werkstoff besteht diese Problematik nicht, da der komplette Materialfüllgrad genutzt werden kann.

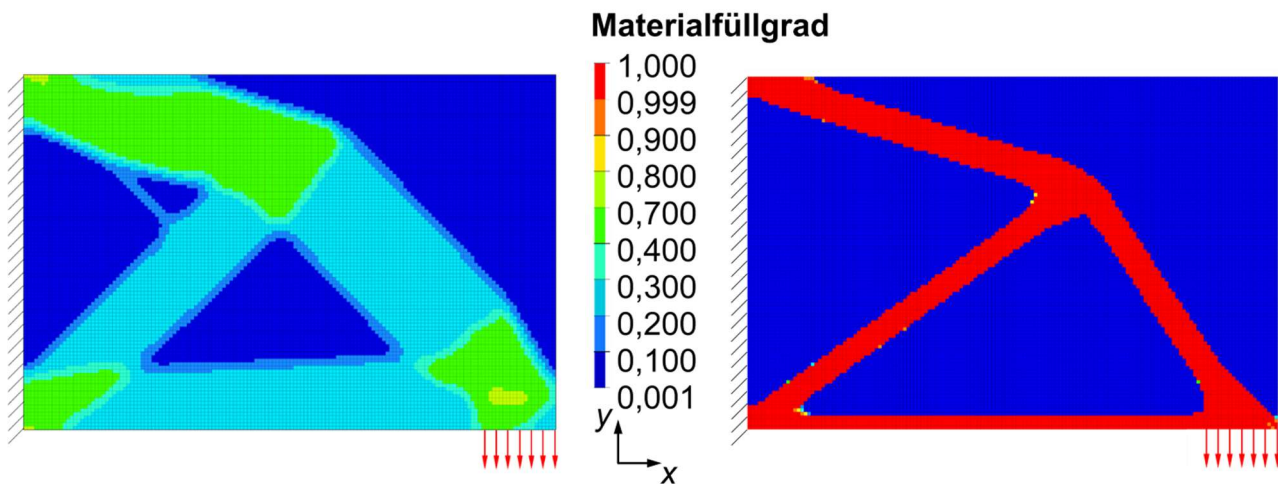


Bild 4.10: Topologieoptimierung mit orthotropem (links) und isotropem (rechts) Werkstoff

Die Verwendung eines anderen Materials (fiktiv, konstruiert oder vorgegeben) als Startentwurf für die Topologieoptimierung ist natürlich ebenso möglich.

Das verwendete **Lastmodell** ist für dieses akademische Beispiel einer Kragsscheibe vollkommen ausreichend. Mit der Kenntnis der möglichen wahren Lastsituation eines realen Bauteils ist der Abstraktionsgrad sicherlich zu überdenken.

Das **Schichtmodell** beinhaltet die Dicke und Orientierung für jedes Element und kann so zur anderweitigen Verarbeitung genutzt werden. Denkbar wäre hier eine elementweise Parameteroptimierung, um eine faserverstärkte Struktur mit anderen Fertigungsverfahren zu realisieren. Um jedoch geschichtete, ebene Laminat aus unidirektionalen Schichten zu

erhalten, werden die Informationen des Schichtmodells in einem **Laminatmodell** verarbeitet. Dieser Modellierungsschritt bietet dem Anwender, abgesehen von den Vorgaben der Spezifikationsliste, individuelle Möglichkeiten zur Laminatdefinition: Für die Kragsscheibe in Kapitel 4.2 werden Zusatzschichten eingesetzt und ein symmetrischer Laminataufbau wird gewählt. Mit der abschließenden **Parameteroptimierung** kann durch diskrete Variation von Schichtdicken und -winkeln der optimale Entwurf unter Berücksichtigung fertigungstechnischer Aspekte ermittelt werden. Für die Herstellung der realen Struktur sind für die etwa 4 mm bis 8 mm breiten Stäbe schmale UD-Tapes denkbar.

### 4.3.2 Vergleichsmodelle zur Bewertung der Ergebnisse

Die Güte des in Kapitel 4.2 ermittelten optimalen Entwurfs wird im Weiteren anhand von Referenzrechnungen bewertet. Dabei werden einfache Strukturanalysen und Optimierungen mit verschiedenen Bauraumfüllungen, Startentwürfen und Laminatmodellen betrachtet. Die Vergleichsmodelle sind im Detail in Tabelle 4.3 und die Ergebnisse hierzu in Tabelle 4.4 aufgeführt, wobei die Abweichungen gegenüber dem optimalen Entwurf aus Kapitel 4.2 (vgl. Tabelle 4.2) in Klammern abgebildet sind.

Modellbezeichnung	Art der Rechnung	Bauraumfüllung	Laminat
<i>FEA_UD0_T5</i>	Strukturanalyse	100 % ( $t_{\text{ges}} = 5 \text{ mm}$ )	[0°]
<i>FEA_UD90_T5</i>		100 % ( $t_{\text{ges}} = 5 \text{ mm}$ )	[90°]
<i>FEA_UD±45_T5</i>		100 % ( $t_{\text{ges}} = 5 \text{ mm}$ )	[45°/-45°/45°/-45°] <sub>s</sub>
<i>FEA_qIso_T1</i>		20 % ( $t_{\text{ges}} = 1 \text{ mm}$ )	[0°/45°/-45°/90°] <sub>s</sub>
<i>Topo_qIso</i>	Topologieoptimierung (vgl. Tabelle 4.1)	100 % ( $t_{\text{ges}} = 5 \text{ mm}$ )	[0°/45°/-45°/90°] <sub>s</sub>
<i>Opt_MSV_oES_t2,5</i>	Dicken- und Winkel- optimierung (vgl. Tabelle 4.1)	gemäß Bild 4.7 (ohne Zusatzschichten) $t_{k,\text{start}} = 2,5 \text{ mm}$	
<i>Opt_MSV_+ES_t1,2</i>		gemäß Bild 4.7 (mit Zusatzschichten) $t_{k,\text{start}} = 1,2 \text{ mm}$	

Tabelle 4.3: Vergleichsmodelle der Kragsscheibe

Die Ergebnisse zeigen teils recht unterschiedliche Steifigkeiten sowie Beanspruchungen, die zuweilen über die Festigkeitsgrenzen hinausgehen (rot hervorgehoben). Ein besseres Ergebnis als mit dem LTgSL-Verfahren kann dabei nicht erreicht werden. Kein zulässiger Entwurf liefert einen niedrigeren Zielfunktionswert als den in Tabelle 4.2. Diese Untersuchungen bestätigen zu einem die Güte und Plausibilität des, mit dem LTgSL-Verfahren

ermittelten, optimalen Entwurfs und zeigen zum anderen, dass die getroffenen Anpassungen innerhalb der Modellierungsschritte (vgl. Kapitel 4.2) sinnvoll sind.

Modell	Mittlere Nachgiebigkeit	Volumenanteil	Bruchfunktionswert nach PUCK <sup>30</sup>
<i>Optimaler Entwurf aus Kap.4.2</i>	$C = 2,306 \text{ Nm}$	$V/V_{\text{ges}} = 0,2$	$f_{\text{max}} = f_3 = 0,638$
<i>FEA_UD0_T5</i>	$C = 7,119 \text{ Nm}$ (+208,7 %)	$V/V_{\text{ges}} = 1$ (+400 %)	$f_{\text{max}} = f_3 = 1,972$ (+209,1 %)
<i>FEA_UD90_T5</i>	$C = 2,224 \text{ Nm}$ (-3,56 %)	$V/V_{\text{ges}} = 1$ (+400 %)	$f_{\text{max}} = f_3 = 1,333$ (+108,9 %)
<i>FEA_UD±45_T5</i>	$C = 2,649 \text{ Nm}$ (+14,87 %)	$V/V_{\text{ges}} = 1$ (+400 %)	$f_{\text{max}} = f_3 = 0,976$ (+52,98 %)
<i>FEA_qIso_T1</i>	$C = 5,883 \text{ Nm}$ (+155,1 %)	$V/V_{\text{ges}} = 0,2$ (-)	$f_{\text{max}} = f_3 = 1,671$ (+161,9 %)
<i>Topo_qIso</i> <i>Ausgangszustand</i>	$C = 1,177 \text{ Nm}$ (-48,96 %)	$V/V_{\text{ges}} = 1$ (+400 %)	$f_{\text{max}} = f_3 = 0,334$ (-47,65 %)
<i>Bester Entwurf</i>	$C = 2,824 \text{ Nm}$ (+22,46 %)	$V/V_{\text{ges}} = 0,2$ (-)	$f_{\text{max}} = f_3 = 1,450$ <sup>31</sup> (+127,3 %)
<i>Opt_MSV_oES_t2,5</i> <i>Startentwurf</i>	$C = 2,032 \text{ Nm}$ (-11,88 %)	$V/V_{\text{ges}} = 0,23$ (+15 %)	$f_{\text{max}} = f_3 = 0,531$ (-16,77 %)
<i>Bester Entwurf</i> <i>(nicht zulässig)</i>	$C = 5,213 \text{ Nm}$ (+126,1 %)	$V/V_{\text{ges}} = 0,104$ (-48 %)	$f_{\text{max}} = f_3 = 1,194$ (+87,15 %)
<i>Opt_MSV_+ES_t1,2</i> <i>Startentwurf</i>	$C = 2,334 \text{ Nm}$ (+1,21 %)	$V/V_{\text{ges}} = 0,197$ (-1,5 %)	$f_{\text{max}} = f_3 = 0,676$ (+5,96 %)
<i>Bester Entwurf</i>	$C = 2,381 \text{ Nm}$ (+3,25 %)	$V/V_{\text{ges}} = 0,192$ (-4 %)	$f_{\text{max}} = f_3 = 0,777$ (+21,79 %)

Tabelle 4.4: Ergebnisse der Vergleichsrechnungen an den Kragsscheibenmodellen

#### **FEA\_UD0\_T5, FEA\_UD90\_T5, FEA\_UD±45\_T5:**

Unter den drei gängigen Laminaten weist bei vollem Bauraum nur ein Laminat (*FEA\_UD±45\_T5*) kein Versagen auf. Im Vergleich zum optimalen Entwurf fallen Anstrengung und mittlere Nachgiebigkeit höher aus. Lediglich das 90°-Laminat kann mit einem unzulässigen Entwurf einen etwas besseren Zielfunktionswert liefern.

<sup>30</sup> Höchstwert jedes Elements (Bezugsebene ist die Schichtmittelebene) aller Versagensmodi nach PUCK (vgl. Kapitel 2.1.3).  $f_3$  = ZFB Modus A

<sup>31</sup> Ermittelt durch Strukturanalyse des besten Entwurfs



***FEA\_qIso\_T1, Topo\_qIso:***

Ein quasiisotropes Laminat erreicht bei vollem Bauraum (*Topo\_qIso Ausgangszustand*) im Vergleich zum optimalen Entwurf (LTgSL) eine deutlich reduzierte mittlere Nachgiebigkeit und Anstrengung. Bei aktiver Volumenrestriktion, sei es nach der Optimierung (*Topo\_qIso Bester Entwurf*) oder durch Herabsetzen der Bauraumdicke (*FEA\_qIso\_T1*), kommt es jedoch zum Versagen. Mit der Topologieoptimierung wird hierbei gegenüber dem Modell mit verringerter Dicke (*FEA\_qIso\_T1*) die mittlere Nachgiebigkeit mehr als halbiert. Die Topologieoptimierung enthält keine Festigkeitsrestriktion (vgl. Kapitel 2.3.1), weshalb der Bruchfunktionswert in einer Nachrechnung des besten Entwurfs ermittelt wird.

***Opt\_MSv\_oES\_t2,5, Opt\_MSv\_+ES\_t1,2:***

Die Parameteroptimierung (*Opt\_MSv\_oES\_t2,5*) des Laminatmodells mit den berechneten Startwerten für Schichtdicke und -winkel (vgl. Kapitel 4.2 Schritt 7) aber ohne Zusatzschichten zeigt deutlich den Einfluss der Zusatzschichten. Aufgrund der erreichten Bauraumgrenze in den Verbindungsstellen kann die Dicke auch in den Stäben nicht erhöht werden. Das verfügbare Volumen wird lediglich nur zur Hälfte genutzt und es kommt zum Versagen (*Opt\_MSv\_oES\_t2,5 Bester Entwurf*). Im Vergleich zum optimalen Entwurf (LTgSL) in Kapitel 4.2 fällt auch die mittlere Nachgiebigkeit deutlich höher aus. Der Startentwurf dieser Optimierung (*Opt\_MSv\_oES\_t2,5 Startentwurf*) kann mit einer leicht verletzten Volumenrestriktion einen besseren Zielfunktionswert und eine ausreichende Festigkeit liefern. In den darauffolgenden Iterationsschritten kommt es fortlaufend zu unzulässigen Entwürfen aufgrund von Festigkeitsrestriktionsverletzungen.

Die Parameteroptimierungen mit verschiedenen Startwerten (Anfangsschichtdicken  $t_{k,start}$ ) für das in Kapitel 4.2 verwendete Laminatmodell kommen auf unterschiedliche Optima des nichtkonvexen Optimierungsproblems (vgl. Kapitel 2.3). Zudem liegen die Startentwürfe vorwiegend im unzulässigen Bereich, da entweder Bauraumgrenzen, Volumen- oder Festigkeitsrestriktion verletzt sind. Die Ermittlung eines Startentwurfs im zulässigen Bereich erfordert ausgiebige Voruntersuchungen, wobei die mit diesen Startentwürfen durchgeführten Optimierungen keine wesentlichen Unterschiede für das Optimum ergeben. Für die stellvertretende Betrachtung der Parameteroptimierungen mit verschiedenen Startwerten wird die Optimierung (*Opt\_MSv\_+ES\_t1,2*) mit dem Startentwurf  $t_{k,start} = 1,2$  mm verwendet. Dieser Startentwurf erfüllt zwar die Volumen- und Festigkeitsrestriktion, überschreitet aber die Bauraumgrenze (2,5 mm beim halben Laminat) mit dem dreischichtigen MSV in der oberen Verbindungsstelle. Deshalb werden innerhalb der Optimierung Schichtdicken reduziert und damit die Nachgiebigkeit erhöht. Die Entwurfsvariablen des besten Entwurfs zeigen im Vergleich zum optimalen Entwurf (LTgSL) aus Tabelle 4.2 folgende Abweichungen:

$$\Delta t_{UD-55} = \Delta t_{UD35} = \Delta t_{UD0^+} = -0,1 \text{ mm} \quad , \quad \Delta t_{UD15^+} = -0,2 \text{ mm} \quad , \quad \Delta t_{UD15} = 0,1 \text{ mm}$$

und  $\Delta\alpha_{UD-15} = -5^\circ$  .

Die erreichten Schichtdicken zeigen, dass in den vier Stäben jeweils eine Schicht fehlt, um die Bauraumgesamtdicke von  $t_{ges} = 5$  mm zu erreichen. Somit ist die Volumenrestriktion (*Opt\_MSV\_+ES\_t1,2 Bester Entwurf*) nicht aktiv und ungenutztes Verbesserungspotenzial vorhanden. Optimierungen mit anderen Startwerten weisen die gleiche Problematik auf. Einzig beim optimalen Entwurf (LTgSL) in Kapitel 4.2 hat der MFD-Optimierungsalgorithmus diese Schichten hinzugefügt und damit die Volumenrestriktion fast genau erreicht. Grundsätzlich ist dies bei diskreten Dickenoptimierungen nicht die Regel, da wie hier diskrete Schichtdicken nur bestimmte Volumina ermöglichen können. Mit der übernommenen Topologiestruktur ist in diesem Fall jedoch der passende Bauraum vorhanden, der mit der Gesamtdicke nahezu voll gefüllt wird. Warum andere Startentwürfe das Optimum aus Tabelle 4.2 nicht erreichen geht aus zahlreichen Voruntersuchungen mit unterschiedlichsten Parametern bzw. Einstellungen (vgl. Anhang C) und Optimierungsalgorithmen (vgl. Kapitel 2.3.3) nicht hervor. Als Erkenntnis daraus lässt sich festhalten, dass die kontinuierlichen Optimierungsalgorithmen in OptiStruct Schwierigkeiten haben mit den wenigen diskreten Entwurfsvariablen und den strikten Restriktionen eine reguläre Konvergenz bei niedriger Konvergenzbedingung von 0,1 % herbeizuführen. Bei diesen Voruntersuchungen kommt es bei allen Optimierungen zur weichen Konvergenz (vgl. Kapitel 2.3.3). Damit werden die Verbesserungsmöglichkeiten für einen guten Entwurf vom Algorithmus nicht erkannt. Die Abweichungen zwischen den hierbei gefundenen Optima sind minimal und liegen im Bereich des exemplarisch aufgeführten Beispiels (*Opt\_MSV\_+ES\_t1,2 Bester Entwurf*). Im Vergleich zum optimalen Entwurf (LTgSL) aus Kapitel 4.2 ist die Diskrepanz der Zielfunktionswerte stets unter 5 %.

### 4.3.3 Dreiphasige Laminatoptimierung der Kragsscheibe mit OptiStruct

Zur weiteren Bewertung der Optimierungsstrategie – LTgSL-Verfahren – wird der in HyperWorks umgesetzte dreiphasige Laminatoptimierungsprozess (vgl. [Alt18b] S.135ff) als Vergleich herangezogen. Der in Kapitel 2.3.2 beschriebene Ablauf liefert mit einer reinen Elementdickenoptimierung (Phase 1 – Free Size), einer Schichtdickenoptimierung (Phase 2 – Size) sowie anschließender Optimierung der Lagenanordnung (Phase 3 – Shuffle) einen verbesserten Laminatvorschlag. Das Optimierungsproblem bleibt dabei, wie in Tabelle 4.1 definiert, unverändert. Zu Beginn ist jedoch ein passender Startentwurf zu wählen.

#### Auswahl des Startentwurfs

Da in der dreiphasigen Laminatoptimierung keine Winkeloptimierung vorgesehen ist, muss der Startentwurf alle vorgesehenen Schichtwinkel enthalten. Für eine **Schrittweite von 5°**,

wie sie in Kapitel 4.2 verwendet wird, sind damit 36 Schichten notwendig. In der **ersten Optimierungsphase (Free Size)** sind damit 36 Entwurfsvariablen pro Element vorhanden. Bei einem symmetrischen Laminataufbau liegen die Schichtdicken im hundertstel Bereich, um die Volumenrestriktion zu erfüllen. Bei ebenfalls vorliegender Festigkeitsrestriktion kann der Optimierungsalgorithmus keine Lösung in einer angemessenen Rechenzeit (ca. 2500-mal höher als bei der Topologieoptimierung in Kapitel 4.2) liefern. Für eine **Winkelschrittweite von 15°** und damit 12 Schichten kann ebenso kein zulässiger Entwurf erreicht werden. Der lineare Zusammenhang zwischen dem Materialfüllgrad, der hier von der Schichtdicke gesteuert wird, und der Elementsteifigkeit macht es dem Optimierungsalgorithmus schwer, viel Material zu entfernen und in versagensgefährdete Bereiche umzulagern. Volumen- und Festigkeitsrestriktion können nicht eingehalten werden. Auch bei einer weiteren Erhöhung der **Winkelschrittweite auf 45°**, womit das quasiisotrope Laminat  $[0^\circ/45^\circ/-45^\circ/90^\circ]_s$  den Startentwurf bildet, wird kein zulässiges Optimum gefunden. Ein Entwurf mit der Mindestdicke für alle Schichten füllt bereits 16 % des Bauraumvolumens. Erst der Verzicht auf den symmetrischen Laminataufbau, also ein  $[0^\circ/45^\circ/-45^\circ/90^\circ]$ -Laminat, sorgt für mehr Spielraum hinsichtlich der Volumenrestriktion. Jedoch führt dieses **nicht symmetrische Laminat** zur Biege-Dehn-Kopplung mit starken Deformationen in Dickenrichtung, was hinsichtlich der Festigkeit problematisch ist. Mit dem verfügbaren Volumen kann ein Versagen im Optimierungsprozess nicht vermieden werden. Immerhin kann, wie empfohlen, die Biege-Dehn-Kopplung im Modell ignoriert werden, was zu einem zulässigen, optimalen Entwurf führt. Bei den Schrittweiten von 5° und 15° können auch mit diesen Maßnahmen keine Ergebnisse erzielt werden.

Die Bilanz dieser Voruntersuchungen ist, dass die **dreiphasige Laminatoptimierung** für das vorliegende Optimierungsproblem gemäß Tabelle 4.1 **mit einem Startlaminat  $[0^\circ/45^\circ/-45^\circ/90^\circ]$  mit unterdrückter Biege-Dehn-Kopplung (SMEAR)** durchgeführt wird. Der Einfluss dieser Idealisierung auf das Verformungsverhalten und somit auch auf den Spannungszustand und die Optimierung ist in Tabelle 4.5 dargestellt, wobei das Modell mit SMEAR als Referenz dient. Bei Berücksichtigung der Biege-Dehn-Kopplung (ohne SMEAR) sind die maximalen Verschiebungen beim Ausgangszustand wie auch beim besten Entwurf um ein Vielfaches größer. Dies führt wiederum in der ersten Optimierungsphase (Free Size) zu starken Festigkeitsrestriktionsverletzungen und so zur Beeinflussung der Materialverteilung. Die daran angepasste Materialverteilung ist in den Bildern in Tabelle 4.5 sowie an der mittleren Nachgiebigkeit, der Zielfunktion der Optimierung, erkennbar. Die anfängliche Abweichung von ca. 20 % kann mit einer großflächigeren Materialverteilung auf etwa 6,6 % reduziert werden. Die hohen Verformungen treten dabei jeweils an der oberen rechten Ecke auf. Mit SMEAR sind in diesem unbeanspruchten Bereich die Verschiebung auch erhöht, jedoch liegen die größten Verschiebungen im Kräfteingriffsbereich.

	<b>Elementdickenoptimierung von [0°/45°/-45°/90°]</b>			
	<b>mit unterdrückter Biege-Dehn-Kopplung</b>		<b>mit berücksichtigter Biege-Dehn-Kopplung</b>	
	Mittlere Nachgiebigkeit	Maximale Verschiebung	Mittlere Nachgiebigkeit	Maximale Verschiebung
<i>Ausgangszustand</i> $V/V_{ges} = 1$	$C = 1,177 \text{ Nm}$	$ \vec{v}  = 0,421 \text{ mm}$	$C = 1,415 \text{ Nm}$ (+20,2 %)	$ \vec{v}  = 1,772 \text{ mm}$ (+321 %)
<i>Startentwurf</i> $V/V_{ges} = 0,2$	$C = 5,883 \text{ Nm}$	$ \vec{v}  = 2,104 \text{ mm}$	$C = 6,978 \text{ Nm}$ (+18,6 %)	$ \vec{v}  = 41,28 \text{ mm}$ (+1862 %)
<i>Bester Entwurf</i> $V/V_{ges} = 0,2$	$C = 2,245 \text{ Nm}$	$ \vec{v}  = 0,771 \text{ mm}$	$C = 2,394 \text{ Nm}$ (+6,64 %)	$ \vec{v}  = 21,35 \text{ mm}$ (+2669 %)
<i>Materialverteilung</i>				

Tabelle 4.5: Einfluss der Biege-Dehn-Kopplung auf die Strukturantwort und das Optimierungsergebnis

**Optimierung und Ergebnisse**

Die **Elementdickenoptimierung (1. Free Size)** benötigt mit 37 Iterationen in etwa 5-mal länger als die Topologieoptimierung in Kapitel 4.2, um ein Optimum zu finden. Die hierbei ermittelten Elementdicken sind mit den Anteilen je Schicht in Bild 4.11 dargestellt. Dabei ist eine ähnliche Materialverteilung wie in Bild 4.10 festzustellen, wobei das innere Dreieck mit niedrigem Materialanteil etwas aufgeweitet und mit einer Verbindung durchzogen ist. Zudem sind der Kraftangriffsbereich und der obere Lagerungsbereich größer ausgeprägt. Zur weiteren Verwendung werden automatisch (vgl. Anhang C) entsprechend der Elementdickenverteilung je Schicht jeweils zwei neue 0°- und -45°-Schichten sowie eine neue 45°- und 90°-Schicht generiert, wobei Elemente mit Dicken unter 5 % der Gesamtdicke (dunkelblaue Bereiche 0,01 mm bis 0,25 mm) ignoriert werden. Zudem werden die sehr kleinen Materialansammlungen bei der 45°- und 90°-Schicht manuell entfernt. Mit den nun 6 neuen Schichten wird anschließend eine **diskrete Schichtdickenoptimierung (2. Size)** mit weiterhin unterdrückter Biege-Dehn-Kopplung (SMEAR) durchgeführt.

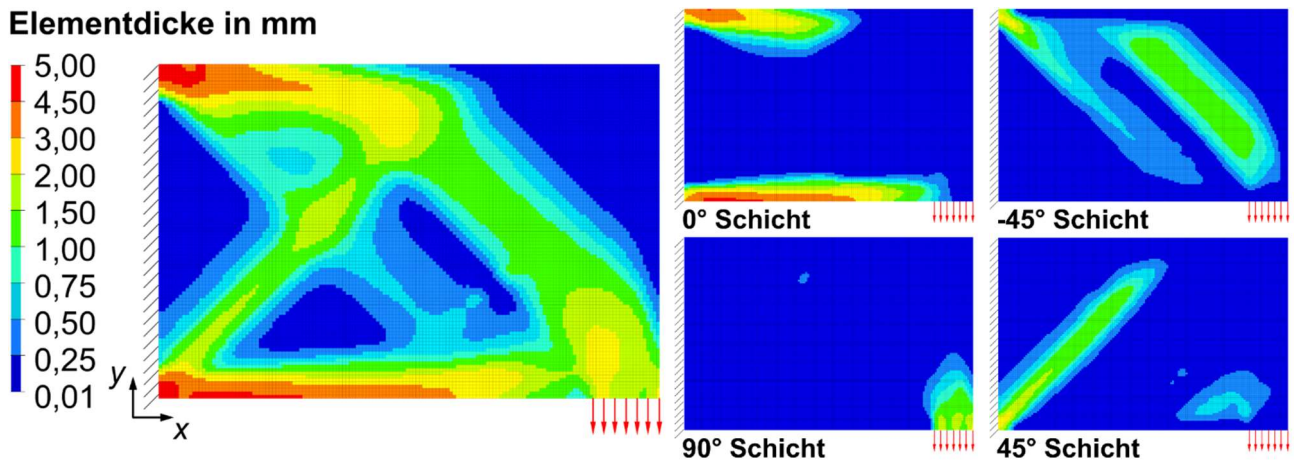


Bild 4.11: Optimale Elementdickenverteilung insgesamt (links) und Anteil je Schicht (rechts)

Nach kurzer Rechenzeit (7 Iterationen) liegt eine verbesserte Schichtdickenverteilung vor, die automatisch (vgl. Anhang C) für die abschließende **Optimierung der Lagenanordnung (3. Shuffle)** in 0,1 mm dicke Schichten aufgeteilt wird. Mit wiederum berücksichtigter Biege-Dehn-Kopplung (ohne SMEAR) wird nach 2 Iterationen ein optimaler Lagenaufbau ermittelt, der in erster Linie die auftretende Verformung in Dickenrichtung reduziert. Beim endgültigen Entwurf in Bild 4.12 sind nochmals die Schichten und ihre Lage zu erkennen. Die transparente Darstellung erlaubt ebenso eine Einsicht in die Überlappungsbereiche der Schichten, wobei ein repräsentativer Bereich vergrößert abgebildet ist. Eine abwechselnde Staffelung der Einzelschichten ist auch in den übrigen Überlappungsbereichen vorzufinden.

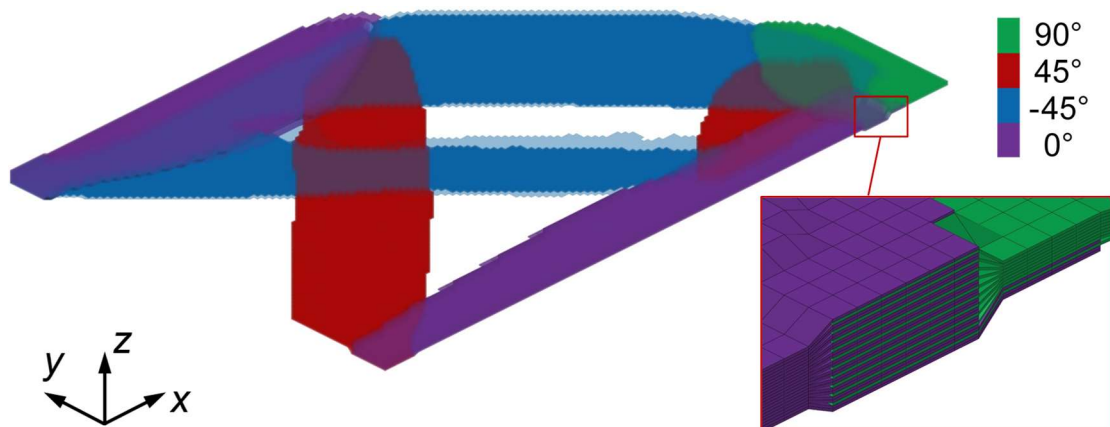


Bild 4.12: Endgültiger Entwurf des dreiphasigen Laminatoptimierungsprozesses

Das Ergebnis der dreiphasigen Laminatoptimierung weist bei gleichem Volumen eine andere Topologie zu der in Kapitel 4.2 auf. Da die Winkel innerhalb der Optimierungen nicht angepasst werden, sind seitens Steifigkeit und Festigkeit jedoch Abschlüsse hinzunehmen. Insbesondere an den Schichtgrenzen in den Überlappungsbereichen sind hohe Bruch-

funktionswerte festzustellen. Eine Übersicht der Ergebnisse hierzu ist in Tabelle 4.6 aufgeführt, wobei die Abweichungen gegenüber dem optimalen Entwurf (LTgSL) aus Tabelle 4.2 in Klammern abgebildet sind. Für den direkten Vergleich ist jedoch zu beachten, dass die Nachgiebigkeitswerte der ersten beiden Optimierungen unter dem Aspekt einer vernachlässigten Biege-Dehn-Kopplung (SMEAR) zu betrachten sind.

Optimierung	Mittlere Nachgiebigkeit	Volumenanteil	Bruchfunktionswert nach PUCK <sup>32</sup>
<i>LTgSL-Verfahren</i>	$C = 2,306 \text{ Nm}$	$V/V_{\text{ges}} = 0,2$	$f_{\text{max}} = f_3 = 0,638$
SMEAR Elementdicken	<i>Startentwurf</i> $C = 5,883 \text{ Nm}$ (+155,12 %)	$V/V_{\text{ges}} = 0,2$ (0 %)	$f_{\text{max}} = f_2 = 1,601$ (+150,94 %)
	<i>Bester Entwurf</i> $C = 2,245 \text{ Nm}$ (-2,65 %)	$V/V_{\text{ges}} = 0,2$ (0 %)	$f_{\text{max}} = f_3 = 0,524$ (-17,87 %)
SMEAR Disk. Schichtdicken	<i>Startentwurf</i> $C = 1,032 \text{ Nm}$ (-55,25 %)	$V/V_{\text{ges}} = 0,509$ (+155 %)	$f_{\text{max}} = f_3 = 0,443$ (-30,56 %)
	<i>Bester Entwurf</i> $C = 2,618 \text{ Nm}$ (+13,53 %)	$V/V_{\text{ges}} = 0,2$ (0 %)	$f_{\text{max}} = f_3 = 0,917$ (+29,15 %)
ohne SMEAR Lagenanordnung	<i>Startentwurf</i> $C = 3,193 \text{ Nm}$ (+38,46 %)	$V/V_{\text{ges}} = 0,2$ (0 %)	$f_{\text{max}} = f_3 = 1,720$ (+169,59 %)
	<i>Bester Entwurf</i> $C = 2,630 \text{ Nm}$ (+14,05 %)	$V/V_{\text{ges}} = 0,2$ (0 %)	$f_{\text{max}} = f_3 = 0,989$ (+55,02 %)

Tabelle 4.6: Ergebnisse der dreiphasigen Laminatoptimierung am Kragsscheibenmodell

Die Elementdickenoptimierung startet mit einem Entwurf im unzulässigen Bereich an der Volumenrestriktionsgrenze. Mit der Optimierung wird der maximale Bruchfunktionswert reduziert und die mittlere Nachgiebigkeit deutlich minimiert. Die Überführung des Optimums der Elementdickenoptimierung zum Startentwurf der diskreten Schichtdickenoptimierung erhöht das Volumen um etwa das 2,5-fache, weil kontinuierliche Elementdicken zu Schichten mit diskreten Dicken zusammengefasst werden (vgl. Kapitel 2.3.2). Durch das größere Volumen sinken die mittlere Nachgiebigkeit und der maximale Bruchfunktionswert. Mit den diskreten Entwurfsvariablen und der bestimmten Topologie kann mit der Schichtdickenoptimierung kein besserer Zielfunktionswert erreicht werden, als beim besten Entwurf der Elementdickenoptimierung. Die erhöhte Anstrengung liegt dabei nah an der Versagensgrenze bzw. Festigkeitsrestriktion. Mit Berücksichtigung der Biege-Dehn-Kopplung (ohne

<sup>32</sup> Höchstwert jedes Elements (Bezugsebene ist die Schichtmittelebene) aller Versagensmodi nach PUCK (vgl. Kapitel 2.1.3).  $f_2 = \text{FB Modus Druck}$ ,  $f_3 = \text{ZFB Modus A}$

SMEAR) erhöht sich die mittlere Nachgiebigkeit des Startentwurfs im nächsten Optimierungsschritt deutlich (+22,0 %) und es kommt zum Laminatversagen. Insbesondere treten aufgrund von Zugspannungen Zwischenfaserbrüche (Modus A) der  $0^\circ$ -Schichten im Kraftangriffs- und oberen Lagerbereich auf. Die Gesamtverschiebung und der Verformungszustand dieses Startentwurfs sind im Vergleich zum optimierten Entwurf in Bild 4.13 dargestellt. Das nicht symmetrische Laminat des Startentwurfs verwindet sich stark. Im mittleren Verbindungspunkt (A), am oberen Rand (B) und im Kraftangriffsbereich (C) sind die Wölbungen dabei am größten und führen zu den eingezeichneten Verschiebungen  $w$  in z-Richtung (Dickenrichtung). Mit der Optimierung der Lagenanordnung kann die Gesamtverschiebung merklich gesenkt und die Wölbungen minimiert werden. Ferner wird ein Versagen vermieden und der Zielfunktionswert fast auf den Wert des besten Entwurfs der Schichtdickenoptimierung mit SMEAR reduziert. Die höher beanspruchten Stellen der optimierten Kragsscheibe sind die Schichtgrenzen der Überlappungsbereiche. Lager- und Kraftangriffsbereiche liegen dabei unter  $f < 0,5$ .

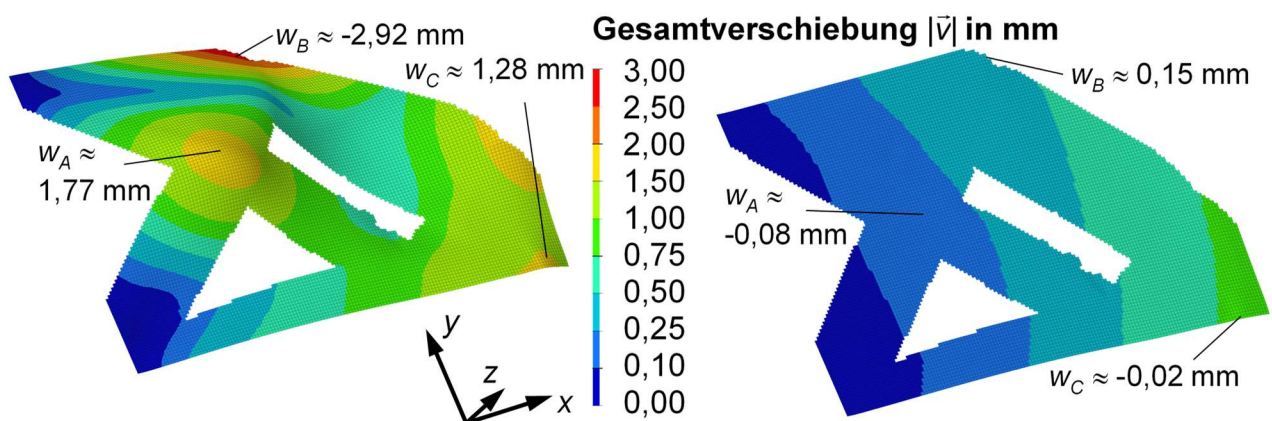


Bild 4.13: Gesamtverformungszustand (10-fach skaliert) des Startentwurf (links) und des besten Entwurfs (rechts) der Optimierung der Lagenanordnung

### **Bewertung und Fazit**

Insgesamt erweist sich der dreiphasige Optimierungsprozess mit den halbautomatisierten Übergängen zwischen den Phasen als eine wenig aufwändige Möglichkeit einen optimierten Laminatentwurf zu erhalten. Allein die Wahl eines passenden Startlaminats gestaltet sich zumindest bei dem vorliegenden Optimierungsproblem schwierig und lässt einen verallgemeinerten Startentwurf nicht zu. Ebenso wird damit die Suche nach dem bestmöglichen Schichtwinkel eingeschränkt. Im Vergleich dazu gestaltet das LTgSL-Verfahren (vgl. Kapitel 4.1) durch den generalisierten Startentwurf mit isotropen Werkstoffverhalten die Wahl des Startmodells einfacher. Für dieses Kragsscheibenbeispiel kann das LTgSL-Verfahren dank Topologieoptimierung und anschließender Laminatmodelloptimierung 83 % an reiner Re-

chenzeit gegenüber der dreiphasigen Laminatoptimierung einsparen und zudem einen besseren, zulässigen Entwurf liefern. Allerdings erfordert das LTgSL-Verfahren einen größeren zeitlichen Aufwand in den Modellierungsschritten zwischen den Optimierungen. Dieser Prozess kann jedoch weiter automatisiert und beschleunigt werden.



# Kapitel 5

## Optimierung von Bolzenverbindungen

### 5.1 Optimierungsproblem und Startentwurf

Die Optimierung von Bolzenverbindungen findet anhand der in Kapitel 4.1 entwickelten Optimierungsstrategie (LTgSL-Verfahren) statt. Zu Beginn sind demnach die Anforderungen und Möglichkeiten der Optimierungsaufgabe in einer Spezifikationsliste zu erfassen. Mit der Definition eines Kontaktmodells kann der optionale Zweig des LTgSL-Verfahrens (vgl. Bild 4.1) über die Kontaktanalyse verwendet und damit ein realitätsnahes Lastmodell ermittelt werden. Die softwaretechnische Umsetzung der verwendeten Bolzenverbindung und des Optimierungsproblems ist im Anhang C dokumentiert.

#### **Schritt 0: Spezifikationsliste**

Die in Kapitel 3.1 dimensionierte Bolzenverbindung soll durch Auflaminieren weiterer Schichten verstärkt werden, damit ohne Versagen der Verbindungselemente eine Gesamtlast von  $F = 1,5 \text{ kN}$  übertragen werden kann. Damit bleibt das schon verwendete Flugzeugbaulaminat  $[0_{10}^{\circ}/45_4^{\circ}/-45_4^{\circ}/90_2^{\circ}]_S$  als Grundlaminat innerhalb des Optimierungsprozesses unveränderlich und nur für die auflaminierte Verstärkung soll ein optimaler Entwurf gefunden werden. Die gegebenen Randbedingungen des Grundlaminats, wie in Bild 3.8 dargestellt, bleiben davon unberührt: Lediglich das Grundlaminat wird einseitig eingespannt und die Belastung findet wie gehabt über die gesamte Bolzenfläche statt. Ferner soll die oben und unten am Grundlaminat angebrachte Verstärkung identisch sein, damit die Laminatsymmetrie erhalten bleibt. Die Grundlaminatdicke wird dabei auf die obere und untere Verstärkung aufgeteilt. Daneben sollen Werkstoff, Herstellung und Geometrie des Verstärkungslaminats dem des Grundlaminats entsprechen. Der mögliche Bauraum für die Verstärkung erstreckt sich damit jeweils 2 mm über und unter dem Grundlaminat. Aus diesem Bauraum soll mit möglichst geringem Materialeinsatz ein optimaler Laminatentwurf mit einer größtmöglichen Steifigkeit hervorgehen, ohne dass es zum Laminatversagen kommt. Dieses Vektoroptimierungsproblem ist durch eine geeignete Methode innerhalb der Topologieoptimierung zu lösen, damit für die anschließende Parameteroptimierung ein skalares Ersatzproblem verwendet werden kann. Der Materialfüllgrad (vgl. Kapitel 2.3.1), als Entwurfsvariable für die Topologieoptimierung, kann dabei kontinuierliche Werte zwischen einem definierten Mindestwert von 0,001 und 1 annehmen. Für die Parameteroptimierung werden nur diskrete Werte für die Entwurfsvariablen Schichtdicke und -winkel verwendet. Es sind nur Vielfache einer fertigmöglichen Mindestdicke von 0,1 mm als Schichtdicke möglich, wobei

die Bauraumgrenze von 2 mm eingehalten werden muss. Für die Schichtwinkel sind ebenso nur diskrete Werte in 15° Schritten zwischen -90° und 90° zugelassen. Des Weiteren erfolgt die Festigkeitsbeurteilung anhand des Versagenskriteriums nach PUCK, mit dem, wie in Kapitel 2.1.3 festgelegt, auch Beanspruchungen bis zur Versagenslast als zulässige Entwürfe berücksichtigt werden. Daneben ist, um durch einen eventuell abgestuften Laminataufbau auch in Laminatdickenrichtung Material einzusparen, eine dreidimensionale Betrachtung der lokalen Lochverstärkung der Zielsetzung dienlich. Zudem ist mit einem Volumenmodell eine genauere Abbildung der Lastsituation möglich. Die Optimierungsaufgabe ist in Tabelle 5.1 für die  $n$  Elemente der Topologieoptimierung und die  $m$  Elemente der Parameteroptimierung zusammengefasst, wobei aufgrund der Laminatsymmetrie nur die obere Hälfte der Bolzenverbindung, halbes Grundlaminat mit darüber liegendem Bauraum, verwendet wird. Die Entwurfsvariablen beziehen sich nur auf das zu ermittelnde Verstärkungslaminat. Das Grundlaminat wird, wie erwähnt, nicht verändert.

	Topologieoptimierung	Parameteroptimierung
<b>Entwurfsvariablen</b>	$\vec{x} = [\chi_1 \ \chi_2 \ \dots \ \chi_n]^T$	$\vec{x} = [t_1 \ t_2 \ \dots \ t_m \ \alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_m]^T$
<b>Zielfunktionen</b>	$\vec{f}(\vec{x}) = [C(\vec{x}) \ V(\vec{x})]^T$	
<b>Entwurfsraumgrenzen / Restriktionen</b>	$0,001 \leq \chi_i \leq 1 ; i = 1, \dots, n$	$0,1 \text{ mm} \leq t_i \leq 2 \text{ mm} ; i = 1, \dots, m$ $ ; t_i = \eta \cdot 0,1 \text{ mm}$ $-90^\circ \leq \alpha_i \leq 90^\circ ; i = 1, \dots, m$ $ ; \alpha_i = \kappa \cdot 15^\circ$ mit $\eta \in \mathbb{N}^+$ und $\kappa \in \mathbb{Z}$ $g_1(\vec{x}) = 1 - f_{\text{PUCK}}(\vec{x}) \geq 0$
<b>Optimierungsproblem</b>	"Min" $_{\vec{x}} \left\{ \vec{f}(\vec{x}) \mid \vec{x} \in \mathbb{R}_z^n \right\}$ mit $\mathbb{R}_z^n = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{g}(\vec{x}) \geq \vec{0} \right\}$	
<b>Material</b>	CFK UD-Gelege: Werkstoffkennwerte gemäß Tabelle 3.1	
<b>Randbedingungen</b>	$\vec{v}(x = -100, -50 \leq y \leq 50, 0 \leq z \leq 2) = \vec{0}$ $F_{xx, \text{Bolzen}}(x = 0,11, -3,955 \leq y \leq 3,955, 0 \leq z \leq 6) = 1,5 \text{ kN}/2$	

Tabelle 5.1: Optimierungsaufgabe für die Grundlaminatverstärkung der Bolzenverbindung

**Schritt 1: Strukturmodell**

Das Strukturmodell der Bolzenverbindung ist zusammengesetzt aus dem Modell des Bolzens (Kapitel 3.2.2), des Grundlaminats (Kapitel 3.2.1) und des Verstärkungsbauraums,

dessen Diskretisierung dem des Grundlaminats entspricht. Zudem wird ein isotropes Material mit den globalen Materialeigenschaften ( $E = 62430 \text{ N/mm}^2$ ,  $G = 23890 \text{ N/mm}^2$ ) eines quasiisotropen Laminats  $[0^\circ/45^\circ/-45^\circ/90^\circ]_5$  mit den Werkstoffkennwerten gemäß Tabelle 3.1 für den Verstärkungsbauraum verwendet.

### Schritt 2: Kontaktmodell

Das Kontaktmodell für die Bolzenverbindung in Kapitel 3.2.3 wird auf den hinzugefügten Bauraum erweitert. Die schrittweise Lastaufbringung mit 10 Lastinkrementen, die elementflächenbasierte Kontaktflächendiskretisierung (S2S), der haftende Kontakt (STICK) und die Lagerbedingungen werden beibehalten. Lediglich die Gesamtlast wird auf  $F = 1,5 \text{ kN}$  verdoppelt (für das aufgrund der Symmetrie halbe FE-Modell sind es  $750 \text{ N}$ ). Mit dem Kontaktmodell ist das FE-Modell für das vorliegende Optimierungsproblem definiert. Eine maßstäbliche Abbildung dieses Modells mit dem Koordinatensystem, der Last, den Materialien und den Bereichsdicken ist in Bild 5.1 dargestellt.

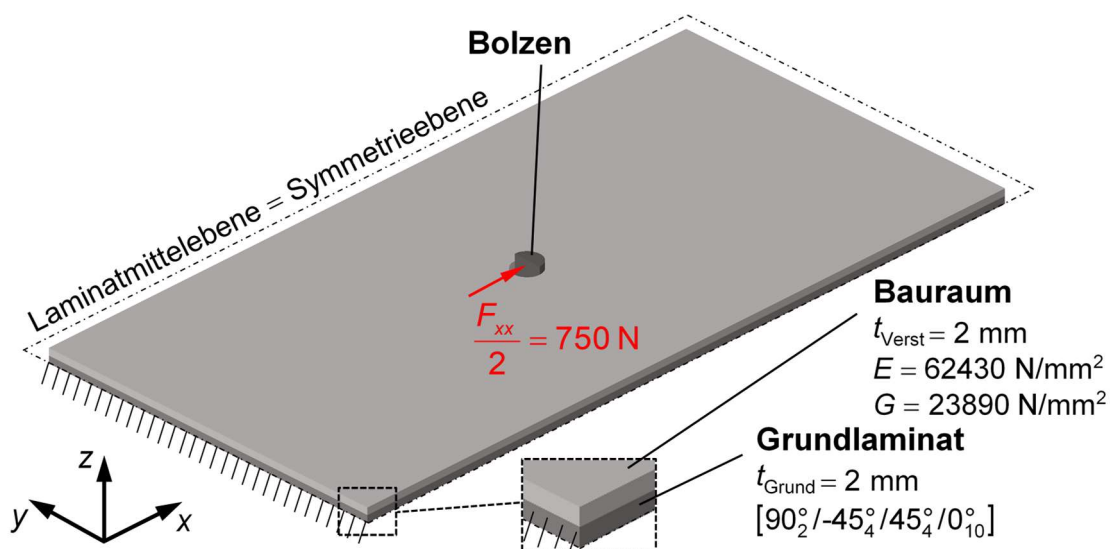


Bild 5.1: Modell für das Optimierungsproblem

### Schritt 3: Kontaktanalyse

Mit der Kontaktanalyse werden wichtige Kennwerte, wie die Ziel- und Restriktionsgrößen, für den Startentwurf des Optimierungsproblems ermittelt. Diese Kennwerte dienen zur späteren Bewertung der Optimierungsergebnisse. Daneben ist zur Beurteilung der Gesamttragfähigkeit der Bolzenverbindung die Beanspruchung des Bolzens zu beachten. Diese Strukturantwort ist kein Bestandteil des Optimierungsprozesses, da der Bolzen im Weiteren durch Approximation der Kontaktlast vernachlässigt wird.

Die Kontaktanalyse mit dem obigen Kontaktmodell liefert

- eine **mittlere Nachgiebigkeit** für das Grundlaminat mit dem isotropen Verstärkungsbauraum von  $C = 3,516 \text{ Nmm}$ ,
- einen **Volumenanteil** (ohne Bolzen) von 200 % im Vergleich zum Kontaktmodell ohne Verstärkungsbauraum,
- einen maximalen **Bruchfunktionswert** von  $f_{\max} = 0,919$  in der Mitte der  $-45^\circ$ -Schicht in unmittelbarer Nähe zur Kontaktflächenmitte (vgl. Bild 3.11) und
- eine v. Mises-Vergleichsspannung von  $\sigma_{\text{vMises,max}} = 94,2 \text{ N/mm}^2$  für den Bolzen und damit 40 % der Streckspannung  $R_{eH}$ .

Die sich ergebende Kontaktdruckverteilung für das Grundlaminat ist prinzipiell die gleiche wie in Bild 3.11 und für den isotropen Verstärkungsbauraum wie links in Bild 3.9, wobei das Kontaktdruckniveau aufgrund des vorhandenen Grundlaminats und dem kleineren Überstand des Bolzens deutlich niedriger ausfällt. Der maximale Kontaktdruck tritt in der Kontaktflächenmitte an der oberen Bauraumkante auf und beträgt  $p_{\max} = 199 \text{ N/mm}^2$ .

## 5.2 Topologieoptimierung mit Lastmodell

Da eine Kontaktanalyse für jede Iteration der Topologieoptimierung einen enormen Rechenaufwand bedeutet, wird ein Lastmodell verwendet, um die Kontaktlast zu approximieren. Voruntersuchungen zeigen, dass keine großen Änderungen der Kontaktlast zu erwarten sind, womit der Optimierungsprozess vollständig mit dem Lastmodell des Startentwurfs stattfindet. Mit dem Ergebnisentwurf der Topologieoptimierung wird der Fehler dieser Näherung in Kapitel 5.5.1 quantifiziert.

### *Schritt 4: Lastmodell*

Mit der durchgeführten Kontaktanalyse in Schritt 3 stehen alle in Kapitel 3.3 beschriebenen Möglichkeiten zur Lastmodellierung zur Verfügung. Verwendet wird der programmtechnische Ansatz mit der Übertragung der Kontaktknotenkräfte aus der Kontaktanalyse auf den Lochrand des Grundlaminats und des Bauraums. Grund für diese Wahl sind die nahezu vollständige Übereinstimmung mit der Kontaktanalyse und der, wie in Kapitel 3.3 erwähnt, deutlich aufwendigere Einsatz der theoretischen Modellansätze für diese Bolzenverbindung. Im Vergleich zu der Kontaktknotenkraftübertragung liefern die theoretischen Modellansätze auch eine stärkere Abweichung zur Kontaktanalyse, wie die Ergebnisse verschiedener FE-Analysen in Tabelle 5.2 zeigen. Neben der Kontaktanalyse aus Kapitel 5.1 sind dabei für Modell 1 (sinusförmige Lastverteilung) und Modell 2 (Ersatzelastizität) jeweils Ergebnisse einer schichtweisen Anwendung sowie einer Anwendung für die gesamte Kontaktfläche als

Ganzes aufgeführt: Beim Modell 2 werden für das Grundlaminat die verschmiert isotropen Werkstoffeigenschaften des Verstärkungsbaureums angenommen und beim Modell 1 wird für den erforderlichen maximalen Kontaktdruck und die Kontaktflächenbreite der Mittelwert aller Elementschichtwerte verwendet. Auffällig in Tabelle 5.2 ist, dass mit den vier theoretischen Modellen die Gesamtlast nicht wiedergegeben werden kann. Zudem führen diese Lastmodelle zu einem Versagen (rot hervorgehoben) des Grundlaminats. Die Diskrepanzen ergeben sich aus der Ungenauigkeit der Lastapproximation in der Laminebene und aus dem Aufbringen der Lasten im FE-Modell als Druck auf den Mittelpunkt der Elementflächen, der vom Solver als Kraft auf die Knoten umgerechnet und damit speziell am Bauteilrand zu Abweichungen führt. Darüber hinaus wird mit der Vernachlässigung der hier aufwendigen Näherung des Kontaktdrucks in Laminatdickenrichtung die Approximationsgüte weiter reduziert. Das Lastmodell mit den übertragenen Kontaktknotenkräften weist diese Problematik nicht auf und liefert Ergebnisse die nahezu identisch zu denen der Kontaktanalyse sind. Lediglich bei der mittleren Nachgiebigkeit muss beachtet werden, dass bei der Kontaktanalyse die Kontaktsteifigkeit (Formänderungsenergie bzw. Verzerrungsenergie der Kontaktelemente, näheres in [Alt21] unter „User Guide / Contact“ und Kapitel 2.1.5) mit in die Berechnung der mittleren Nachgiebigkeit einfließt. Zur besseren Vergleichbarkeit ist in Tabelle 5.2 der Wert ohne Verzerrungsenergie des Kontakts in Klammern aufgeführt.

	<b>Aufgebrachte Gesamtlast</b>	<b>Mittlere Nachgiebigkeit</b>	<b>Bruchfunktionswert nach PUCK<sup>33</sup></b>
<b>Kontaktanalyse</b>	$F = 750,0 \text{ N}$ auf Bolzenfläche	$C = 3,516 \text{ Nmm}$ ( $C = 3,269 \text{ Nmm}$ )	$f_{\max} = 0,919$ -45°-Schicht Mitte
<b>Kontaktknotenkraft-übertragung</b>	$F = 750,1 \text{ N}$ auf 397 Knoten	$C = 3,269 \text{ Nmm}$	$f_{\max} = 0,919$ -45°-Schicht Mitte
<b>Modell 1: Sinusverteilung je Schicht</b>	$F = 811,2 \text{ N}$ auf 358 Elemente	$C = 3,830 \text{ Nmm}$	$f_{\max} = 1,634$ Schichtgrenze $\pm 45^\circ$
<b>Modell 1: Sinusverteilung Mittelwert aller Elementschichtwerte</b>	$F = 810,7 \text{ N}$ auf 360 Elemente	$C = 3,966 \text{ Nmm}$	$f_{\max} = 2,270$ 90°-Schicht
<b>Modell 2: Ersatzelastizität je Schicht</b>	$F = 769,0 \text{ N}$ auf 486 Elemente	$C = 3,325 \text{ Nmm}$	$f_{\max} = 2,319$ 90°-Schicht
<b>Modell 2: Ersatzelastizität komplette Kontaktfläche</b>	$F = 771,9 \text{ N}$ auf 360 Elemente	$C = 3,581 \text{ Nmm}$	$f_{\max} = 2,137$ 90°-Schicht

Tabelle 5.2: Kontaktanalyse und FE-Analysen mit verschiedenen Lastmodellen im Vergleich

<sup>33</sup> Höchstwert jedes Elements und jeder Auswertungsebene (Schichtunterseite, -mittelebene und -oberseite) aller Versagensmodi nach PUCK (vgl. Kapitel 2.1.3)

### Schritt 5: Topologieoptimierung

Für das FE-Modell mit dem verwendeten Lastmodell wird durch Definition des Optimierungsproblems gemäß Tabelle 5.1 ein Optimierungsmodell für die Topologieoptimierung erstellt. Da ein Zielkonflikt vorliegt, wird das Vektoroptimierungsproblem mit der Methode der restriktionsorientierten Transformation (vgl. Kapitel 2.3) gelöst. Als Hauptziel wird dabei die mittlere Nachgiebigkeit und als Nebenziel das Volumen gewählt. Es werden 10 Optimierungsrechnungen mit verschiedenen Volumenrestriktionen durchgeführt: 0,5 %, 1 %, 2,5 %, 5 %, 7,5 %, 10 %, 15 %, 20 %, 30 % und 50 % des Bauraumvolumens  $V_{start}$ . Der so ermittelte funktionaleffiziente Rand ist mit einem vergrößerten Ausschnitt in Bild 5.2 dargestellt, wobei in der darin enthaltenen Gesamtansicht Entwürfe mit keiner ( $C = 5,776$  Nmm) und voller Füllung ( $C = 3,269$  Nmm) des Bauraums enthalten sind. Diese Entwürfe beschreiben die Ausgangslage ohne Verstärkungsbaurraum und den Startentwurf mit vollem Bauraum. In der vergrößerten Ansicht sind die Materialverteilungen – Materialfüllgrad von 0,01 (blau) bis 1 (rot) – der einzelnen optimalen Entwürfe aufgeführt.

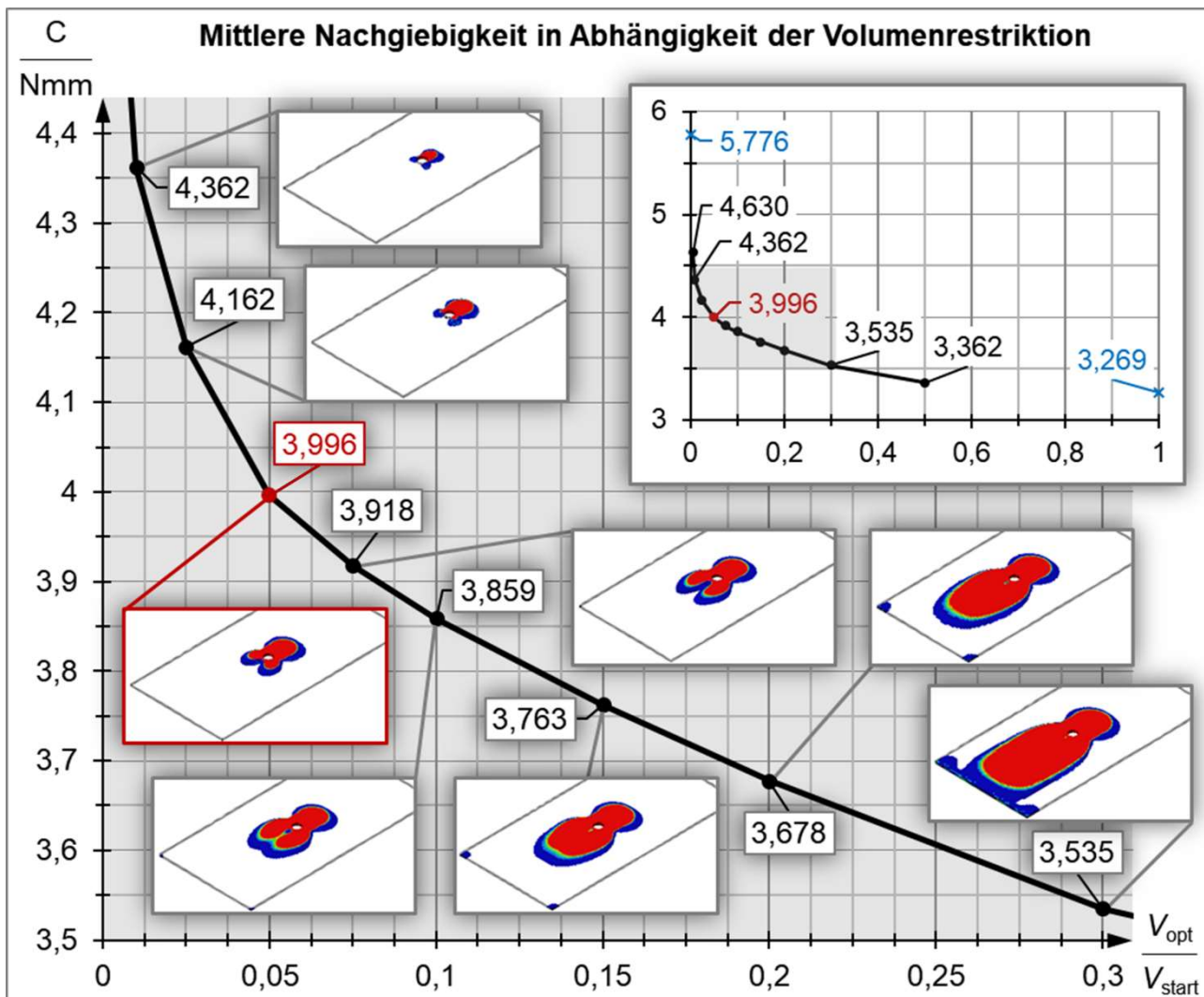


Bild 5.2: Gesamtansicht und Vergrößerung des funktionaleffizienten Rands

In den Darstellungen der Entwürfe in Bild 5.2 ist das vollständig gefüllte Grundlaminat jeweils ausgeblendet und es sind nur die Ränder des Bauraums sichtbar. Der funktional-effiziente Rand zeigt das erwartete Verhalten: Mit mehr verfügbarem Volumen kann die mittlere Nachgiebigkeit gesenkt werden. Das Material wird zunächst im Kraffteinleitungsbereich angeordnet. Mit mehr bereitgestelltem Volumen wird zunächst der Lochrand umschlossen und schließlich eine Verbindung in Richtung Lager ausgebildet. Das Material wird erst am Grundlaminat, das die einzige Verbindung zu Lagerung darstellt, angeordnet und anschließend in die Höhe (Laminatdickenrichtung) aufgebaut. Dadurch kommt es zur stufigen Anordnung der Elementschichten übereinander.

Für den weiteren Optimierungsprozess wird der rot markierte Entwurf mit 5 % Bauraumfüllung als Kompromisslösung gewählt, da dieser den kleinsten Materialeinsatz aufweist, um den Lochrand zu umschließen. Mit diesem Entwurf wird die mittlere Nachgiebigkeit um 30 % gegenüber einem Entwurf ohne Verstärkung reduziert. Der gewählte Entwurf ist in Bild 5.3 in verschiedenen Ansichten zusammen mit dem Grundlaminat dargestellt. Dabei sind die Abstufung der Elementlagen sowie die Umschließung des Lochrands erkennbar, wobei sich zwei kleine Aussparungen am Lochrand in negativer x-Richtung ausbilden. Zudem kann aus der Draufsicht eine Symmetrie in der Materialverteilung festgestellt werden.

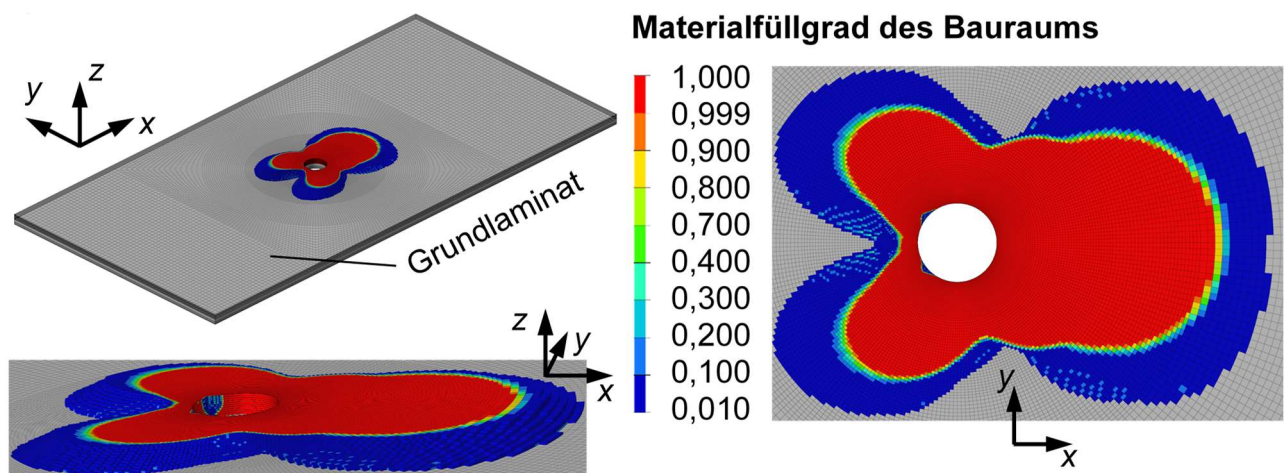


Bild 5.3: Materialfüllgrad für den gewählten Entwurf mit 5 % Volumenrestriktion

### 5.3 Dicken- und Winkeloptimierung am Laminatmodell

Mit den Ergebnissen aus der Topologieoptimierung ist die anschließende Parameteroptimierung vorzubereiten. Dazu muss ein zum vorliegenden Volumenmodell passendes Schalenmodell erstellt und das dreidimensionale Lastmodell in die Schalenebene projiziert

werden. Die Strukturantworten der Topologieoptimierung werden in einem Einzelschichtmodell verarbeitet und strukturiert, womit ein Laminatmodell erzeugt wird. Dieses Laminatmodell bildet dann den Startentwurf der Dicken- und Winkeloptimierung.

### **Schritt 6: Schichtmodell**

Das Volumenmodell aus der Topologieoptimierung wird auf zwei Schalen in der  $x$ - $y$ -Ebene reduziert, wobei die Vernetzung in der Ebene erhalten bleibt. Die Schale in der Laminatmittelebene ( $z = 0$ ) repräsentiert dabei das Grundlaminat und ist mit der Schale des Verstärkungsbauraum knotenweise starr verbunden. Beide Schalen liegen parallel mit 2 mm Abstand zueinander, womit die Elementknoten in Laminatdickenrichtung ( $z$ -Richtung) stets direkt übereinanderliegen. Um eine spätere Anbindung zwischen Grundlaminat und Verstärkungslaminat zu gewährleisten, bildet die Schalenebene ( $z = 2$  mm) des Verstärkungsbauraums die Laminatunterseite des Verstärkungslaminats. Für eine automatisierte Übertragung der elementbezogenen Strukturantworten der Topologieoptimierung müssen die Elementnummer der Schalen denen der zugehörigen Volumenelemente entsprechen. Dazu wird mit Hilfe einer Excel-Tabelle und einem tcl-Skript jedes Schalenelement mit der richtigen Elementnummer am passenden Elementknoten des Volumenmodells erzeugt.

Die Kontaktknotenkräfte des Volumenmodells der Topologieoptimierung werden für  $0 \leq z \leq 1,8$  mm auf die Grundlaminatschalenebene und für  $2 \text{ mm} \leq z \leq 4$  mm auf die Verstärkungsbauraumschalenebene versetzt. Das sich dabei ausbildende Versatzmoment ist mit zu erzeugen. Der Vorgang kann bequem in HyperMesh reihenweise für übereinanderliegende Kräfte über die Kraftsummation erfolgen.

Schichtdicke und -winkel jedes Schalenelements des Verstärkungsbauraums werden aus den Strukturantworten der Topologieoptimierung berechnet. Mit dem Materialfüllgrad wird für jedes Volumenelement  $i$  des Verstärkungsbauraums die neue Elementdicke laut Gleichung (4.1) ermittelt, wobei  $\chi_{sw} = 0,01$  gilt. Die Schichtdicke jedes Schalenelements wird als Summe der Dicken  $t_i$  der übereinanderliegenden Elemente bestimmt. Schalenelemente mit Schichtdicken kleiner gleich 0,002 mm, was bei einer Volumenelementdicke von 0,2 mm einem Materialfüllgrad von 0,01 entspricht, werden dabei entfernt. Der Elementfaserwinkel kann entsprechend Gleichung (4.2) berechnet werden. Da sich für ca. 1 % der übereinanderliegenden Elemente, die größtenteils in Randbereichen der ermittelten Topologie liegen, partiell stark unterschiedliche Faserwinkel  $\alpha_i$  ergeben, wird für diese Elemente von einer Mittelwertbildung abgesehen. Es werden die Faserwinkel der in  $z$ -Richtung gesehen ersten Elementschicht des Verstärkungsbauraums als Schalenelementorientierung bzw. Schichtwinkel gewählt. Für die restlichen 99 % der übereinanderliegenden Elemente ist die Abweichung der Faserwinkel verschwindend klein, womit hierbei ebenso  $\alpha_i$  der ersten Elementschicht des Verstärkungsbauraums als Schichtwinkel bestimmt wird. Wegen der stufigen Anordnung (vgl. Bild 5.3) enthält diese Elementschicht die meisten Elemente



und damit alle benötigten Faserwinkel. Die Faserausrichtung ist damit an die betragsmäßig höhere Hauptspannung angepasst und gibt den bekannten Verlauf der dominierenden Hauptspannungstrajektorien wieder (vgl. [Tos00] S.1053f). Die beschriebene Berechnung der Schichtdicken und -winkel erfolgt über eine Excel-Tabelle. Die Zuordnung im Schalenmodell wird mit einem tcl-Skript durchgeführt.

Die ermittelte Topologie des Verstärkungsbauraums ist nun in ein Schichtmodell mit elementweise verteilten Schichtdicken und -winkel überführt. Das Grundlaminat bleibt von diesen Berechnungen ausgeschlossen. Die unveränderten Werte werden einfach ins Schalenmodell übernommen.

### **Schritt 7: Laminatmodell**

Die Schalenelemente der Verstärkung des obigen Schichtmodells werden entsprechend ihres Schichtwinkels in Winkelbereiche zwischen  $-90^\circ$  und  $90^\circ$  zusammengefasst, wobei die Elemente des  $-90^\circ$ -Bereichs zu dem  $90^\circ$ -Bereich hinzugefügt werden. Die Einteilung erfolgt mit einer Bereichsabstufung von  $15^\circ$  anhand einer Excel-Tabelle, die den Elementschichtwinkel mit zugehöriger Elementnummer in die nächstgelegene Winkelstufe einordnet (vgl. Kapitel 4.1). Diese Zuordnung wird mit einem tcl-Skript im FE-Modell ausgeführt, indem die Elemente einer Winkelstufe den Basiswinkel dieser Stufe erhalten. Die Schichtdicke einer Winkelstufe wird als Mittelwert aller enthaltener Elementschichtdicken festgelegt. Nicht zusammenhängende Elemente einer Winkelstufe werden in unterschiedliche Zonen eingeteilt. Damit liegt eine Einordnung der einzelnen Elemente in diskrete Zonen vor, die in Bild 5.4 vor und nach der Bereinigung dargestellt sind. Hierbei werden die nicht eindeutig zugeordneten Elemente, welche vorwiegend in den Randzonen auftreten, manuell in benachbarte Zonen integriert und die Bereichsgrenzen etwas begradigt (gestrichelte Linien oben in Bild 5.4), indem Elemente in die Nachbarzone verschoben werden. Außerdem werden mit „*Innen*“, „*Mitte*“ und „*Rand*“ drei Sektoren um das Loch definiert, um eine Unabhängigkeit der Zonen in den Sektoren zu erreichen und so mehr Möglichkeiten bei der späteren Optimierung zu erhalten. Die Sektoreinteilung folgt mit 8 mm Radius für den inneren Kreis und 16 mm für den äußeren Kreis der Segmentierung in Bild 3.2. Zudem zeigt Bild 5.4 anhand der dargestellten Faserrichtung, dass Fasern nahezu symmetrisch am Kraftangriffsbereich (Lochrand in positiver x-Richtung) radial und am restlichen Lochrand eher tangential anliegen. Leichte Abweichungen der Symmetrie sind Folge numerischer Ungenauigkeiten. Mit den tangential anliegenden Schichten ( $-75^\circ$ ,  $75^\circ$ ,  $90^\circ$ ) am Lochrand gegenüber dem Kraftangriffsbereich werden die benachbarten  $-15^\circ$ -,  $0^\circ$  und  $15^\circ$ -Schichten wie bei der Querbandagierung von Augenschlaufen (vgl. [Sch07] S.486f) durch Aufnahme der Querbeanspruchung unterstützt.

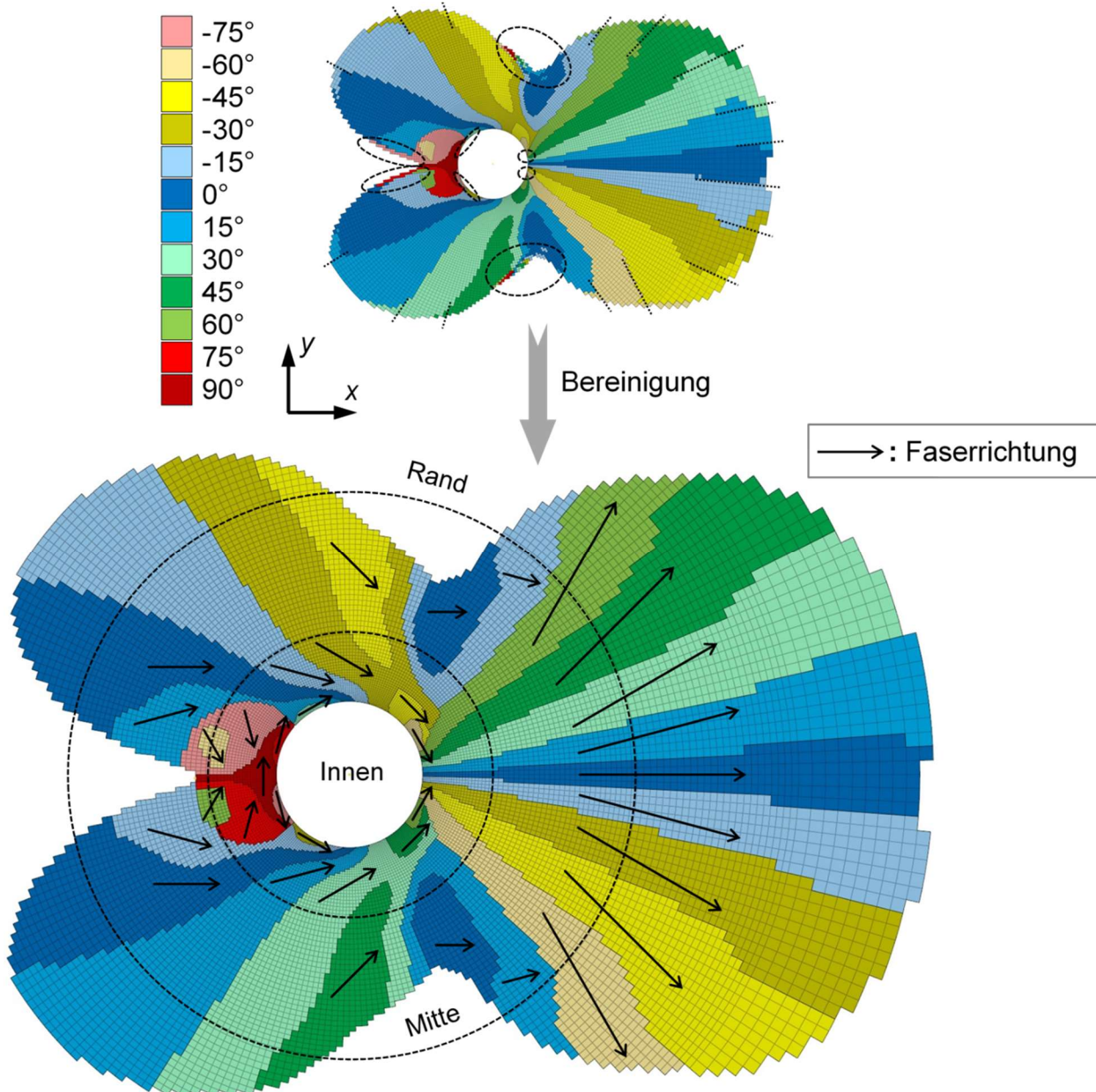


Bild 5.4: Bereinigung und Aufteilung der Zonen in Sektoren nach der Winkeleinteilung

Nach der Bereinigung und Einteilung wird für jede abgegrenzte Zone je Sektor eine Schicht mit der ermittelten Schichtdicke und dem entsprechenden Schichtwinkel erstellt. Es ergeben sich 86 Schichten, die individuell zu einem Laminat verarbeitet werden können. Für den weiteren Verlauf des Optimierungsprozesses ist eine Verbreiterung der teils schmalen Schichten angedacht, indem alle Schichten auf die Nachbarzonen erweitert werden, wodurch sich je nach Anzahl der Nachbarn pro Winkelbereich 2 bis 6 Schicht ergeben. Beispielsweise erstreckt sich damit der Bereich der  $0^\circ$ -Schicht auf die  $\pm 15^\circ$ -Schichten, der Bereich der  $15^\circ$ -Schicht auf die  $0^\circ$ - und  $30^\circ$ -Schicht und so weiter. Um die Laminatdicke dieser Bereiche mit mehreren Schichten niedrig zu halten, wird jede Schichtdicke eines Bereichs durch die Schichtanzahl dieses Bereichs geteilt. Die verbreiterten Schichten

werden, mit der Intention möglichst wenig und kleine Dickenunterschiede in einer Lage zur erhalten, zu einem Laminat zusammengefasst. Die gesamte Laminaterstellung erfolgt mit einer Excel-Tabelle und kann im passenden Format direkt in HyperMesh importiert werden. Der Lagenaufbau ist exemplarisch am Ausschnitt des Kraftangriffsbereichs in Bild 5.5 dargestellt. Die Elemente des Schalenmodells sind in z-Richtung um die Schichtdicke ausgedehnt abgebildet. Mit dem Schichtwinkel  $\alpha$  entsprechend der Umfangsrichtung  $\varphi$  des Zylinderkoordinatensystems ist der Übergang radial anliegender Schichten zu tangential anliegenden Schichten direkt neben dem Kraftangriffsbereich erkennbar, wobei durch die Erweiterung der Schichten auf Nachbarzonen dieser Übergang etwas verschmiert wird. Zudem sind die um die Anzahl an Nachbarzonen reduzierten Schichtdicken und die Schichtbreiten (y-Richtung) durch die ca. 0,1 mm breiten Elemente ersichtlich. Die Herstellung dieser feinen Strukturen (Größenordnung von Rovings) erfordert sicherlich ein präzises, maschinelles Fertigungsverfahren.

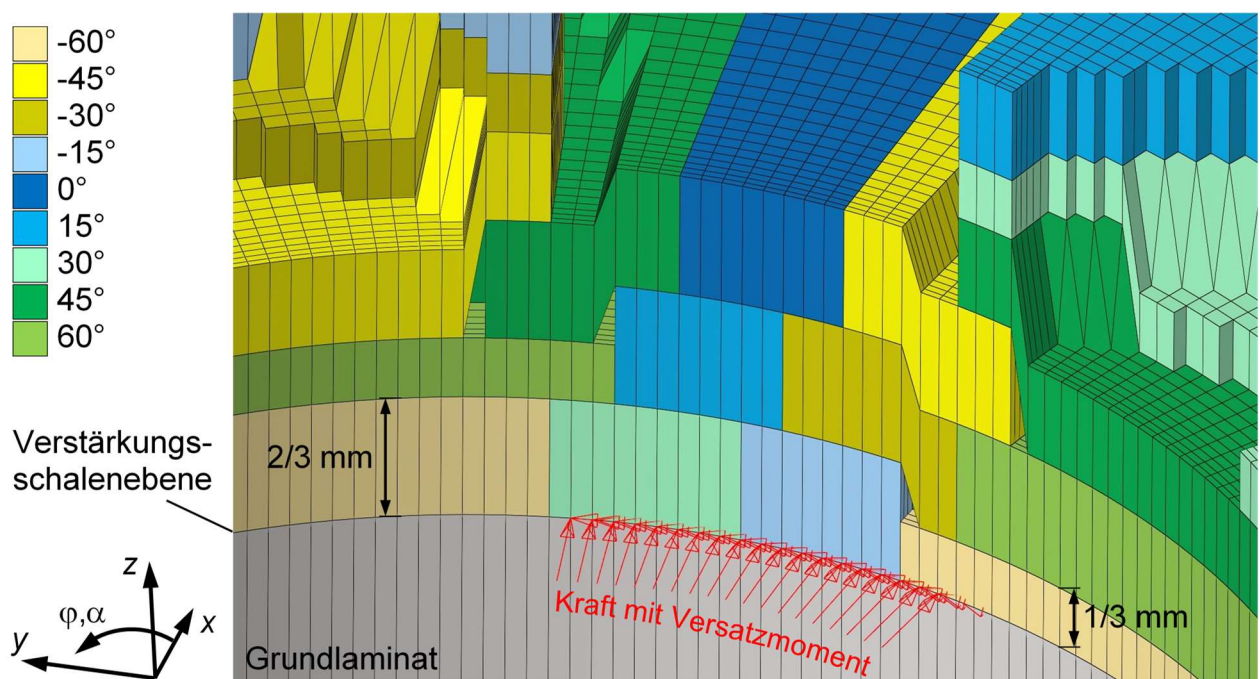


Bild 5.5: Lagenaufbau des Laminats im Kraftangriffsbereich (Schalenmodell mit veranschaulichter Elementdicke)

### Schritt 8: Parameteroptimierung

Für das erstellte Laminatmodell wird mit den Vorgaben gemäß Tabelle 5.1 ein Optimierungsmodell definiert. Für das Vektroptimierungsproblem wird ein skalares Ersatzproblem verwendet, das den Bedingungen der gewählten Kompromisslösung (vgl. Bild 5.3) folgt. Demnach ist weiterhin Ziel der Optimierung die Minimierung der mittleren Nachgiebigkeit mit einer Begrenzung des Volumens auf 5 % des Bauraums. Die Entwurfsvariablen sind

die Schichtdicken und -winkel des Laminatmodells, wobei Schichten einer Zone in allen drei Sektoren stets den gleichen Schichtwinkel aufweisen. Bei den vorliegenden 86 Schichten sind damit 86 Schichtdicken und 37 Schichtwinkel variabel. Mit der Verknüpfung der Schichtwinkel über Sektorgrenzen hinweg sollen Faserwinkelunterschiede vermieden und weitere auf Stoß liegende Faserlagen ausgeschlossen werden. Mit dem erstellten Optimierungsmodell wird nach 9 Iterationen ein zulässiger Entwurf mit diskreten Werten für die Schichtdicken und -winkel erreicht. Innerhalb der Optimierung werden nur bei 30 % der Entwurfsvariablen der Schichtwinkel angepasst. Bei den Schichtdicken sind es 73 % der Entwurfsvariablen, die verändert werden. Bei den restlichen 27 % der Schichtdicken findet lediglich eine Änderung der kontinuierlichen Startwerte auf die nächste diskrete Schichtdicke statt. Wegen der Bauraumbegrenzung von 2 mm Dicke sind im Kraftangriffsbereich kaum Anpassungen der Schichtdicken möglich. Für die übrigen Bereiche liegt die Laminatdicke teils deutlich darunter. Bei der Festigkeitsrestriktion verhält es sich entsprechend. Erhöhte Bruchfunktionswerte treten nur am Lochrand auf.

Ein Vergleich der Ziel- und Restriktionsfunktionswerte für die Entwürfe der Parameteroptimierung ist in Tabelle 5.3 aufgeführt, wobei in Klammern die Abweichung zum Startentwurf der Parameteroptimierung dargestellt ist. Mit 2,74 % des gegebenen Bauraumvolumens  $V_{\text{start}}$ , also mit etwa dem halben Startvolumen, wird im Vergleich zum Startentwurf der Parameteroptimierung eine um ca. 6 % höhere mittlere Nachgiebigkeit erreicht. Neben dem Volumen kann ebenso die Anstrengung um etwa 32 % gesenkt werden. Der Startentwurf der Parameteroptimierung liegt aufgrund der Maßnahmen bei der Erstellung des Laminatmodells (vgl. Schritt 7) im unzulässigen Bereich. Neben der Volumenrestriktion wird auch die Bauraumgrenze verletzt. Für den besten Entwurf wird ein Optimum erreicht, bei dem Volumen- und Festigkeitsrestriktion nicht aktiv sind und lediglich die maximal mögliche Laminatdicke im Kontaktbereich ausgeschöpft wird. Diese Bauraumbegrenzung behindert einen zielführenden Materialeinsatz. Eine ausführliche Diskussion dieses Ergebnisses erfolgt in Kapitel 5.5.1.

Entwürfe der Parameteroptimierung	Mittlere Nachgiebigkeit	Volumenanteil	Bruchfunktionswert nach PUCK <sup>34</sup>
Startentwurf	$C = 3,538 \text{ Nmm}$	$V/V_{\text{start}} = 0,0534$	$f_{\text{max}} = f_3 = 0,945$
Bester Entwurf	$C = 3,764 \text{ Nmm}$ (+6,39 %)	$V/V_{\text{start}} = 0,0274$ (-48,69 %)	$f_{\text{max}} = f_3 = 0,713$ (-32,54 %)

Tabelle 5.3: Entwürfe der Parameteroptimierung im Vergleich

<sup>34</sup> Höchstwert jedes Elements und jeder Auswertungsebene (Schichtunterseite, -mittelebene und -oberseite) aller Versagensmodi nach PUCK (vgl. Kapitel 2.1.3).  $f_3$  = ZFB Modus A

## 5.4 Kontaktanalyse des endgültigen Entwurfs

Der beste Entwurf der Parameteroptimierung wird in ein Volumenmodell überführt, um dieses anhand einer Kontaktanalyse mit dem Ausgangszustand zu vergleichen. Hierbei wird die programminterne, automatisierte Ausgabe (vgl. Anhang C) des in Mindestschichtdicken von 0,1 mm aufgeteilten Laminats genutzt. Damit ergeben sich im Verstärkungsbauraum insgesamt 306 Schichten. Die weitere Aufbereitung des Schalenmodells sieht vor, dass Schichten mit gleichen Schichtwinkeln je Zone durchgehend über die Sektorgrenzen verlaufen, was eine reale Fertigung widerspiegelt. Die Schichtanzahl sinkt damit auf 197. Der Laminataufbau mit diesen Verbindungen von Schichten erfolgt wiederum mit einer Excel-Tabelle und einem direkten Import in HyperMesh. Das aufgearbeitete Laminatmodell des besten Entwurfs der Parameteroptimierung wird schließlich in einem automatisierten programminternen Prozess (vgl. Anhang C) in ein Volumenmodell überführt. Dabei werden die Leerräume bei überlappenden Schichten, wie z. B. in Bild 5.5 zwischen der 15°-, 45°- und 60°-Schicht, mit Volumenelementen gefüllt, um die sich im Realen ausbildenden Harztaschen (näheres in [Sch07] S.640) abzubilden. Diese Elemente werden als isotroper Matrixwerkstoff mit den Kennwerten gemäß [Kad12] S.2298 modelliert:  $E_M = 4080 \text{ N/mm}^2$ ,  $G_M = 1478 \text{ N/mm}^2$ ,  $R_{M,Zug} = 99 \text{ N/mm}^2$ ,  $R_{M,Druck} = 130 \text{ N/mm}^2$ ,  $R_{M,Schub} = 57 \text{ N/mm}^2$ . Das Volumenmodell des optimierten Verstärkungslaminats kann nun im obigen Kontaktmodell (Schritt 2) anstatt des isotropen Bauraums genutzt werden, um die Kontaktanalyse des Endzustands durchzuführen. Man erhält für das Grund- und Verstärkungslaminat

- eine **mittlere Nachgiebigkeit** von  $C = 4,379 \text{ Nmm}$ ,
- einen **Volumenanteil** (ohne Bolzen) von 102,75 % im Vergleich zum Grundlaminat,
- einen maximalen **Bruchfunktionswert** von  $f_{\max} = 0,973$  am gemeinsamen Eckknoten der 0°-, -30°- und -45°-Schicht im Kontaktbereich
- und für den Bolzen eine v. Mises-Vergleichsspannung von  $\sigma_{vMises,\max} = 114,9 \text{ N/mm}^2$  und damit 48,9 % der Streckspannung  $R_{eH}$ .

Die Matrix in den Harztaschen wird vorwiegend auf Druck mit maximal 48 % der Druckfestigkeit  $R_{M,Druck}$  beansprucht. Der im Vergleich zum Schalenmodell (vgl. Tabelle 5.3) erhöhte Zielfunktionswert ist in erster Linie auf den nun berücksichtigten Kontakt und die Deformation in Laminatdickenrichtung zurückzuführen. Eine nähere Diskussion zu den veränderten Werten erfolgt in Kapitel 5.5.1.

Der endgültige Entwurf ist in der Gesamtansicht mit dem Grundlaminat sowie in der Vergrößerung des Verstärkungslaminats und des Kontaktbereichs in Bild 5.6 dargestellt. Hierbei ist deutlich die Laminatdickenabnahme vom inneren Sektor zum Randsektor sowie die geringere Laminatdicke beim Übergang von radial zu tangential anliegenden Schichten erkennbar. Im Kontaktbereich wie auch im restlichen Laminat dominieren die 0°-Schichten mit einem Anteil von 34,4 % am Volumen des Verstärkungslaminats. Die nächstgrößeren

Volumenanteile bilden mit 27,5 % die  $\pm 15^\circ$ -Schichten gefolgt von den 14,6 % der  $\pm 45^\circ$ -Schichten, den 11,5 % der  $\pm 60^\circ$ -Schichten und den 8,4 % der  $\pm 30^\circ$ -Schichten. Die Schichten mit den Faserwinkeln  $-75^\circ$ ,  $75^\circ$  und  $90^\circ$  ergeben zusammen einen Anteil von 3,4 % und sind, wie auch in Bild 5.4 zu sehen, ausschließlich am Lochrand gegenüber des Kontaktbereichs zu finden.

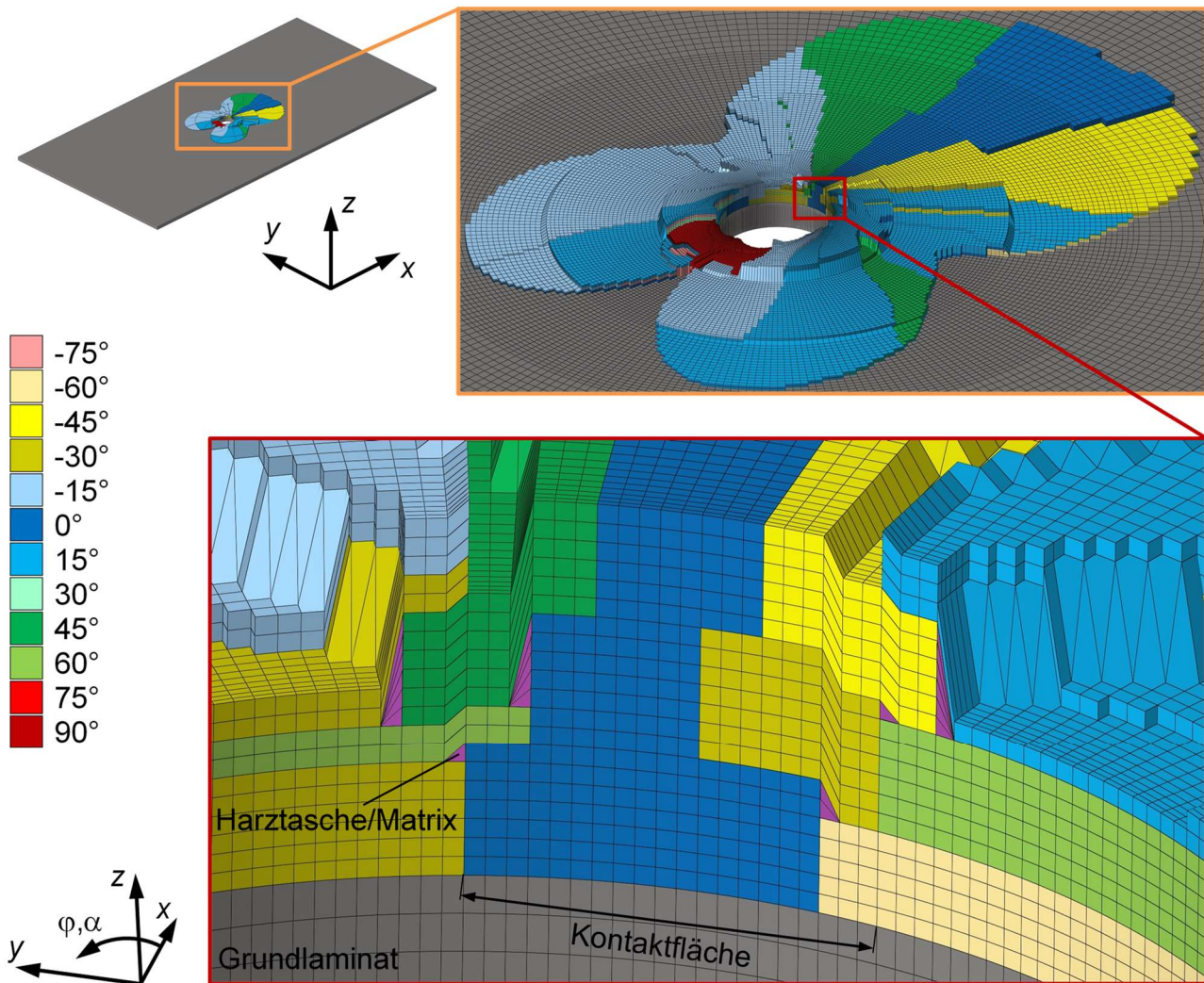


Bild 5.6: Volumenmodell des endgültigen Entwurfs in verschiedenen Ansichten

In Bild 5.7 sind der Lagenaufbau und die Schichtpositionen für eine mögliche Fertigung des Verstärkungslaminats in 9 Schritten dargestellt. Dabei enthält jeder Fertigungsschritt nicht überlappende Lagen mit übereinanderliegenden Schichten gleicher Orientierung. Die ersten Lagen werden auf das Grundlaminat und die darauffolgenden Schichten auf die vorherigen Lagen aufgebracht. In Bild 5.8 sind die Lagen der einzelnen Fertigungsschritte nochmals in separaten Ebenen veranschaulicht. Zur Verdeutlichung der Orientierung der Verstärkungsschichten sind zudem die Faserrichtungen exemplarisch für die  $90^\circ$ -,  $60^\circ$ -,  $30^\circ$ -,  $0^\circ$ -,  $-30^\circ$ - und  $-60^\circ$ -Schichten durch entsprechend farblich gekennzeichnete Pfeile beschrieben.

Damit sind die Anforderungen der Spezifikationsliste (Schritt 0) erfüllt. Eine Bewertung der Zwischenergebnisse und des Gesamtergebnisses erfolgt in Kapitel 5.5.

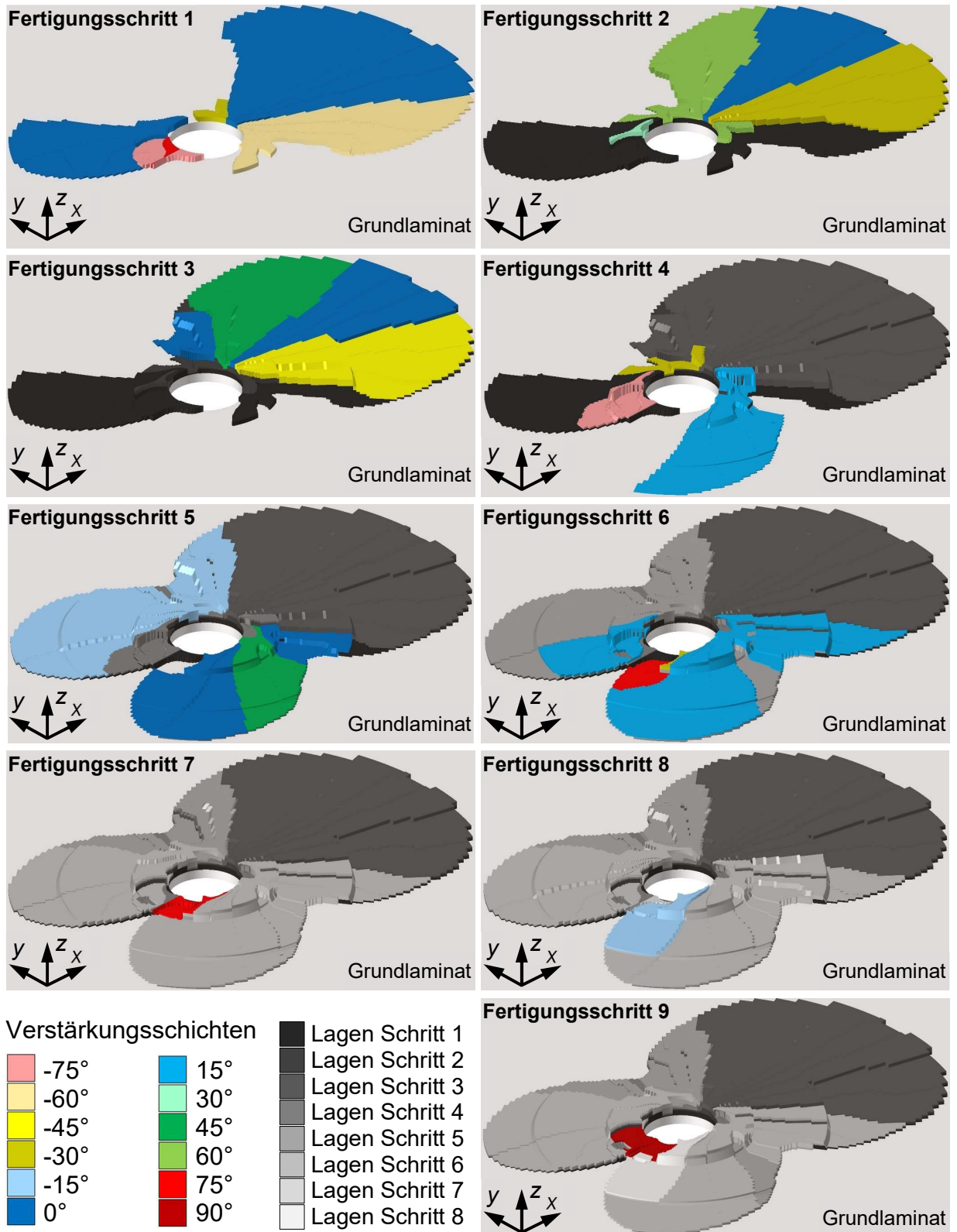


Bild 5.7: Fertigungsschritte des Verstärkungslaminats für den endgültigen Entwurf

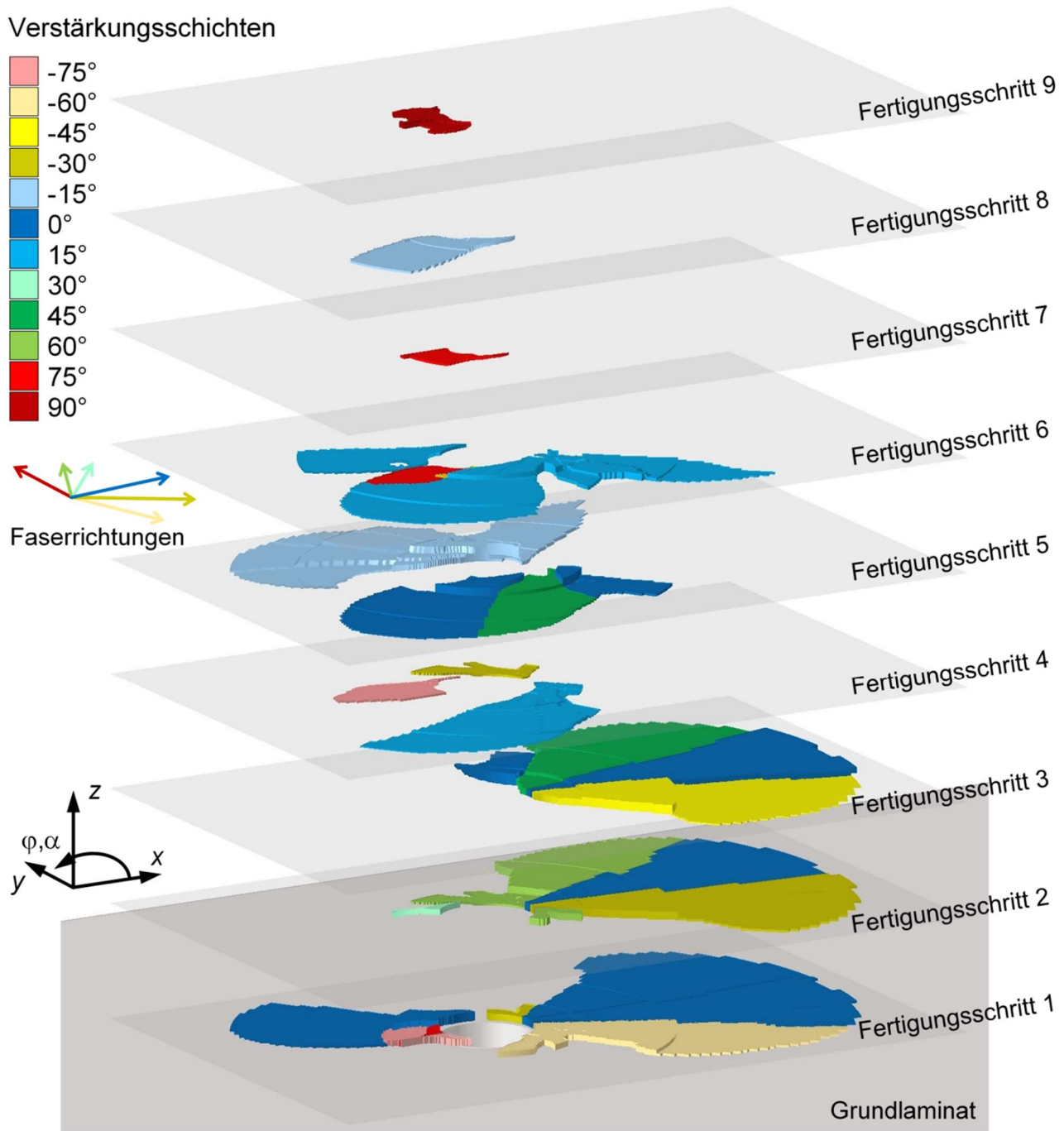


Bild 5.8: Schichten der einzelnen Fertigungsschritte für den endgültigen Entwurf

### 5.5 Zusammenfassung der Ergebnisse und Diskussion

Die Optimierung der Bolzenverbindung in den Kapiteln 5.1 bis 5.4 zeigt die Anwendung der entwickelten Optimierungsstrategie (LTgSL-Verfahren, vgl. Kapitel 4.1) an einem praxisnahen Beispiel und eine generelle Möglichkeit zur lokalen Lochverstärkung vorhandener Bolzenverbindungen. Der ermittelte endgültige Entwurf weist eine nachvollziehbare Verteilung der Schichten auf, ist aber maßgeblich von dem individuell erstellten Laminatmodell



abhängig. Daneben gestaltet sich die Fertigung des endgültigen Entwurfs zumindest durch händisches Faserlegen schwierig. Inwieweit präzisere Verfahren zum maschinellen Ablegen von Faserlagen (vgl. Kapitel 2.1.1) in Form von Patches, Tapes oder Rovings die Herstellbarkeit ermöglichen, ist in separaten Machbarkeitsstudien zu untersuchen. Erkenntnisse daraus könnten in detailliertere Fertigungsrestriktionen für die Optimierung münden. Abgesehen von den fertigungstechnischen Aspekten ist das erzielte Optimierungsergebnis hinsichtlich der mittlere Nachgiebigkeit und dem Volumen zu bewerten. Hierzu wird dieses mit verschiedenen Vergleichsmodellen und dem Ergebnis eines Referenzprozesses verglichen. Zunächst sind jedoch die Einzelergebnisse der Zwischenschritte zu diskutieren.

### 5.5.1 Diskussion der Zwischenergebnisse und des Endzustands

Innerhalb der Optimierung der Bolzenverbindung werden verschiedene Zwischenergebnisse generiert, deren Vergleichbarkeit durch die beiden Zielgrößen mittlere Nachgiebigkeit und Volumen ermöglicht wird, wobei das Volumen in der Optimierung als Nebenziel auf 5 % des Verstärkungsbauraums (vgl. Kapitel 5.2) restringiert wird. In Bild 5.9 sind diese Zielgrößen für verschiedene Zustände aufgetragen. Daneben ist die Festigkeitsrestriktion als Kriterium für die Strukturbeanspruchung in den einzelnen Schritten zu betrachten.

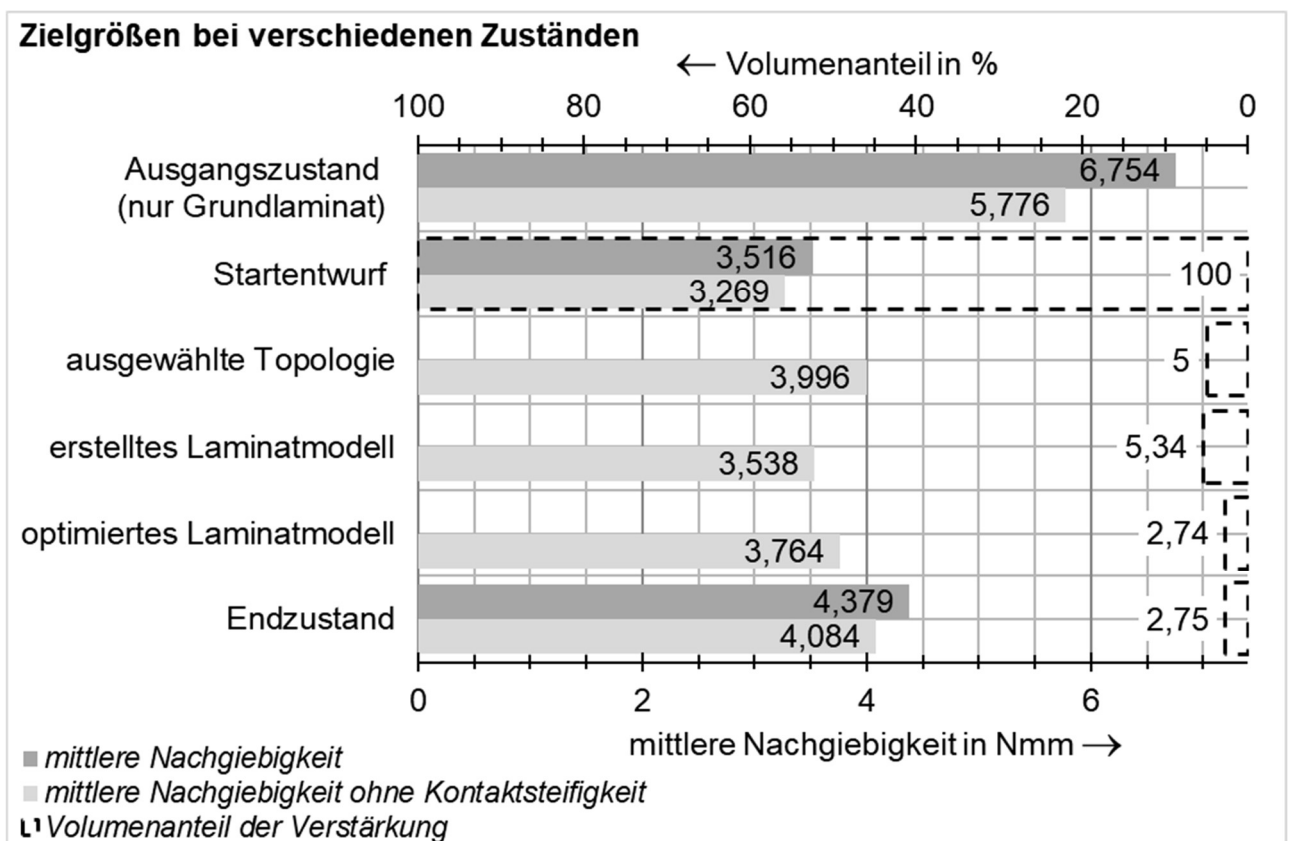


Bild 5.9: Zielgrößen für verschiedene Zustände innerhalb des Optimierungsprozesses

### **Ausgangszustand**

Der Ausgangszustand beinhaltet die Bolzenverbindung ohne Verstärkung, womit allein das Grundlaminat belastet wird. Es liegt das Kontaktmodell aus Kapitel 3.2.3 mit der doppelten Last vor, die zum Laminatversagen führt ( $f_{\max} = 1,289$ ). Der Ausgangszustand bildet die Vergleichsbasis für den Optimierungsprozess.

### **Startentwurf**

Beim Startentwurf wird das Grundlaminat mit voller Füllung des Verstärkungsbaumaumes betrachtet (vgl. Bild 5.1). Dadurch kann im Vergleich zum Ausgangszustand die mittlere Nachgiebigkeit um 47,9 % reduziert und auch ein Laminatversagen vermieden werden. Der Verstärkungsbauraum ist als „konstruiert isotroper Werkstoff“ von der Festigkeitsbeurteilung ausgeschlossen.

### **Ausgewählte Topologie**

Die Topologieoptimierung verwendet zur Reduktion der Rechenzeit ein Lastmodell und kann somit keine Kontaktsteifigkeiten berücksichtigen. Die Genauigkeit dieser Kontaktlastannahme nimmt jedoch mit Veränderung der Steifigkeiten im Kraftangriffsbereich ab. Zur Quantifizierung dieses Fehlers wird für den gewählten Entwurf der Topologieoptimierung eine Kontaktanalyse durchgeführt. Die FE-Analyse mit dem verwendeten Lastmodell zeigt hierzu bei der v. Mises-Vergleichsspannung über alle Elemente eine Differenz von höchstens  $3 \text{ N/mm}^2$ . Nur bei 7 Elementen ist die Abweichung über 5 %, wovon 6 Elemente unter 10 % liegen. Bei der Verformung ist die Diskrepanz noch geringer. Die globale mittlere Nachgiebigkeit unterscheidet sich in den beiden Rechnungen um 1,5 %.

Außerdem ist eine Änderung der Elementformulierung (vgl. Anhang C) zur Durchführung der Topologieoptimierung notwendig, wodurch keine Schichtspannungen ausgegeben werden können und somit eine Festigkeitsbeurteilung nicht möglich ist. Mit einer Nachrechnung kann ein Laminatversagen ( $f_{\max} = 0,921$ ) jedoch ausgeschlossen werden. Die veränderte Elementformulierung führt zur abweichenden Berechnung der mittleren Nachgiebigkeit: bei einer Kontaktanalyse knapp 1 % und bei einer linearen FE-Analyse deutlich unter 1 %. Mit der Vernachlässigung dieser Abweichung ist im Vergleich zum Startentwurf der Anstieg der mittleren Nachgiebigkeit mit 22,2 % bei gleichzeitiger Reduzierung des Verstärkungsvolumens um 95 % eine Kompromisslösung des vorliegenden Vektoroptimierungsproblems.

### **Erstelltes Laminatmodell**

Für das Laminatmodell bleibt das in die Ebene projizierte Lastmodell ohne Berücksichtigung der Kontaktsteifigkeiten erhalten. Aufgrund des zweidimensionalen FE-Modells ist eine Kontaktanalyse in der Ebene nicht umsetzbar, womit spätestens an diesem Punkt im Optimierungsprozess eine Idealisierung der Kontaktsituation zu erfolgen hätte. Daneben finden die Berechnungen mit einem Schalenmodell statt, wodurch sich die mittlere Nachgiebigkeit

allein aufgrund der fehlenden Verformung in Laminatdickenrichtung im Vergleich zum Volumenmodell der ausgewählten Topologie reduziert. Zur weiteren Versteifung führt die Veränderung zum anisotropen Werkstoffverhalten. Mit einem leicht höheren Volumenanteil weist das erstellte Laminatmodell eine um 11,5 % verringerte mittlere Nachgiebigkeit auf. Die Volumenzunahme ist Folge der Laminatmodellerstellung. Die Erweiterung der schmalen Schichten auf Nachbarzonen, deren Schichtung zum mehrlagigen Laminaten und die pauschalisierte Teilung der Schichtdicken durch die Schichtanzahl führt in bestimmten Bereichen zu Laminatdicken über die Bauraumgrenze von 2 mm hinaus, woraus ein erhöhtes Volumen resultiert. Des Weiteren werden mit der Winkelabstufung, der Sektoreinteilung und Erweiterung der Schichten auf Nachbarzonen die individuellen Gestaltungsmöglichkeiten der Laminaterstellung genutzt. Problematisch bleiben dabei die Anordnung von Faserlagen auf Stoß sowie die trotz Erweiterung weiterhin schmalen Schichten im Kontaktbereich. Eine weitere Verbreiterung wäre sicherlich der einfacheren Fertigung dienlich, würde jedoch die konkrete Winkelverteilung im Schichtmodell (Schritt 6) noch stärker verschmieren. Zur teilweisen Berücksichtigung der Verformung in Laminatdickenrichtung und der interlaminaren Spannungen kann anders als beim Schichtmodell in Kapitel 5.3 für das Grundlaminat ein Volumenmodell verwendet werden, was die beschriebene Zunahme der mittleren Nachgiebigkeit und eine Erhöhung der Rechendauer zur Folge hätte. Davon abgesehen wird der gleiche Volumenanteil für den optimalen Entwurf wie beim reinen Schalenmodell erreicht.

### **Optimiertes Laminatmodell**

Mit der Definition der Optimierungsaufgabe in Tabelle 5.1 werden für die Schichtdicken und -winkel diskrete Werte vorgegeben. Die Abstufung dieser Schichtdicken (0,1 mm) und Schichtwinkel ( $15^\circ$ ) ist in der Praxis leicht realisierbar. Auch die Schichtdicken- und Schichtwinkloptimierung kann mit diesen diskreten Schichtgrößen ein Optimum für das erstellte Laminatmodell ermitteln. Das optimale Laminatmodell weist dabei aufgrund der diskreten Schichtgrößen eine höhere mittlere Nachgiebigkeit auf, wofür nur in etwa das halbe verfügbare Volumen von 5 % genutzt wird. Damit ist jedoch die Volumenrestriktion für die Parameteroptimierung nicht aktiv. Grund dafür ist die aktive Bauraumrestriktion im Kraftangriffsbereich, welche eine weitere Erhöhung der Schichtdicken beschränkt, und die um eine Größenordnung geringere Sensitivität der Entwurfsvariablen außerhalb des Kraftangriffsbereichs auf die Zielfunktion. Für den Optimierungsalgorithmus führt eine Zunahme der Schichtdicken außerhalb des Kraftangriffsbereichs zu unwesentlichen Verbesserungen der Zielfunktion. Weitere exemplarische Optimierungen mit gleichen Laminatmodell aber mit höheren zulässigen Gesamtlaminatdicken  $t_{\text{ges,zul}}$  (5 mm, 10 mm, 20 mm, 50 mm) stützen diese Erkenntnis. Die Schichtdicken werden vorwiegend im Kraftangriffsbereich bis zur Bauraumgrenze erhöht. Lediglich bei der Optimierung mit  $t_{\text{ges,zul}} = 50$  mm wird die Bauraumgrenze nicht ganz erreicht. Die einzelnen Optimierungen liefern folgende Ergebnisse:

- $t_{\text{ges,zul}} = 2 \text{ mm}$ :  $C = 3,764 \text{ Nmm}$ , Volumenanteil von 2,74 % (vgl. Tabelle 5.3)
- $t_{\text{ges,zul}} = 5 \text{ mm}$ :  $C = 3,582 \text{ Nmm}$ , Volumenanteil von 2,99 %
- $t_{\text{ges,zul}} = 10 \text{ mm}$ :  $C = 3,366 \text{ Nmm}$ , Volumenanteil von 4,02 %
- $t_{\text{ges,zul}} = 20 \text{ mm}$ :  $C = 3,256 \text{ Nmm}$ , Volumenanteil von 4,52 %
- $t_{\text{ges,zul}} = 50 \text{ mm}$ :  $C = 3,215 \text{ Nmm}$ , Volumenanteil von 4,54 %

Auch in Optimierungen mit kontinuierlichen Entwurfsvariablen wird für das vorliegende Optimierungsproblem die Volumenrestriktion aufgrund der Bauraumbegrenzung nicht erreicht.

Im Vergleich zu den Schichtdicken können die Schichtwinkel kaum zur Verbesserung der Zielfunktion beitragen, da diese durch die Ergebnisse der Topologieoptimierung an die Lastpfade angelehnt sind. Trotzdem ist es wichtig die Schichtwinkel als Entwurfsvariablen zu definieren, da durch die individuelle Laminatmodellerstellung gegebenenfalls andere Winkelkombinationen eine bessere Zielerfüllung ermöglichen. Daneben ist die Laminatfestigkeit wesentlich von den Schichtwinkeln abhängig. Für das optimale Laminatmodell wird die Festigkeitsgrenze nicht erreicht (vgl. Tabelle 5.3). Eine aktive Festigkeitsrestriktion würde sich für das vorliegende Optimierungsproblem nur ergeben, wenn die Zielfunktion durch Reduktion der Schichtdicken oder Drehung der Schichtwinkel aus der Lastrichtung heraus verschlechtert wird.

Zur Überprüfung des Optimums werden verschiedene Untersuchungen durchgeführt:

- Eine nachträgliche Erhöhung der Schichtdicken des mittleren und des Randsektors unter Beachtung der Bauraumgrenze bis zur aktiven Volumenrestriktion verbessert die Zielfunktion lediglich um ca. 3 % und benötigt dafür nahezu das doppelte Volumen.
- Eine Optimierung des Optimalentwurfs des vorliegenden Laminatmodells mit Entwurfsvariablen außerhalb des Kraftangriffsbereichs (radial anliegende Schichten des inneren Sektors bleiben unverändert) liefert bei nahezu gleichem Materialeinsatz (Abweichung < 0,2 %) eine um 0,7 % niedrigere mittlere Nachgiebigkeit.
- Eine Optimierung des erstellten Laminatmodells mit einem zulässigen Bauraumvolumen zwischen 4,5 % und 5 % liefert aufgrund einer Verletzung der Bauraumgrenze einen unzulässigen Entwurf, womit der Optimierer keinen Entwurf in der Umgebung der Volumenrestriktion finden kann.
- Bei einer mehrfachen Durchführung der selben Optimierung können bei 5 zusätzlichen Durchläufen Schwankungen um das ursprüngliche Optimum unter 0,2 % erfasst werden.
- Eine erneute Optimierung des optimalen Entwurfs bewirkt nahezu keine Veränderung (Abweichung < 0,4 %).

- Optimierungen mit kontinuierlichen Entwurfsvariablen mit anschließender, automatischer Optimierung des ermittelten Optimalentwurfs mit diskreten Entwurfsvariablen zeigen Veränderungen der Zielfunktion unter 1,5 %.

Weitere Optimierungen mit verschiedenen Startentwürfen und kontinuierlichen Entwurfsvariablen sind in Bild 5.10 dargestellt. Hierbei sind die Konvergenzverläufe aufgetragen, wobei für den Verlauf des verwendeten, optimalen Entwurfs (schwarz) ein Band die Abweichungen bis zu 1 % anzeigt.

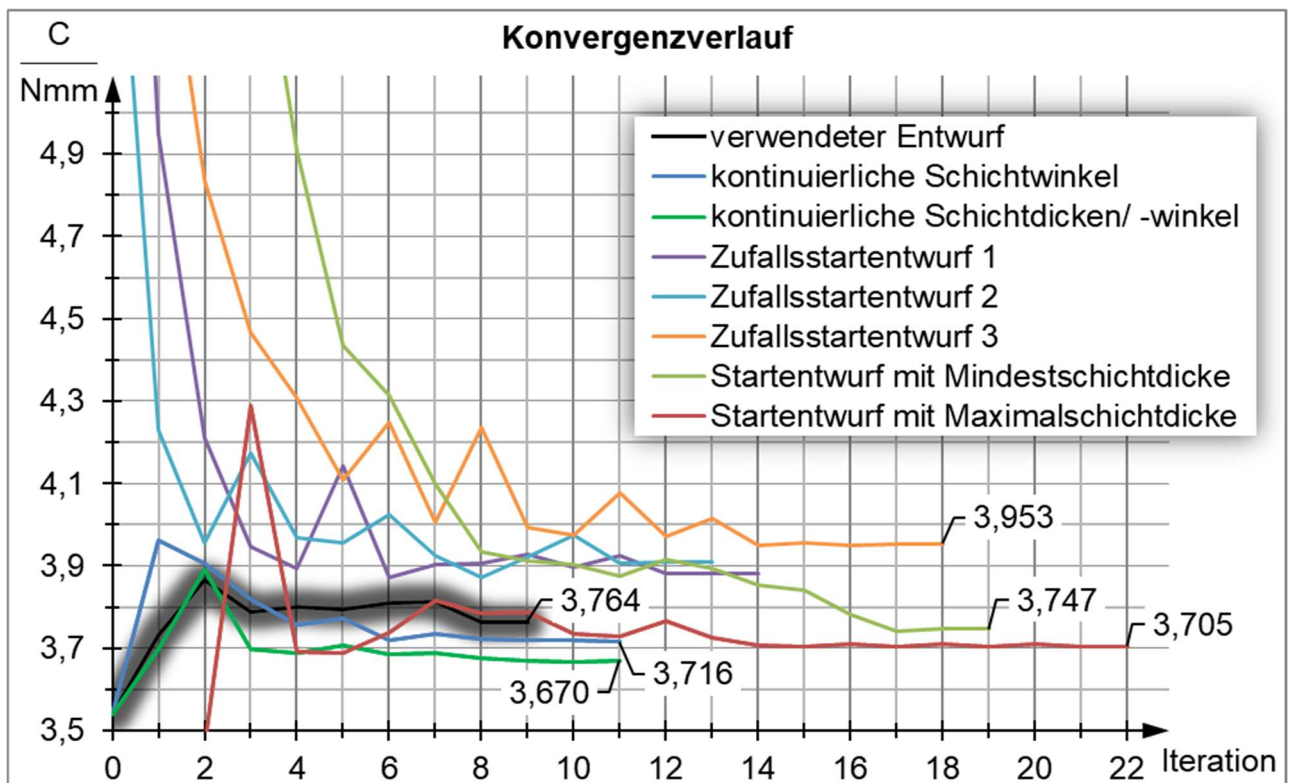


Bild 5.10: Konvergenzverlauf einiger Optimierungen mit verschiedenen Startentwürfen

Bei allen Optimierungen kommt es zur weichen Konvergenz (soft convergence, vgl. Kapitel 2.3.3), die auch bei Mehrfachausführung derselben Optimierung in 4 von 6 Fällen mit Abweichungen, wie oben beschrieben, unter 0,2 % auftritt. Bei allen durchgeführten Optimierungen mit dem erstellten Laminatmodell und diskreten Entwurfsvariablen kommt es in 14 von 16 Fällen zur weichen Konvergenz. Mit der gleichen Erkenntnis wie in Kapitel 4.3.2 scheint unter den gegebenen Voraussetzungen – kontinuierlicher Optimierungsalgorithmus, diskrete Entwurfsvariablen, stark einschränkende Restriktionen, voroptimierter Startentwurf, niedrige Konvergenzbedingung von 0,1 % – eine reguläre Konvergenz die Ausnahme zu sein. Für den schwarzen Verlauf des verwendeten Entwurfs wird von Iteration 7 zu Iteration 8 eine Verbesserung der Zielfunktion von 1,2 % erreicht. Ferner liefern die Optimierungen mit den zufällig generierten Startwerten für die diskreten Entwurfsvariablen (violett, hellblau,

orange) schlechtere Zielfunktionswerte als der verwendete Entwurf. Wohingegen die Optimierungen mit kontinuierlichen Schichtdicken und -winkeln (grün) sowie mit kontinuierlichen Schichtwinkeln aber diskreten Schichtdicken (blau) bessere Entwürfe liefern. Ebenso ergeben sich für Startentwürfe mit den Schichtwinkeln des erstellten Laminatmodells und der Mindestdicke (0,1 mm, hellgrün) oder der Maximaldicke (2 mm, rot) für alle Schichten niedrigere Zielfunktionswerte. Die größte Abweichung zum verwendeten Entwurf zeigt mit 5,0 % der orangene Verlauf. Der beste Entwurf des grünen Verlaufs ist um 2,5 % besser als der verwendete Entwurf. Mit 0,5 % (hellgrün) und 1,6 % (rot) zeigen die Optimierungen mit den extremen Startentwürfen ebenfalls leicht verbesserte Entwürfe.

Alle Optimierungen zur Untersuchung des mit dem LTgSL-Verfahren erreichten Optimums (Kapitel 5.3) zeigen bei nahezu gleichem Materialeinsatz (Abweichung  $< 0,6\%$ ) ein ähnliches Minimum der Zielfunktion auf. Die Abweichungen sind allesamt unter 5 %, wobei eher Unterschiede um die 1 % festzustellen sind. Bei den relevanten Entwurfsvariablen im Kraftangriffsbereich, die Optimierungen mit kontinuierlichen Werte mit inbegriffen, treten kaum Schwankungen auf. Damit kann der verwendete Entwurf mit geringer Ungenauigkeit als bestmöglicher Entwurf angesehen werden. Abgesehen davon zeigt die Festigkeitsbeurteilung bis zum Erreichen der Versagenslast weiteren Spielraum für eine Lasterhöhung. Die Festigkeitsrestriktion bleibt für den optimalen Entwurf inaktiv, steuert aber insbesondere während der ersten Iterationen den Weg des Optimierers. Optimierungen ohne Festigkeitsrestriktion liefern beinahe das gleiche Ergebnis, können aber nicht von vornherein ein Laminatversagen ausschließen.

Die Parameteroptimierung findet, wie in Kapitel 5.2 unter Schritt 4 beschrieben, mit einem Lastmodell auf Basis eines programmtechnischen Ansatzes statt. Die Projektion dieser dreidimensionalen Last in die Schalenebene erzeugt ein Versatzmoment (vgl. Bild 5.5). Die Abbildung dieses zweidimensionalen Lastmodells durch einen theoretischen Modellansatz, beispielsweise in Anlehnung an Gleichung (2.31), ist grundsätzlich möglich, gestaltet sich jedoch insbesondere durch das Versatzmoment als komplexer und aufwendiger in der Umsetzung: die Knotenpositionen und die Knotenkräfte aus den theoretischen Kraftverläufen werden je Knotenebene benötigt. Voruntersuchungen mit programmtechnischen und theoretischen Lastmodellen jeweils ohne Versatzmoment zeigen bei der Zielerfüllung und der Gesamtlast mit Abweichungen unter 9 % eine gute Übereinstimmung. Der theoretische Modellansatz basiert dabei auf der Annahme eines isotropen Werkstoffverhaltens mit den globalen Steifigkeiten eines quasiisotropen Laminats (vgl. Kapitel 5.1 Schritt 1).

### **Endzustand**

Die Überführung des optimierten Laminatmodells zum Volumenmodell (vgl. Kapitel 5.4) muss sorgsam kontrolliert werden, da durch einen Fehler in der programminternen Ausgabe

ein paar Schichten nicht übertragen werden. Diese Problematik tritt bei verschiedenen Laminatmodellen der Bolzenverbindung auf, eine Gesetzmäßigkeit oder die Ursache hierfür kann daraus aber nicht abgeleitet werden. Die fehlenden Schichten müssen deshalb mit der Kenntnis über die Entwurfsvariablen manuell erstellt werden.

Die Sektoren dienen innerhalb der Parameteroptimierung der differenzierten Behandlung der Innen- und Randbereiche und werden für den endgültigen Entwurf wieder verbunden, um durchgehende, zusammenhängende Schichten zu erhalten. Dadurch ist eine realitätsnähere Betrachtung des Spannungs- und Verformungszustands möglich. Zudem führt die Verbindung der Sektoren im Vergleich zum optimierten Laminatmodell zu einer minimalen Volumenzunahme, wie in Bild 5.9 ersichtlich ist. Die Modellierung der Leerräume durch eine Matrix (vgl. Kapitel 5.4) trägt ebenso dazu bei. Die Zunahme der mittleren Nachgiebigkeit ist hierbei mit der nun auftretenden Deformation in Laminatdickenrichtung zu begründen. Ferner wird mit der Füllung der Leerräume die auftretende Kerbwirkung an den Elementknoten der Leerraumränder abgemindert. Der Einfluss der Matrixfüllung auf die mittlere Nachgiebigkeit liegt unter 0,1 %. In der gleichen Größenordnung weisen Voruntersuchungen mit verschiedenen Lagenanordnungen im Kontaktbereich Schwankung der Zielfunktion auf. Eine Optimierung der Lagenanordnung ist hierbei aufgrund der Vielzahl an Schichten sowie der daraus resultierenden langen Rechendauer und Konvergenzproblematik kaum umsetzbar. Zudem ist der Nutzen für das hier insgesamt symmetrische Laminat eher gering. Zudem kann mit der Erstellung des Laminatmodells (Schritt 7, Kapitel 5.3) eine auf Erfahrungswerten basierte geschickte Anordnung umgesetzt werden. Mit einem derartigen Laminataufbau könnte eventuell die Anzahl der Harztaschen im Kontaktbereich reduziert oder die Pressung der oberen Laminatkante verringert werden (vgl. Bild 3.11).

Mit dem vorliegenden Endzustand kann im Vergleich

- zur ausgewählten Topologie (isotrope Verstärkung) mit knapp dem halben Volumen eine Steigerung der mittleren Nachgiebigkeit um 2,2 % ermittelt werden,
- zum Startentwurf mit voller Bauraumfüllung eine um 24,5 % erhöhte mittlere Nachgiebigkeit mit einem um 97,25 % reduzierten Verstärkungsvolumen erreicht werden und im Vergleich
- zum Ausgangszustand mit 2,75 % des gesamten Volumens des Verstärkungsbauraums die mittlere Nachgiebigkeit um 35,2 % gesenkt und ein Laminatversagen vermieden werden.

Neben der Festigkeitsbeurteilung mit den Versagenskriterien nach PUCK wird die Delaminationsneigung für den Endzustand und die vorausgegangenen Zustände zusätzlich mittels des Bindungsfehlerkriteriums gemäß Gleichung (2.24) betrachtet. Die Delamination ist für den symmetrischen Laminataufbau und die geringen Spannungen in Laminatdickenrichtung stets unkritisch.

### 5.5.2 Vergleichsmodelle zur Bewertung des endgültigen Entwurfs

Eine Gegenüberstellung von verschiedenen Vergleichsmodellen und dem endgültigen Entwurf soll das Ergebnis des Optimierungsprozesses (Kapiteln 5.1 bis 5.4) beurteilen. Diese Vergleichsmodelle sind konventionelle Verstärkungsmaßnahmen (vgl. Kapitel 2.1.4), andere Startentwürfe und deren Optimierungsergebnisse. Eine Auflistung der Vergleichsmodelle ist in Tabelle 5.4 bis Tabelle 5.6 aufgeführt.

Modellbezeichnung	Art der Rechnung	Bauraumfüllung / Topologie	Verstärkung / Startlaminat	Strukturantwort <sup>35</sup>
<i>Endgültiger Entwurf nach Kap. 5.4</i>	LTgSL-Verfahren	zu 2,75 % gefüllt, laut Bild 5.4	Laminatmodell laut Kap. 5.3	$C = 4,379 \text{ Nmm}$ $f_{\max} = 0,973$
<i>Radial_V2,75%</i>	Struktur-analyse	zu 2,83 % gefüllt, Ring- $\varnothing$ 27,99 mm	Radial angeordnet laut Bild 5.11	$C = 4,844 \text{ Nmm}$ $f_{\max} = 0,956$
<i>Radial_V5%</i>		zu 4,98 % gefüllt, Ring- $\varnothing$ 36,49 mm	Radial angeord. (vgl. Bild 5.11)	$C = 4,522 \text{ Nmm}$ $f_{\max} = 0,911$
<i>Ring_UD0°_V2,75%</i>		zu 2,83% gefüllt Ring- $\varnothing$ 27,99 mm	unidirekt. 0°-Laminat (vgl. Bild 5.11)	$C = 4,923 \text{ Nmm}$ $f_{\max} = 1,017$
<i>Schlaufe_V2,75%</i>	Struktur-analyse	zu 2,78 % gefüllt, Schlaufen- $\varnothing$ 13,24 mm	Schlaufe laut Bild 5.12	$C = 5,498 \text{ Nmm}$ $f_{\max} = 1,211$
<i>Schlaufe_V5%</i>		zu 5,05 % gefüllt, Schlaufen- $\varnothing$ 17,29 mm	Schlaufe (vgl. Bild 5.12)	$C = 5,216 \text{ Nmm}$ $f_{\max} = 1,197$
<i>Grund_Optima</i>	Struktur-analyse	zu 5,87 % gefüllt, laut Bild 5.13	Grundlaminat (vgl. Bild 5.1)	$C = 4,286 \text{ Nmm}$ $f_{\max} = 0,941$
<i>UD0°_Optima</i>	Struktur-analyse	zu 5,7 % gefüllt, laut Bild 5.13	unidirektionales 0°-Laminat	$C = 4,321 \text{ Nmm}$ $f_{\max} = 0,958$
<i>UD0°_1ES</i>		zu 5 % gefüllt, kompl. Bauraum zu 0,1 mm gefüllt		$C = 5,867 \text{ Nmm}$ $f_{\max} = 1,254$

Tabelle 5.4: Vergleichsmodelle für eine konventionelle Verstärkung

Die Strukturberechnungen und Optimierungen werden mit verschiedenen Füllgraden und Topologien des Verstärkungsbaureums durchgeführt, wobei wie bisher der symmetrische Aufbau von Grundlaminat und beidseitiger Verstärkung beibehalten wird. Die Verstärkungen

<sup>35</sup>  $f_{\max}$ : Höchstwert jedes Elements und jeder Auswertungsebene (Schichtunterseite, -mittelebene und Schichtoberseite) aller Versagensmodi nach PUCK (vgl. Kapitel 2.1.3).



werden dabei durch unterschiedliche Laminare modelliert. Bis auf die Dicken- und Winkeloptimierung kommen Volumenmodelle mit Kontaktmodell oder bei der Topologieoptimierung mit entsprechendem Lastmodell zum Einsatz. Neben dem Volumen und der mittleren Nachgiebigkeit wird zum Vergleich die Anstrengung der Struktur in Form des maximalen Bruchfunktionswertes verwendet. Man beachte, dass für die Topologieoptimierung (vgl. Tabelle 5.5) die mittlere Nachgiebigkeit ohne die Kontaktsteifigkeit angegeben ist. Ferner ist zum Vergleich in der jeweiligen Tabelle der beste bzw. endgültige Entwurf aus Kapitel 5.3 und 5.4 aufgeführt.

***Radial\_V2,75%, Radial\_V5%, Ring\_UD0°\_V2,75%, Schlaufe\_V2,75%, Schlaufe\_V5%:***

Für die ring- und schlaufenförmigen Topologien werden die Füllgrade des endgültigen Entwurfs und der Volumenrestriktion (5 %) angestrebt, wobei auf eine glatte Grenzfläche geachtet wird. Da nun die Elemente nur reihenweise hinzugefügt oder entfernt werden können, werden diese Bauraumfüllungen nur näherungsweise erreicht. Die exemplarischen Modelle sind in Bild 5.11 und 5.12 dargestellt. Darin ist die Winkeleinteilung der radialen Elementreihen aufgeführt. Diese ergibt sich aus der gleichmäßigen Aufteilung der 256 Elemente am Lochrand zu  $1,40625^\circ$ , wobei von der  $x$ -Achse in positive und negative Umfangsrichtung je Elementreihe  $i$  gezählt wird. Die radial (*Radial\_V2,75%, Radial\_V5%*) und tangential (*Schlaufe\_V2,75%, Schlaufe\_V5%*) anliegenden Schichten unterscheiden sich dabei um  $90^\circ$ . Zur Einhaltung des obigen Einteilungswinkels werden für die Elementreihen direkt an der  $x$ -Achse, die durch die Elementknoten verläuft, die Winkel  $\pm 0,703125^\circ$  für die radiale Verstärkung und  $\pm 89,296875^\circ$  für die tangentiale Verstärkung festgelegt. Bei den Schlaufenverstärkungen wird nur der halbe Lochrand umschlossen und mit zwei parallelen Streifen, die tangential am Lochrand anliegen und zur Lagerung verlaufen, erweitert (vgl. Bild 5.12). Für das Modell *Ring\_UD0°\_V2,75%* wird der Faserwinkel aller Verstärkungselemente (vgl. Bild 5.11) in  $x$ -Richtung (= Lastrichtung) angeordnet.

Die Ergebnisse in Tabelle 5.4 zeigen, dass im Vergleich zur Schlaufenverstärkung (*Schlaufe\_V2,75%, Schlaufe\_V5%*) die radial am Lochrand (*Radial\_V2,75%, Radial\_V5%*) angeordneten Fasern eine um 11,9 % bzw. 13,3 % niedrigere mittlere Nachgiebigkeit bewirken. Zudem weist die Schlaufenverstärkung Festigkeitsprobleme auf. Für die hier vorliegende Bolzenverbindung werden die quer zur Last anliegenden Fasern zu stark beansprucht. Zudem wird durch die geringere Steifigkeit der Schlaufe im Kontaktbereich das Grundlaminat kaum entlastet. Eine reine unidirektionale  $0^\circ$ -Verstärkungen (*Ring\_UD0°\_V2,75%*) führt ebenso zum Laminatversagen. Die Verteilung der Bruchfunktionswerte ist in Bild 5.14 dargestellt. Eine deutliche Erhöhung des Volumens hat bei der Radialverstärkung wie auch bei der Schlaufenverstärkung nur einen geringen Mehrwert ( $< 8\%$ ) für die mittlere Nachgiebigkeit, was für eine Topologie- oder Gestaltänderung spricht, um klare Verbesserungen der Zielfunktion zu erreichen.

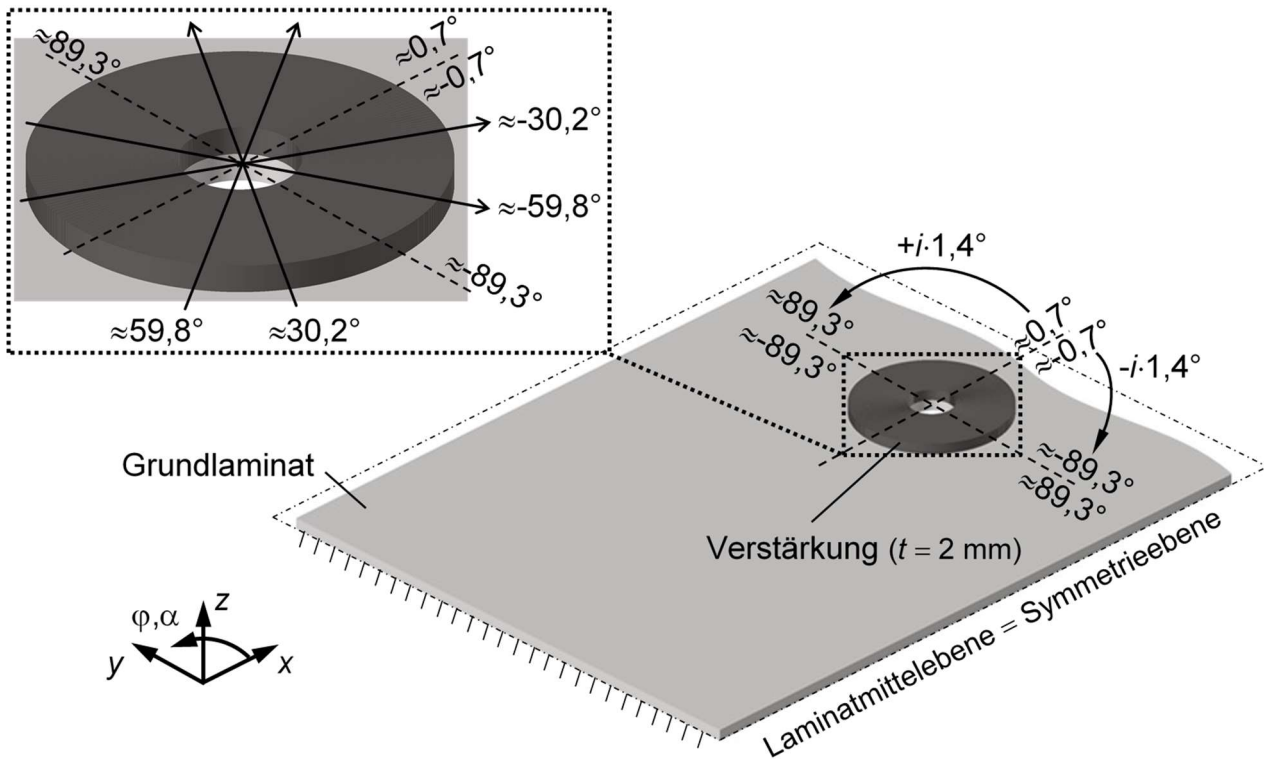


Bild 5.11: Ringförmige Verstärkungen des Grundlaminats am Beispiel des Modells *Radial\_V2,75%*

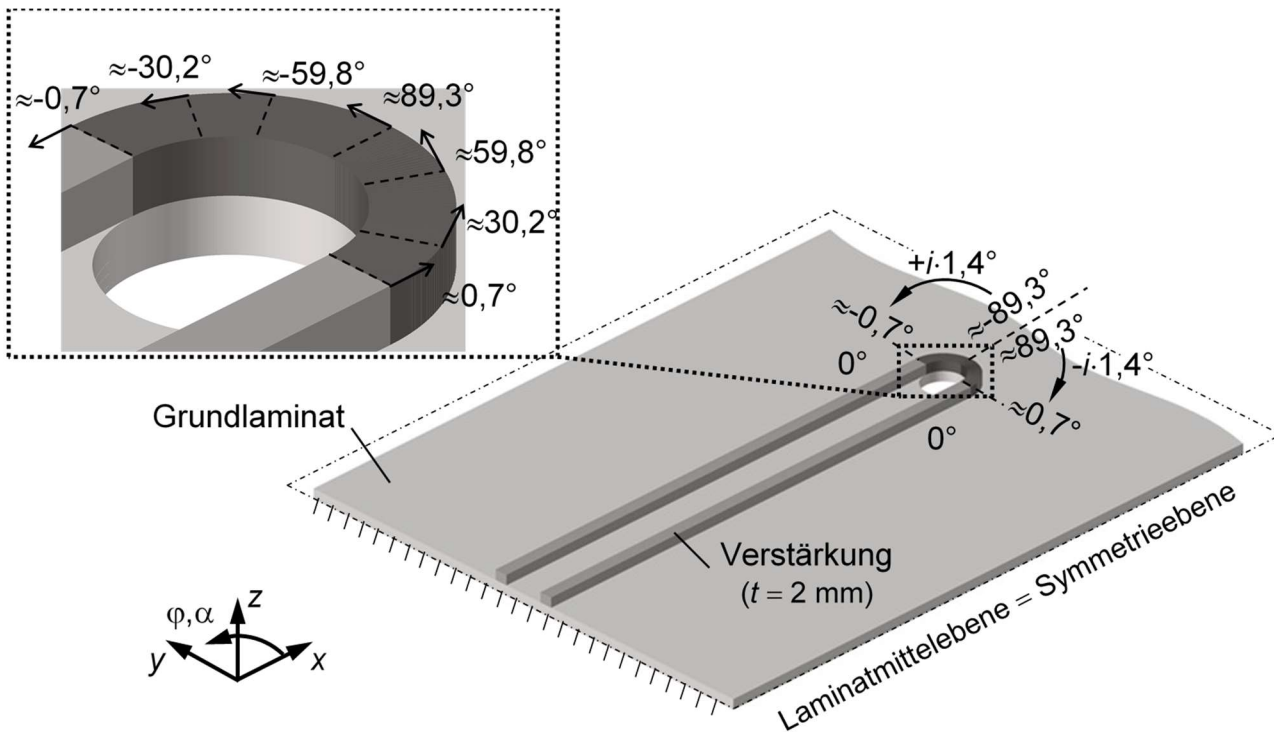


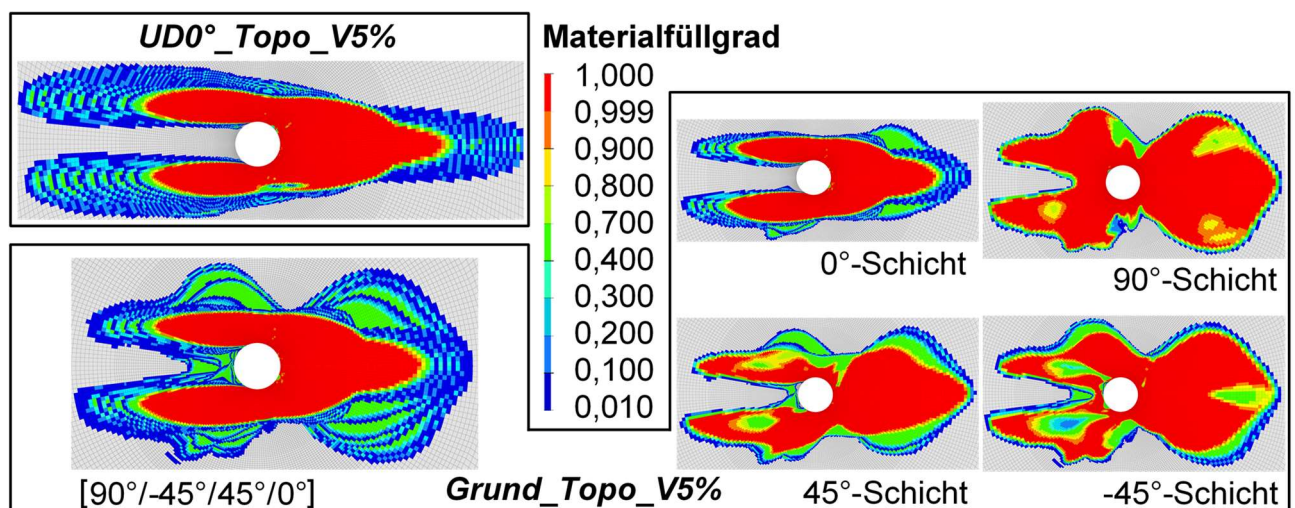
Bild 5.12: Schlaufenförmige Verstärkungen des Grundlaminats am Beispiel des Modells *Schlaufe\_V2,75%*

Modellbezeichnung	Art der Rechnung	Bauraumfüllung / Topologie	Verstärkung / Startlaminat	Strukturantwort <sup>36</sup>
<i>Endgültiger Entwurf nach Kap. 5.4</i>	LTgSL-Verfahren	zu 2,75 % gefüllt, laut Bild 5.4	Laminatmodell laut Kap. 5.3	$C = 4,084 \text{ Nmm}$
<i>Grund_Topo_V5%</i>	Topologieoptimierung mit Lastmodell	zu 5 % gefüllt, laut Bild 5.13	Grundlaminat (vgl. Bild 5.1)	$C = 4,028 \text{ Nmm}$
<i>UD0°_Topo_V5%</i>	Topologieoptimierung mit Lastmodell	zu 5 % gefüllt, laut Bild 5.13	unidirekt. 0°-Laminat	$C = 4,039 \text{ Nmm}$

Tabelle 5.5: Topologieoptimierungsergebnisse der Vergleichsmodelle für die Verstärkung

**Grund\_Topo\_V5%, Grund\_Optima, UD0°\_Topo\_V5%, UD0°\_Optima, UD0°\_1ES:**

Die beiden Topologieoptimierungen (*Grund\_Topo\_V5%*, *UD0°\_Topo\_V5%*) werden mit einer Grundlaminatverstärkung und einer unidirektionalen 0°-Laminatverstärkung für den kompletten Bauraum durchgeführt. Die dabei ermittelte Materialfüllgradverteilung ist in Bild 5.13 dargestellt. Die Ausschnitte zeigen die Materialfüllung des Verstärkungsbaureums, wobei das vollgefüllte Grundlaminat grau abgebildet ist. Zudem sind für die Grundlaminatverstärkung (*Grund\_Topo\_V5%*) die Materialfüllgrade insgesamt und je Schicht aufgeführt. Der Einfluss der übrigen Schichten auf die 0°-Schicht ist im Vergleich zur 0°-Laminatverstärkung (*UD0°\_Topo\_V5%*) zu erkennen. Die Ausprägung in Längsrichtung fällt geringer aus und die Ausdehnung in Breitenrichtung bildet sich unsymmetrisch aus.

Bild 5.13: Materialfüllgrad der Topologieoptimierungen mit der Grundlaminatverstärkung (*Grund\_Topo\_V5%*) und der 0°-Laminatverstärkung (*UD0°\_Topo\_V5%*)<sup>36</sup> mittlere Nachgiebigkeit ohne Kontaktsteifigkeit

Die Nachrechnungen (*Grund\_Optima*, *UD0°\_Optima*, vgl. Tabelle 5.4) der Topologieoptimierungsergebnisse zeigen zudem eine ausreichende Festigkeit des Laminats. Für die Nachrechnungsmodelle erhalten die in Bild 5.13 dargestellten Elemente mit einem Materialfüllgrad  $\chi_i > 0,01$  eine vollständige Materialfüllung, wodurch das Volumen die 5 % Restriktion übersteigt. Separat hierzu wird für die 0°-Laminatverstärkung eine Strukturanalyse mit 5-prozentiger Bauraumfüllung, die durch eine einzige Einzelschicht mit 0,1 mm Dicke modelliert wird, durchgeführt (*UD0°\_1ES*, vgl. Tabelle 5.4). Die hierbei erzielten Ergebnisse weisen jedoch eine deutlich erhöhte mittlere Nachgiebigkeit und ein Laminatversagen (vgl. Bild 5.14) auf. Eine lokale Materialanhäufung, wie bei den restlichen Vergleichsmodellen, dient der besseren Zielerfüllung.

Modellbezeichnung	Art der Rechnung	Bauraumfüllung / Topologie	Verstärkung / Startlaminat	Strukturantwort <sup>37</sup>
<i>Bester Entwurf laut Tabelle 5.3</i>	LTgSL-Verfahren	zu 2,74 % gefüllt, laut Bild 5.4	Laminatmodell laut Kap. 5.3	$C = 3,764 \text{ Nmm}$ $f_{\max} = 0,713$
<i>LamMod_allUD0°</i>	Dicken- und Winkeloptimierung	$t_{\text{Verst}} = 1,4 \text{ mm}$ (4,9 % Füllung), laut Bild 5.4	Unidirekt. 0°-Laminat	$C = 4,570 \text{ Nmm}$ $f_{\max} = 0,646$
<i>LamMod_quasiiso</i>			[90°/-45°/45°/0°]	$C = 4,426 \text{ Nmm}$ $f_{\max} = 0,518$
<i>LamMod_allAlpha</i>			[90°/75°/-75°/60°/-60°/45°/-45°/30°/-30°/15°/-15°/0°]	$C = 4,386 \text{ Nmm}$ $f_{\max} = 0,349$

Tabelle 5.6: Optimierungsergebnisse der Laminatvergleichsmodelle für die Verstärkung

#### ***LamMod\_allUD0°*, *LamMod\_quasiiso*, *LamMod\_allAlpha*:**

Die in Bild 5.4 dargestellte zweidimensionale Topologie wird für die drei Dicken- und Winkeloptimierungen als Verstärkungsbauraum verwendet. Dabei werden, mit Ausnahme des Grundlaminats, für alle Elemente ein unidirektionales Laminat (*LamMod\_allUD0°*), ein [90°/±45°/0°]-Laminat (*LamMod\_quasiiso*) oder ein Laminat mit allen diskreten, in 15° abgestuften Winkeln (*LamMod\_allAlpha*) definiert. Für die drei Modelle werden mit einer konstanten Laminatdicke von  $t_{\text{Verst}} = 1,4 \text{ mm}$  weiterhin Startentwürfe im zulässigen Bereich gewählt. Die Optimierungen dieser Entwürfe liefern, anders als beim Laminatmodell in Kapitel 5.3, jeweils einen optimalen Entwurf an der Volumenrestriktionsgrenze. Die nächst höhere, diskrete Laminatdicke führt zur Verletzung der Volumenrestriktion. Hierbei ist zu beachten, dass die Entwurfsvariablen sich je Schicht auf den gesamten Bauraum beziehen

<sup>37</sup>  $f_{\max}$ : Höchstwert jedes Elements und jeder Auswertungsebene (Schichtunterseite, -mittelebene und Schichtoberseite) aller Versagensmodi nach PUCK (vgl. Kapitel 2.1.3).

und nicht in Bereiche oder Sektoren unterteilt sind (vgl. Kapitel 5.3). Das optimale Verstärkungslaminat weist beim *LamMod\_allUD0°*-Modell den Startschichtwinkel von  $0^\circ$  auf und für das *LamMod\_quasiiso*-Modell ergibt sich das Laminat  $[30_3^-/30_3^+/15_3^+/0_5^+]$ . Mit dem optimalen Laminat  $[0^\circ/30^\circ/0_2^+/-30^\circ/0^\circ/-15^\circ/0_2^+/15^\circ/0_3^+/15^\circ]$  dominiert beim *LamMod\_allAlpha*-Modell die  $0^\circ$ -Schicht. Die Ergebnisse in Tabelle 5.6 zeigen, dass je mehr Entwurfsvariablen, also mehr unterschiedliche Schichten, zur Verfügung stehen, desto niedriger fällt die mittlere Nachgiebigkeit aus. Damit werden dem Optimierer mehr Möglichkeiten gewährt den besten Entwurf zu ermitteln. Das Laminatmodell in Kapitel 5.3 weist eine noch größere Anzahl an Schichten auf und kann damit eine um 13,2 %, 15,0 % oder 17,6 % niedrigere mittlere Nachgiebigkeit erreichen, wofür auch deutlich weniger Volumen benötigt wird.

Die Strukturantworten der Vergleichsmodelle in Tabelle 5.4 bis Tabelle 5.6 zeigen, dass eine konventionelle Schlaufenverstärkung (*Schlaufe\_V2,75%*, *Schlaufe\_V5%*) wie auch reine unidirektionale  $0^\circ$ -Verstärkungen (*Ring\_UD0°\_V2,75%*, *UD0°\_1ES*) ein Laminatversagen nicht verhindern können. Lediglich eine topologieoptimierte Materialanordnung (*Grund\_Optima*, *UD0°\_Optima*) oder eine Verstärkung mit radialer Faseranordnung (*Radial\_V2,75%*, *Radial\_V5%*) bewirken die notwendige Entlastung, um ein Versagen abzuwenden. Die Verteilungen der maximalen Bruchfunktionswerte im Kontaktbereich ist für repräsentative Vergleichsmodelle in Bild 5.14 dargestellt. Die Modelle mit 5 % Bauraumvolumen (*Radial\_V5%*, *Schlaufe\_V5%*) zeigen hierzu qualitativ gleiche Anstrengungen auf einem leicht veränderten Niveau. Für die Dicken- und Winkeloptimierungen sind Startentwurf und Optima ebenso vergleichbar und im unterkritischen Bereich.

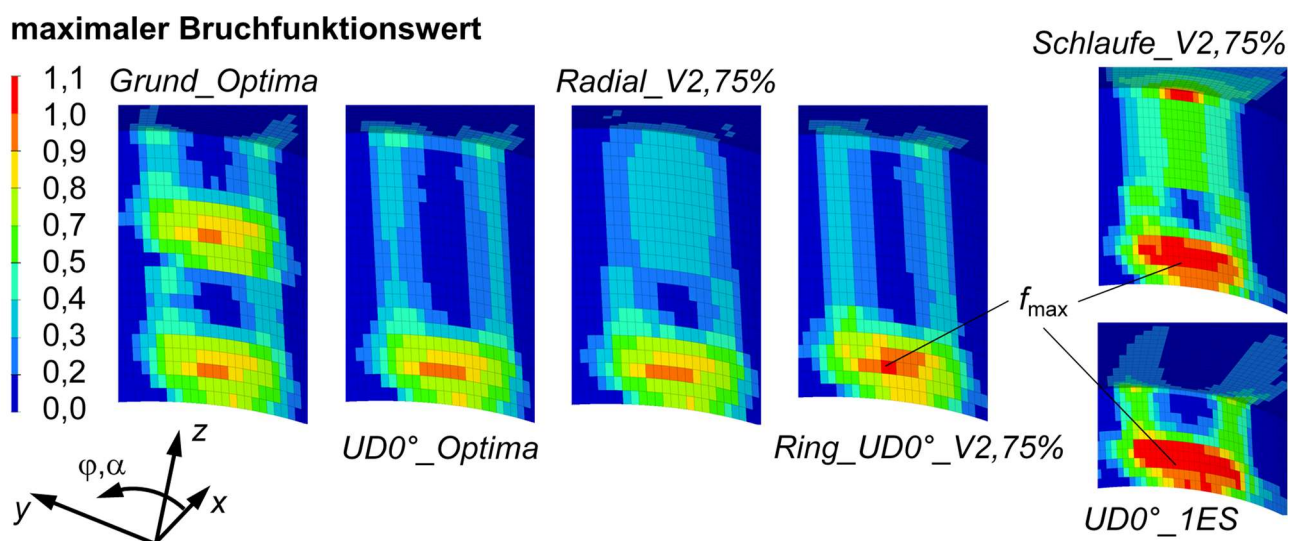


Bild 5.14: Anstrengung des Kontaktbereichs repräsentativer Vergleichsmodelle<sup>38</sup>

<sup>38</sup>  $f_{\max}$ : Höchstwert jedes Elements und jeder Auswertungsebene (Schichtunterseite, -mittelebene und Schichtoberseite) aller Versagensmodi nach PUCK (vgl. Kapitel 2.1.3).

Bei allen in Bild 5.14 dargestellten Modellen und bei anderen qualitativ vergleichbaren Modellen ist die  $-45^\circ$ -Schicht des Grundlaminats der gefährdete bzw. versagende Bereich. Daneben versagt die obere Kante des *Schlaufe\_V2,75%*-Modells.

Gemessen am endgültigen Entwurf erreicht kein Vergleichsmodell aus Tabelle 5.4 bis 5.6 bei gleichem Volumen eine niedrigere mittlere Nachgiebigkeit. Mit etwa dem doppeltem Volumen liefern lediglich die beiden Topologieoptimierungen einen leicht besseren Wert.

### 5.5.3 Dreiphasige Laminatoptimierung der Bolzenverbindung mit OptiStruct

Den Referenzprozess zum LTgSL-Verfahren stellt die in HyperWorks umgesetzte dreiphasige Laminatoptimierung dar (vgl. Kapitel 2.3). Um mit der reinen Elementdicken- und Schichtdickenoptimierung möglichst viele Faserorientierungen zu berücksichtigen und so einen allgemeinen Startentwurf, vergleichbar zur Optimierung der Bolzenverbindung in den Kapiteln 5.1 bis 5.4, zu verwenden, wird zum gegebenen Grundlaminat (vgl. Bild 5.1) für den Bauraum das Verstärkungslaminat  $[90_4/\mp 75^\circ/\mp 60^\circ/-45_2/45_2/\mp 30^\circ/\mp 15^\circ/0_4]$  gewählt. Damit kann mit der dreiphasigen Laminatoptimierung ein zulässiger Entwurf generiert werden. In Bild 5.15 sind für verschiedene Zustände dieses Prozesses die Zielgrößen dargestellt, wobei der Ausgangszustand dem aus Kapitel 5.5.1 entspricht und nur zur besseren Vergleichbarkeit aufgeführt ist.

#### **Startentwurf**

Die Verstärkung des Grundlaminats mit obigem Verstärkungslaminat für den gesamten Bauraum ermöglicht eine Reduktion der mittleren Nachgiebigkeit um 45,5 % im Vergleich zum Ausgangszustand ohne Verstärkung. Die Verdopplung des Volumens ermöglicht zudem ein Versagen ( $f_{\max} = 0,966$ ) zu verhindern, wobei die kritischen Stellen die Kontaktbereiche der  $\pm 45^\circ$ -Schichten des Grund- und Verstärkungslaminats sind. Im Vergleich zum Bild 5.9 wird hier ebenfalls ein dreidimensionales Kontaktmodell verwendet.

#### **Elementdickenoptimierung**

Die optimale Elementdickenverteilung, wobei für jedes Element die Dicken der 20 Faserlagen als Entwurfsvariablen zur Verfügung stehen, kann nach 31 Iterationen ermittelt werden und liefert bei 5 % Verstärkungsvolumen eine um 16,1 % erhöhte mittlere Nachgiebigkeit. Der maximale Bruchfunktionswert wird deutlich auf  $f_{\max} = 0,349$  gesenkt. Man beachte hierbei jedoch, dass der Wert, anders als beim obigen Zustand „Startentwurf“, aus einer zweidimensionalen Elementformulierung herrührt. Die ermittelten Elementdicken sind links in Bild 5.16 abgebildet. Die Darstellung zeigt Elemente mit  $t > 0,02$  mm, was 1 % der Startelementdicke entspricht. Das meiste Material wird im Kontaktbereich und um das Loch

herum angeordnet. Anders als bei der Topologie in Bild 5.3 ist die Materialansammlung weitläufiger und die Dickenabstufung flacher, wodurch eine schmale Verbindung zur Lagerung aufgebaut wird. Geschuldet ist dies dem linearen Zusammenhang zwischen der Steifigkeit und der Materialfüllung, die durch die Elementdicke gesteuert wird (vgl. Kapitel 2.3).

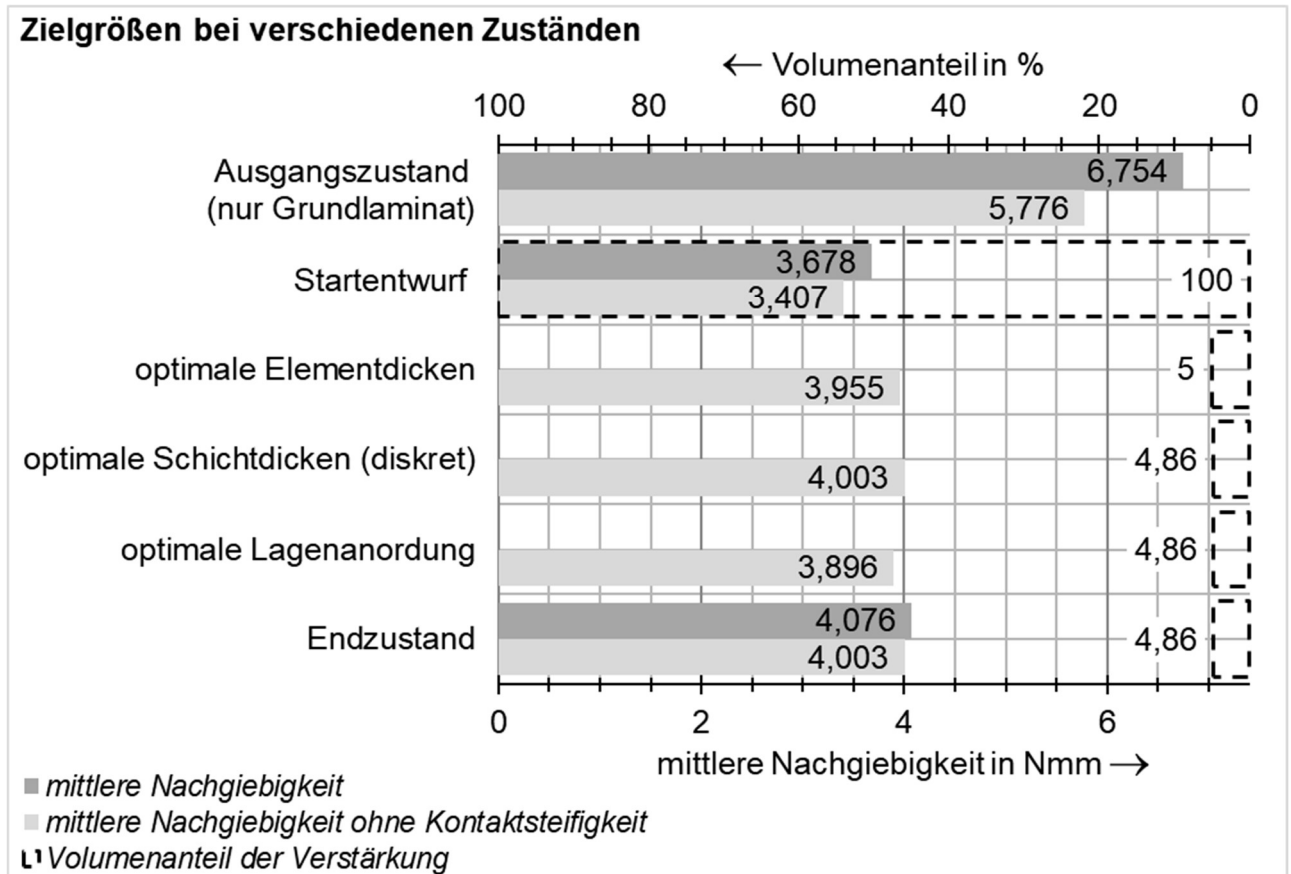


Bild 5.15: Zielgrößen verschiedener Zustände der dreiphasigen Laminatoptimierung

### **Diskrete Schichtdickenoptimierung**

Der automatische Prozess in OptiStruct generiert je zwei Schichten für jeden Faserwinkel (Einstellungen gemäß Anhang C). Die Schichtdicken werden dabei entsprechend der Elementdickenverteilung (Bild 5.16 links) berechnet, wobei Elemente mit Dicken unter 5 % der Gesamtdicke (dunkelblaue Bereiche 0,02 mm bis 0,1 mm) ignoriert werden. Zudem werden die sehr kleinen Materialansammlungen, wie in den Lagerbereichen (hellblau), und einzelne Elemente manuell entfernt. Alle generierten Schichtdicken sind größer als 0,02 mm und somit nicht aufgrund verschwindend kleiner Schichtdicke eindeutig vernachlässigbar. Mit 24 Schichten, einer Mindestschichtdicke von 0,1 mm und einer maximalen Laminatdicke von 2 mm (vgl. Tabelle 5.1) kann die diskrete Schichtdickenoptimierung keinen zulässigen Entwurf liefern. Deshalb werden einige Schichten entfernt. Hierzu werden 3 Vorgehensweisen genutzt, wobei die Dritte als Beste angesehen und deshalb für den weiteren Verlauf verwendet wird:

- V1: Alle Schichten mit einer Dicke unter 0,1 mm werden entfernt. Mit den übrigen 6 Schichten ( $\pm 45^\circ$  und je 2-mal  $0^\circ$  und  $90^\circ$ ) kann die maximale Laminatdicke aufgrund der Volumenrestriktion und der teils flächenmäßig großen Schichten nicht genutzt werden. Damit ergibt sich eine höhere mittlere Nachgiebigkeit und es kommt zum Versagen beim Endzustand.
- V2: Die Schichtanzahl wird halbiert, indem je Faserwinkel nur eine Schicht verwendet wird. Die diskrete Schichtdickenoptimierung mit den verbleibenden 12 Schichten liefert mit dem Verstärkungslaminat  $[90_3^{\circ} / \mp 75^{\circ} / \mp 60^{\circ} / -45_4^{\circ} / 45_2^{\circ} / \mp 30^{\circ} / \mp 15^{\circ} / 0_3^{\circ}]$  nach 4 Iterationen einen zulässigen Entwurf. Dabei weisen 8 der 12 verschiedenen orientierten Schichten die Mindestschichtdicke auf. Die Abweichung der Zielgrößen im Vergleich zu den optimalen Schichtdicken in Bild 5.15 liegt unter 1 %.
- V3: Die erste und zweite Vorgehensweise werden kombiniert, wodurch mit einer höheren Flexibilität für den Optimierer ein zulässiger Entwurf erreicht werden soll. Mit dem Entfernen aller Schichten mit einer Dicke unter 0,1 mm und der Reduktion auf eine Schicht je Faserwinkel findet die Optimierung mit je einer  $0^\circ$ -,  $90^\circ$ -,  $45^\circ$ - und  $-45^\circ$ -Schicht statt. Die geometrische Ausprägung dieser Schichten sind rechts in Bild 5.16 dargestellt. Der optimale Entwurf liefert nach 7 Iterationen mit dem Verstärkungslaminat  $[90^\circ / -45_7^{\circ} / 45_7^{\circ} / 0_5^{\circ}]$  die in Bild 5.15 aufgeführten Zielgrößen. Der maximale Bruchfunktionswert liegt bei  $f_{\max} = 0,474$ .

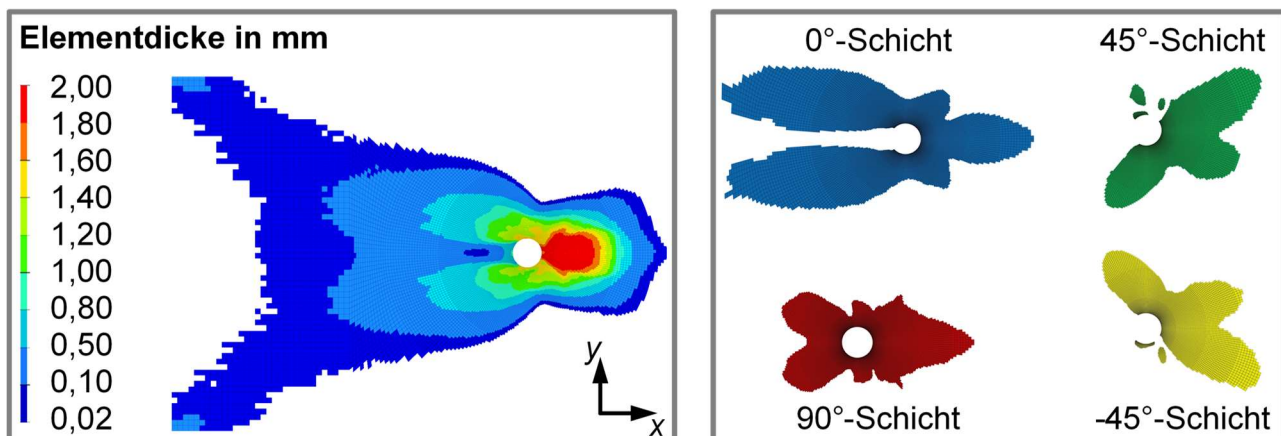


Bild 5.16: Optimale Elementdickenverteilung (links) und bereinigte Faserlagen der diskreten Schichtdickenoptimierung (rechts)

### **Optimierung der Lagenanordnung**

Die optimale Lagenanordnung des Entwurfs nach der 3. Vorgehensweise wird in 2 Iterationen ermittelt und weist eine Anordnung mit wechselnden Orientierungen auf. Das endgültige Verstärkungslaminat  $[\pm 45^\circ / (\pm 45^\circ / 0^\circ)_5 / \pm 45^\circ / 90^\circ]$  (vgl. Bild 5.17) kann die mittlere Nachgiebigkeit um 2,7 % und den maximale Bruchfunktionswert auf  $f_{\max} = 0,289$  weiter senken.



### Endzustand

Das Ergebnis der dreiphasigen Laminatoptimierung wird zum Vergleich mit dem Endzustand in Kapitel 5.4 in ein Volumenmodell mit Kontaktdefinition überführt. Das Volumenmodell des ermittelten Verstärkungslaminats ist in Bild 5.17 dargestellt. Mit der Kontaktanalyse erhält man die in Bild 5.15 aufgeführten Zielgrößen sowie einen maximalen Bruchfunktionswert von  $f_{\max} = 0,922$  und für den Bolzen eine v. Mises-Vergleichsspannung von  $\sigma_{vMises,\max} = 100,5 \text{ N/mm}^2$ . Damit fällt die Beanspruchung von Bolzen und Laminat geringer aus als beim Endzustand des LTgSL-Verfahrens. Daneben ist mit einem geringfügig höheren Volumen (+2,1 %) auch die mittlere Nachgiebigkeit um 6,9 % (2 % ohne Kontaktsteifigkeit) niedriger als beim LTgSL-Verfahren (vgl. Endzustand in Bild 5.9). Damit liefert die dreiphasige Laminatoptimierung einen Entwurf, dessen Volumenmodell eine bessere Zielerfüllung ergibt. Der eigentliche Optimierungsprozess basiert jedoch auf einem Schalenmodell, womit die Strukturantworten des Volumenmodells, also des Endzustands, innerhalb der Optimierung nicht berücksichtigt werden. Für einen Vergleich der beiden Optimierungsstrategien sind somit die Entwürfe der letzten Optimierungsschritte (vgl. optimiertes Laminatmodell in Bild 5.9 und optimale Lagenanordnung in Bild 5.15) heranzuziehen.

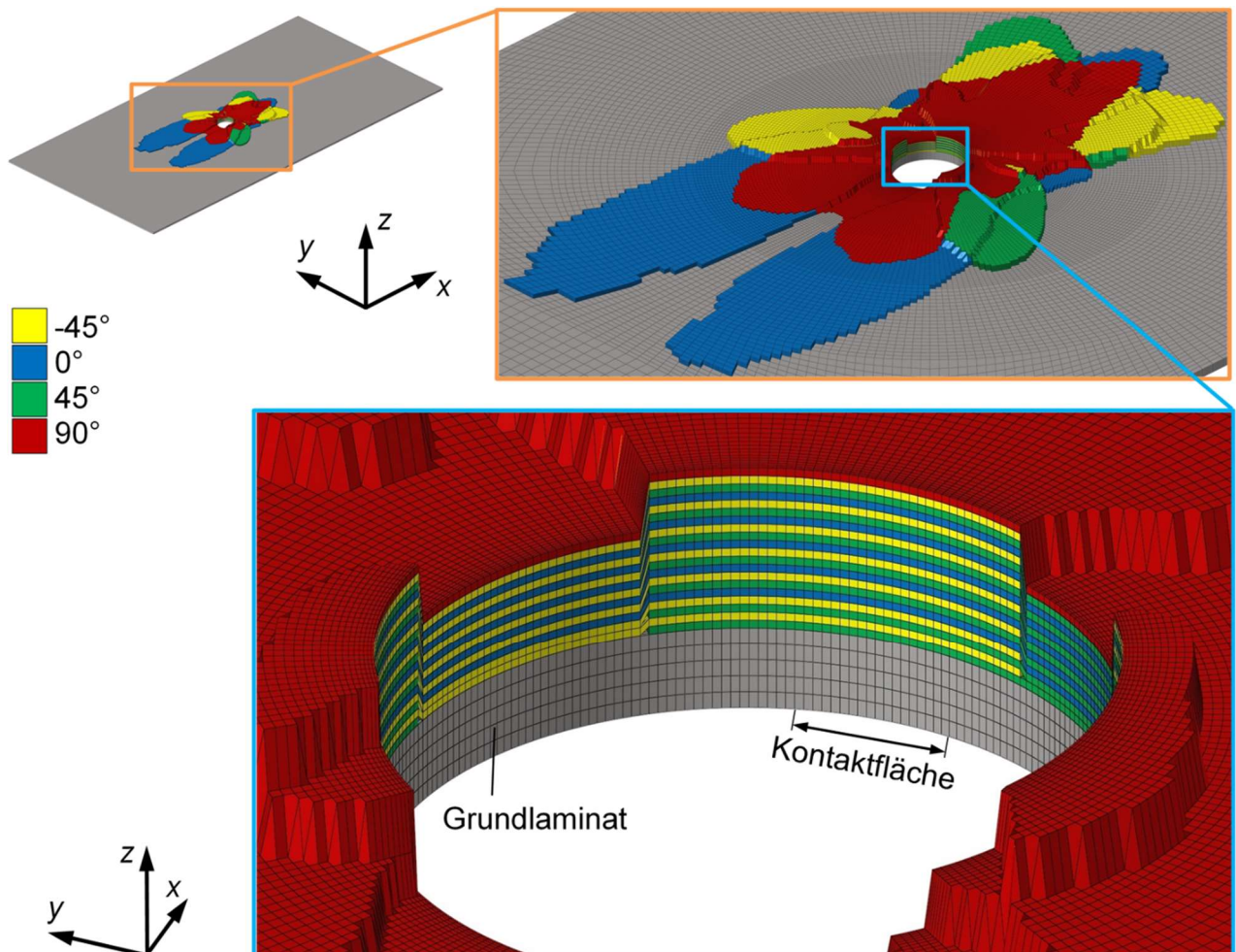


Bild 5.17: Volumenmodell des endgültigen Entwurfs der dreiphasigen Laminatoptimierung

**Vergleich der Optimierungsstrategien**

Ein Vergleich der dreiphasigen Laminatoptimierung und dem entwickelten LTgSL-Verfahren (vgl. Kapitel 4.1) ist in Tabelle 5.7 dargestellt.

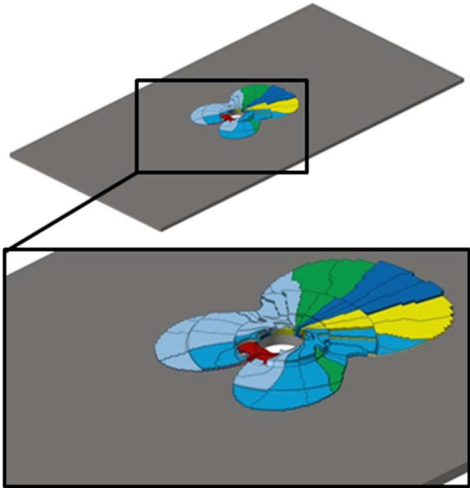
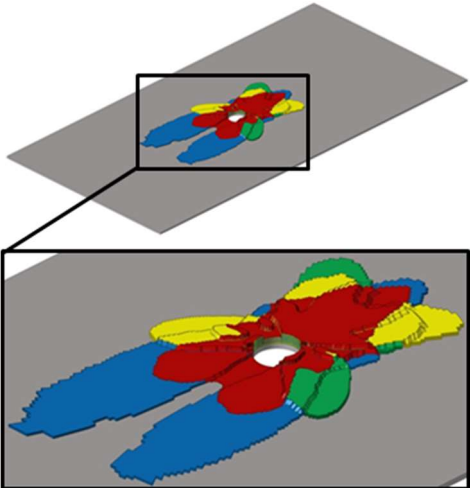
	<b>LTgSL-Verfahren</b>	<b>dreiphasige Laminatoptimierung</b>
Prozessablauf	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Topologieoptimierung</li> <li>2. Laminatmodell ableiten</li> <li>3. Schichtdicken- und Schichtwinkeloptimierung</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Elementdickenoptimierung</li> <li>2. Schichtdickenoptimierung</li> <li>3. Optimierung der Lagenanordnung</li> </ol>
Schnittstellen zwischen Prozessschritten	<ul style="list-style-type: none"> <li>• manueller Export</li> <li>• externe Bearbeitung in Excel</li> <li>• Import über Skript</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• automatischer Export</li> <li>• manueller Import mit wenigen Anpassungen</li> </ul>
Notwendige Eingriffe im Prozess	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Elemente in Zonen einordnen</li> <li>• Laminatmodell erstellen</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Elemente / Schichten löschen</li> </ul>
Startentwurf	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Volumenmodell möglich</li> <li>• generalisiert oder frei wählbar</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• nur Schalenmodell</li> <li>• frei wählbar</li> <li>• Lösungsfindung schwierig bei vielen Schichtwinkeln</li> </ul>
Bester Entwurf <sup>39</sup>	$C = 3,764 \text{ Nmm}$ $V/V_{\text{start}} = 0,0274$ $f_{\text{max}} = f_3 = 0,713$	$C = 3,896 \text{ Nmm (+3,5 \%)}$ $V/V_{\text{start}} = 0,0486 (+77,4 \%)$ $f_{\text{max}} = f_3 = 0,289 (-59,5 \%)$
Verstärkungslaminat	 <p>vgl. Bild 5.6</p>	 <p>vgl. Bild 5.17</p>

Tabelle 5.7: Das entwickelte LTgSL-Verfahren im Vergleich zum Ablauf der dreiphasigen Laminatoptimierung in HyperWorks

<sup>39</sup>  $f_{\text{max}}$ : Höchstwert jedes Elements und jeder Auswertungsebene (Schichtunterseite, -mittelebene und Schichtoberseite) aller Versagensmodi nach PUCK (vgl. Kapitel 2.1.3).  $f_3$  = ZFB Modus A

Die **dreiphasige Laminatoptimierung** als etablierter Prozess in HyperWorks zeigt eine zum LTgSL-Verfahren (vgl. Kapitel 4.1) vergleichbare Verstärkungslösung mit einem großflächigeren Verstärkungslaminat. Die etwas schlechtere mittlere Nachgiebigkeit bei leicht höherem Volumen kann jedoch nur mit einem guten Startentwurf oder, wie dieses Kapitel zeigt, mit einem starken manuellen Eingriff in die Optimierungskette erreicht werden. Ohne die Entfernung der Schichten in der 2. Optimierungsphase (diskrete Schichtdickenoptimierung) und der sehr dünnen Elemente (unter 5 % der Gesamtdicke) können die Restriktionen (Laminat-, Schichtdicke, Volumen, Festigkeit) nicht eingehalten werden. Für die Suche nach einem guten Startentwurf sowie zur Beurteilung der zu entfernenden Schichten sind einige Voruntersuchungen notwendig, was mit mehr Rechenzeit und Aufwand einhergeht. Diese Problematik tritt, wie auch Kapitel 4.3.3 zeigt, mit allgemeinen Startentwürfen auf, die eine Vielzahl an unterschiedlichen Schichtwinkeln enthalten. Mit dem generalisierten Startentwurf für die Topologieoptimierung werden diese Schwierigkeiten innerhalb des **LTgSL-Verfahrens** umgangen. Ferner erlaubt das LTgSL-Verfahren am Anfang ein Volumenmodell zu verwenden. Im weiteren Verlauf des Verfahrens wird ein Schalenmodell abgeleitet, Elemente in diskrete Zonen bzw. Schichten eingeordnet und damit eine Laminatkonfiguration erstellt. Dieses Laminatmodell ist hinsichtlich der Zielvorgaben manuell zu erstellen. Damit ist im Vergleich zum nahezu vollständig automatisierten Prozess der dreiphasigen Laminatoptimierung die Übertragung zwischen den einzelnen Optimierungsschritten manuell durchzuführen und Anpassungen mit externen Mitteln zu erledigen. Für das entwickelte LTgSL-Verfahren bleibt eine weitere Automatisierung jedoch möglich.

Insgesamt gesehen liefert das LTgSL-Verfahren einen besseren Entwurf, der eingeschränkt durch die Bauraumgrenze (Gesamtlaminatdicke) noch Volumen zur Verfügung hat, um die mittlere Nachgiebigkeit weiter zu senken. Dazu ist ein anderes Laminatmodell zu erstellen, dessen Entwurfsvariablen auch in vom Kraftangriffsbereich weiter entfernten Bereichen eine hohe Sensitivität auf die Zielgrößen aufweisen.



# Kapitel 6

## Zusammenfassung und Ausblick

Die vorliegende Arbeit widmet sich der Problematik einer Optimierung von Faserverbundkunststoffen (FVK), die in zahlreichen Literaturquellen behandelt wird und noch immer aktuell ist, wie Kapitel 1.2 zeigt. Die Komplexität der Auslegung von FVK erschwert die Verwendung eines universellen Optimierungsprozesses. Vielmehr werden für spezielle Gegebenheiten eigene Routinen und Abläufe zur Optimierung genutzt. Diese Arbeit verfolgt deshalb den Ansatz, eine Optimierungsstrategie in einer vorhandenen kommerziellen Programmumgebung zu entwickeln, die eine optimale Auslegung und Verstärkung von Bolzenverbindungen in faserverstärkten Strukturen ermöglicht. Die als **LTgSL-Verfahren** bezeichnete **Optimierungsstrategie** ist damit ein wesentlicher Punkt der Arbeit (vgl. **Kapitel 4**). Der Prozess sieht dabei eine zweistufige Optimierung, bestehend aus einer Topologieoptimierung und nachfolgender Schichtparameteroptimierung, auf Basis der FEM vor. Zwischen den beiden Optimierungen sind zwei Modellierungsschritte notwendig, um zunächst die elementspezifischen Topologieoptimierungsergebnisse in eine Schichtformulierung umzuwandeln und dann daraus ein Laminatmodell zu erstellen. Vor dieser Optimierungsprozedur besteht die Möglichkeit einer detaillierten Lastmodellierung für das anfängliche FE-Modell. Diesem Startmodell wird ein isotroper Werkstoff mit den globalen Materialeigenschaften eines quasiisotropen Laminats zugewiesen, um den Lösungsraum durch einen schlechten Startentwurf nicht einzuschränken. Mit dem generalisierten Startentwurf kann die Topologieoptimierung für die anschließende Parameteroptimierung effizient einen guten Entwurf mit scharfer Kontur der benötigten Elementbereiche liefern und so als maßgebender Faktor bedeutend Einfluss auf das spätere Laminatverhalten nehmen. Die Detailoptimierung dieses Entwurfs mit der Dimensionierung der Laminatparameter berücksichtigt schließlich die FVK-spezifischen Festigkeits- und Fertigungsrestriktionen. Die **Werkstoffausnutzung**, die durch den Anstrengungswert bzw. maximalen Bruchfunktionswert repräsentiert wird, wird dabei nur als Restriktion berücksichtigt, da eine Verwendung als Zielfunktion, wie in Kapitel 2.3.2 erläutert, nicht zielführend ist. Trotzdem wird durch den Einsatz des bruchtypenbezogenen Versagenskriteriums nach PUCK eine detaillierte Bruchanalyse durchgeführt und damit der Werkstoffausnutzung eine besondere Beachtung geschenkt. Insgesamt erfolgt der ganze **Optimierungsprozess in fünf Schritten**: Startmodell-erstellung, Topologieoptimierung, Schichtumwandlung, Laminatmodellierung und Parameteroptimierung. Optional bietet das LTgSL-Verfahren zudem eine **vor- und nachgeschaltete Kontaktmodellierung und -analyse**, um eine Approximation der Kontaktklast zur detaillierten Abbildung der Krafteinleitung für kontaktbehaftete FVK-Strukturen in einem Lastmodell bereitzustellen und eine genaue Nachrechnung des Optimierungsergebnisses

zu ermöglichen. Werden beide Optionen verwendet, wird gleichzeitig eine Vergleichbarkeit zwischen dem Ausgangs- und Endzustand hergestellt.

Unabhängig davon sieht das LTgSL-Verfahren die Verwendung von **zwei- oder dreidimensionalen Modellen** vor, wobei ein Kontakt in der Ebene Volumenelemente erfordert. Dagegen erfolgt die Laminatoptimierung im zweiten Optimierungsschritt stets mit Schalenelementen. Damit werden nach der Topologieoptimierung die dreidimensionalen Informationen in eine ebene Betrachtung überführt. Ferner sind innerhalb des LTgSL-Verfahrens keine Optimierungsschleifen enthalten, womit ein sequentieller Ablauf vorgesehen ist. Änderungen müssen demnach während der Modellierung vor dem Optimierungsschritt erfolgen.

Als Hauptanwendungsfall für das entwickelte LTgSL-Verfahren wird die **Bolzenverbindung** in **Kapitel 2** und **Kapitel 3** ausgiebig behandelt. Ausgehend von den theoretischen Grundlagen und der Betrachtung der Kontaktsituation werden ein Ausgangszustand für die Bolzenverbindung ausgelegt und die Komponenten modelliert. Mit der Approximation der Kontaktlast wird das LTgSL-Verfahren schließlich zur Ermittlung einer **Verstärkung für diese Bolzenverbindung** eingesetzt (vgl. **Kapitel 5**).

Weitere **Grundlagen** werden in **Kapitel 2** zum Aufbau, zum Strukturverhalten und zur Festigkeitsbeurteilung von FVK erarbeitet. Ebenso werden grundsätzliche Zusammenhänge der FEM und der Strukturoptimierung behandelt, wobei die für die entwickelte Optimierungsstrategie relevanten Verfahren der Topologie- und Parameteroptimierung für FVK näher ausgeführt werden. Innerhalb der FEM wird ebenso besonderes Augenmerk auf die Modellierung von FVK gelegt.

Die **Anwendbarkeit** des **LTgSL-Verfahrens** ist nicht nur auf Bolzenverbindungen in faserverstärkten Struktur beschränkt, sondern auch im Prinzip universell auf FVK-Strukturen erweiterbar. In Kapitel 4 wird die Optimierung einer Kragsscheibe mit dem LTgSL-Verfahren gezeigt. Für beide Anwendungen, Bolzenverbindung und Kragsscheibe, belegen Vergleichsmodelle die Plausibilität und die Güte der erzielten Ergebnisse. Ein etablierter Prozess, die dreiphasige Laminatoptimierung mit OptiStruct, zeigt hierzu im Fall der Kragsscheibe ein vergleichbares, aber schlechteres Resultat. Zudem ist dieser Referenzprozess strikter in den individuellen Gestaltungsmöglichkeiten und hat mit allgemeinen Startentwürfen größere Schwierigkeiten. Die Anzahl unterschiedlicher Startschichtwinkel muss von vornherein beschränkt werden. Im Fall der **Bolzenverbindungen** werden hinsichtlich dieses Referenzprozesses die gleichen Feststellungen gemacht. Ein allgemeiner Startentwurf muss nach der ersten Optimierungsphase auf die Schichtwinkel  $0^\circ$ ,  $+45^\circ$ ,  $-45^\circ$  und  $90^\circ$  beschränkt werden, um im weiteren Verlauf die Restriktionen zu erfüllen. Mit diesem reduzierten Laminatentwurf kann jedoch ein vergleichbares Verstärkungspotenzial, wie mit dem LTgSL-Verfahren, erzeugt werden. Die Ergebnisse beider Prozesse unterscheiden sich nur

geringfügig, wobei das LTgSL-Verfahren mit kleinerem Volumen eine etwas bessere Steifigkeit erreicht. Dagegen ist der Aufwand des Referenzprozesses für die Bolzenverbindung geringer und der Verstärkungsvorschlag erweist sich als leichter herstellbar. Anpassungen innerhalb des LTgSL-Verfahrens könnten diese Diskrepanz durch weitere Fertigungsrestriktionen oder anderen Aufbau des Laminatmodells verringern.

Insgesamt kann die anfangs in Kapitel 1 gestellte Forschungsfrage positiv beantwortet werden. Mit dem entwickelten LTgSL-Verfahren kann für eine FVK-Struktur (Kragsscheibe) ein optimierter Laminatvorschlag ermittelt und für die Bolzenverbindung mit knapp 3 % zusätzlichem Volumen die Steifigkeit um das 1,5-fache erhöht und die **Versagenslast verdoppelt** werden. Der Vorschlag für die Laminatverstärkung des Bohrungsbereichs ist gegenüber üblichen konstruktiven Maßnahmen konkurrenzfähig. Bei gleichem Volumen kann mit der optimierten Laminatverstärkung eine höhere Steifigkeit erreicht werden. Der Mehraufwand bei der Fertigung dieses Verstärkungsvorschlags sollte aber im Verhältnis zum möglichen Nutzen abgeschätzt werden. Die Herstellung von Versuchsproben und experimentelle Untersuchungen würden hier über die Praxisrelevanz Klarheit schaffen.

**Wesentliche Punkte des LTgSL-Verfahrens** sind die Möglichkeit der approximierten Kontaktbetrachtung, ein verallgemeinerter Startentwurf, eine lastgerechte (an der Hauptspannungsrichtung orientierte) Faserausrichtung sowie ein Ablauf innerhalb einer kommerziellen Programmumgebung (HyperWorks), wobei automatisierte Modellierungen und Berechnungen in den Zwischenschritten mit Excel-Tabellen stattfinden und die Implementierung zurück ins Programm über tcl-Skripte erfolgt. Daneben wird mit der Berücksichtigung des Werkstoffs, der Topologie, der Gestalt, der Schichtparameter, aller Festigkeiten, der Hauptspannungen und weiterer Strukturantworten eine umfassende Optimierungsstrategie vorgestellt. Abgesehen davon wird mit der vorliegenden Arbeit ein Beitrag zur Optimierung von FVK-Strukturen und insbesondere von Bolzenverbindungen sowie zum Verständnis der Auswirkungen von Versagenskriterien im Optimierungsprozess erbracht.

Sicherlich ist das Potenzial der entwickelten Optimierungsstrategie in weiteren Anwendungsfällen und mit anderen Programmumgebungen zu untersuchen. Bei vielversprechenden Erkenntnissen kann der Prozess jedoch vollständig automatisiert werden, wobei insbesondere in die Laminatmodellierung viel Vorwissen und Gestaltungsrichtlinien einfließen müssen. Ebenso wären Optimierungsschleifen für die Optimierungsschritte denkbar, um eventuell die Startentwürfe automatisch nachzubessern. Ein übergeordneter Optimierungsprozess könnte zudem für variierende Lasten das LTgSL-Verfahren anwenden und so iterativ die Versagenslast ermitteln. Bei allen Verbesserungsmöglichkeiten bleibt trotzdem festzuhalten, dass nun ein aussichtsreiches **Optimierungsverfahren zur Erhöhung der Versagenslasten von Bolzenverbindung in faserverstärkten Strukturen** vorhanden ist.





# Literaturverzeichnis

- [Aga80] **Agarwal, B. L.:** Static Strength Prediction of Bolted Joint in Composite Material. *AIAA Journal* 18 (1980) 11: 1371-1375.
- [Alt12] **Altenbach, H.:** Kontinuumsmechanik. Einführung in die materialunabhängigen und materialabhängigen Gleichungen. 2. Auflage. *Springer Vieweg, Berlin* (2012).
- [Alt18] **Altair Engineering (Hrsg.):** Practical Aspects of Finite Element Simulation. A Study Guide, *Troy, Michigan, USA* (2018).
- [Alt18a] **Altair Engineering (Hrsg.):** Practical Aspects of Structural Optimization. A Study Guide, *Troy, Michigan, USA* (2018).
- [Alt18b] **Altair Engineering (Hrsg.):** Introduction to Practical Aspects of Composites, *Troy, Michigan, USA* (2018).
- [Alt21] **Altair Engineering (Hrsg.):** HyperWorks Online Help (2021).
- [Alu08] **Aluko, O.; Whitworth, H. A.:** Analysis of stress distribution around pin loaded holes in orthotropic plates. *Composite Structures* 86 (2008) 4: 308-313.
- [Alu11] **Aluko, O.:** An Analytical Method for Failure Prediction of Composite Pinned Joints. *Proceedings of the World Congress on Engineering* 3 (2011): 2581-2587.
- [Amb91] **Ambarcumjan, S. A.:** Theory of anisotropic plates. Strength, stability, and vibrations. 2. Edition. *Hemisphere Publ. Co, New York* (1991).
- [And05] **Anderson, T. L.:** Fracture Mechanics. Fundamentals and Applications. 3. Edition. *CRC Press, Hoboken* (2005).
- [Ata12] **Atas, A.; Mohamed, G. F.; Soutis, C.:** Modelling delamination onset and growth in pin loaded composite laminates. *Composites Science and Technology* 72 (2012) 10: 1096-1101.
- [Awa12] **Awad, Z. K.; Aravinthan, T.; Zhuge, Y.; Gonzalez, F.:** A review of optimization techniques used in the design of fibre composite structures for civil engineering applications. *Materials & Design* 33 (2012): 534-544.
- [Azz65] **Azzi, V. D.; Tsai, S. W.:** Anisotropic Strength of Composites. *Experimental Mechanics* 5 (1965) 9: 283-288.
- [Bar00] **Barber, J.; Ciavarella, M.:** Contact mechanics. *International Journal of Solids and Structures* 37 (2000) 1-2: 29-43.
- [Bas11] **Basan, R.:** Untersuchung der intralaminaren Schubeigenschaften von Faserverbundwerkstoffen mit Epoxidharzmatrix unter Berücksichtigung nichtlinearer Effekte. *Dissertation. Technische Universität Berlin* (2011).
- [Bat08] **Batra, R. C.; Jiang, W.:** Analytical solution of the contact problem of a rigid indenter and an anisotropic linear elastic layer. *International Journal of Solids and Structures* 45 (2008) 22-23: 5814-5830.

- [Bat14] **Bathe, K.-J.:** Finite Element Procedures. 2. Edition. K.J. Bathe, Watertown, Massachusetts, USA (2014).
- [Bau91] **Bauer, C.-O.:** Handbuch der Verbindungstechnik. Hanser, München (1991).
- [Bau92] **Baumgartner, A.; Harzheim, L.; Mattheck, C.:** SKO (soft kill option): the biological way to find an optimum structure topology. *International Journal of Fatigue* 14 (1992) 6: 387-393.
- [Bel93] **Bellendir, K.:** Strukturanalyse und optimale Auslegung zylindrischer Composite-Schalen unter nichtrotationssymmetrischer Belastung. *Dissertation. Universität - Gesamthochschule Siegen* (1993).
- [Ben04] **Bendsøe, M. P.; Sigmund, O.:** Topology optimization. Theory, methods, and applications. 2. Edition. Springer, Berlin (2004).
- [Ben88] **Bendsøe, M. P.; Kikuchi, N.:** Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 71 (1988) 2: 197-224.
- [Ben89] **Bendsøe, M. P.:** Optimal shape design as a material distribution problem. *Structural optimization* 1 (1989) 4: 193-202.
- [Ber92] **Bergmann, H. W.:** Konstruktionsgrundlagen für Faserverbundbauteile. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg (1992).
- [Bey15] **Beyer, F. R.:** Hauptspannungstrajektorien in der numerischen Festkörpermechanik. Ein Algorithmus zur Visualisierung der Bauteilbeanspruchung in zwei und drei Dimensionen. *Dissertation. Technische Universität Dresden* (2015).
- [Bid14] **Bidaine, B.; Adam, L.; Assaker, R.; Chang, H.; Duflot, M.; Kutub, B.; Lacoste, E.:** Virtual Coupon Testing of Carbon Fiber Composites for Application in Structural Analysis. *SAE Technical Paper 2014-01-0809. SAE International, Detroit, Michigan, USA* (2014).
- [Bot14] **Both, J. C.:** Tragfähigkeit von CFK-Metall-Laminaten unter mechanischer und thermischer Belastung. *Dissertation. Technische Universität München* (2014).
- [Bre73] **Brent, R. P.:** Algorithms for minimization without derivatives. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA (1973).
- [Bre88] **Brewer, J. C.; Lagace, P. A.:** Quadratic Stress Criterion for Initiation of Delamination. *Journal of Composite Materials* 22 (1988) 12: 1141-1155.
- [Brü18] **Brüggemann, F.:** Bauteilqualität und Werkzeugverschleiß beim Fräsen von CFK-Gelege unter räumlichen Eingriffsbedingungen. *Dissertation. Technische Universität Hamburg-Harburg* (2018).
- [Bru02] **Bruyneel, M.; Fleury, C.:** Composite structures optimization using sequential convex programming. *Advances in Engineering Software* 33 (2002) 7-10: 697-711.
- [Bru06] **Bruyneel, M.; Duysinx, P.:** Note on singular optima in laminate design problems. *Structural and Multidisciplinary Optimization* 31 (2006) 2: 156-159.
- [Bru11] **Bruyneel, M.:** SFP - a new parameterization based on shape functions for optimal material selection. *Structural and Multidisciplinary Optimization* 43 (2011) 1: 17-27.

- [Bur13] **Burbulla, F.:** Kontinuumsmechanische und bruchmechanische Modelle für Werkstoffverbunde. *Dissertation. Universität Kassel (2013).*
- [Cam02] **Camanho, P. P.:** Failure Criteria for fibre-reinforced Polymer Composites. *Universität Porto (2002).*
- [Cam03] **Camanho, P. P.; Davila, C. G.; Moura, M. F. de:** Numerical Simulation of Mixed-Mode Progressive Delamination in Composite Materials. *Journal of Composite Materials 37 (2003) 16: 1415-1438.*
- [Cam06] **Camanho, P. P.; Dávila, C. G.; Pinho, S. T.; Iannucci, L.; Robinson, P.:** Prediction of in situ strengths and matrix cracking in composites under transverse tension and in-plane shear. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing 37 (2006) 2: 165-176.*
- [Cam07] **Camanho, P. P.; Maimí, P.; Dávila, C. G.:** Prediction of size effects in notched laminates using continuum damage mechanics. *Composites Science and Technology 67 (2007) 13: 2715-2727.*
- [Cam08] **Camanho, P. P.; Dávila, C. G.; Pinho, S. T.; Remmers, J. J. C.:** Mechanical response of composites. *Springer-Verlag, Dordrecht (2008).*
- [Cam99] **Camanho, P. P.; Matthews, F. L.:** Delamination Onset Prediction in Mechanically Fastened Joints in Composite Laminates. *Journal of Composite Materials 33 (1999) 10: 906-927.*
- [Cer05] **Cervellera, P.; Zhou, M.; Schramm, U.:** Optimization driven design of shell structures under stiffness, strength and stability requirements. *World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization (WCSMO6), Rio de Janeiro (2005).*
- [Cha12] **Chatelain, J. F.; Zaghbani, I.; Monier, J.:** Effect of Ply Orientation on Roughness for the Trimming Process of CFRP Laminates. *International Journal of Mechanical, Industrial and Aerospace Sciences 6 (2012) 8: 1516-1522.*
- [Cha69] **Chamis, C. C.:** Failure criteria for filamentary composites. *NASA/TN D-5367. NASA, Washington, DC, USA (1969).*
- [Cha82] **Chang, F.-K.; Scott, R. A.; Springer, G. S.:** Strength of Mechanically Fastened Composite Joints. *Journal of Composite Materials 16 (1982) 6: 470-494.*
- [Cow66] **Cowper, G. R.:** The Shear Coefficient in Timoshenko's Beam Theory. *Journal of Applied Mechanics 33 (1966) 2: 335-340.*
- [Cri09] **Crick, T.; Dunning, P.; Kim, H.; Padget, J.:** Engineering design optimization using services and workflows. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences 367 (2009) 1898: 2741-2751.*
- [Cun03] **Cuntze, R. G.:** Non-linear Failure Analysis of FRP Laminates composed of UD laminate. A comparison of the author's predictions with test results within the worldwide Failure Exercise in the UK. *International Conference on Fracture and Damage Mechanics (FDM), Paderborn (2003).*
- [Cun12] **Cuntze, R. G.:** The predictive capability of failure mode concept-based strength conditions for laminates composed of unidirectional laminae under static triaxial stress states. *Journal of Composite Materials 46 (2012) 19-20: 2563-2594.*

- [Cun12a] **Cuntze, R. G.:** Comparison between experimental and theoretical results using Cuntze's "failure mode concept" model for composites under triaxial loadings – Part B of the second world-wide failure exercise. *Journal of Composite Materials* 47 (2012) 6-7: 893-924.
- [Dan06] **Daniel, I. M.; Ishai, O.:** Engineering mechanics of composite materials. 2. Edition. Oxford University Press, New York (2006).
- [Dap14] **Dapp, W. B.; Prodanov, N.; Müser, M. H.:** Systematic analysis of Persson's contact mechanics theory of randomly rough elastic surfaces. *Journal of Physics: Condensed Matter* 26 (2014) 35.
- [Dav05] **Davila, C. G.; Camanho, P. P.; Rose, C. A.:** Failure Criteria for FRP Laminates. *Journal of Composite Materials* 39 (2005) 4: 323-345.
- [Del04] **Delafargue, A.; Ulm, F.-J.:** Explicit approximations of the indentation modulus of elastically orthotropic solids for conical indenters. *International Journal of Solids and Structures* 41 (2004) 26: 7351-7360.
- [Den15] **Denonville, Jürgen, Haase, Walter; Sobek, W.; Riedmüller, K.; Liewald, M. (Hrsg.):** Materialgerechtes Fügen von Faserverbundprofilen. *Fraunhofer IRB Verlag, Stuttgart* (2014).
- [Deu03] **Deutsches Institut für Normung e.V. (Hrsg.):** Fertigungsverfahren Fügen – Teil 1: Zusammensetzen; Einordnung, Unterteilung, Begriffe. DIN 8593-1. *Beuth, Berlin* (2003).
- [Deu10] **Deutsches Institut für Normung e.V. (Hrsg.):** Geometrische Produktspezifikation (GPS) – ISO-Toleranzsystem für Längenmaße – Teil 1: Grundlagen für Toleranzen, Abmaße und Passungen. DIN EN ISO 286-1. *Beuth, Berlin* (2010).
- [Deu10a] **Deuschle, H. M.:** 3D failure analysis of UD fibre reinforced composites. Puck's theory within FEA. *Dissertation. Universität Stuttgart* (2010).
- [Deu16] **Deutsches Institut für Normung e.V. (Hrsg.):** Luft- und Raumfahrt – Faserverstärkte Kunststoffe – Prüfverfahren – Bestimmung der Lochleibungsfestigkeit. DIN EN 6037. *Beuth, Berlin* (2016).
- [Deu91] **Deutsches Institut für Normung e.V. (Hrsg.):** Faserverstärkte Kunststoffe. Prüfung von multidirektionalen Laminaten: Bestimmung der Lochleibungsfestigkeit. DIN 65562. *Beuth, Berlin* (1991).
- [Deu92] **Deutsches Institut für Normung e.V. (Hrsg.):** Bolzen ohne Kopf (ISO 2340:1986). DIN EN 22340. *Beuth, Berlin* (1992).
- [Die07] **Diem, H.:** Tragfähigkeit von Bolzenverbindungen in dickwandigen Faserverbundstrukturen. *Dissertation. Technische Universität München* (2007).
- [Die94] **Dietz, P.; Rothe, F.:** Berechnung und Optimierung von Bolzen-Lasche-Verbindungen. *IMV-Institutsmitteilung 19. Technische Universität Clausthal* (1994).
- [Dou12] **Doudican, B. M.; Zand, B.; Amaya, P.; Butalia, T. S.; Wolfe, W. E.; Schoeppner, G. A.:** Strain energy based failure criterion. *Journal of Composite Materials* 47 (2012) 6-7: 847-866.

- [Ega12] **Egan, B.; McCarthy, C. T.; McCarthy, M. A.; Frizzell, R. M.:** Stress analysis of single-bolt, single-lap, countersunk composite joints with variable bolt-hole clearance. *Composite Structures* 94 (2012) 3: 1038-1051.
- [Eri90] **Eriksson, I.:** On the Bearing Strength of Bolted Graphite/Epoxy Laminates. *Journal of Composite Materials* 24 (1990) 12: 1246-1269.
- [Fas08] **Fassbänder, P.; Georgil, A.:** Verfahren zum Herstellen einer Lochverstärkung bei einem Bauteil aus einem Faser-Kunststoff-Verbund und Bauteil aus einem Faser-Kunststoff-Verbund. Europäische Patentschrift EP 2 132 026 (Veröffentlichungs-Nr.: WO 2008/119409). *ACC Technologies GmbH & Co. KG* (2008).
- [Fed18] **Fedulov, B. N.; Fedorenko, A. N.; Kantor, M. M.; Lomakin, E. V.:** Failure analysis of laminated composites based on degradation parameters. *Meccanica* 53 (2018) 1: 359-372.
- [Fel14] **Feldmann, K.; Schöppner, V.; Spur, G.:** Handbuch Fügen, Handhaben, Montieren. 2. Auflage. *Hanser, München* (2014).
- [Fin07] **Fink, A.:** Verbindungstechnik CFK/Ti. 4. *DLR-FA Wissenschaftstag: Produktionstechnik für den CFK-Rumpf. Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt e.V. (DLR), Braunschweig* (2007).
- [Fle03] **Flemming, M.; Roth, S.:** Faserverbundbauweisen. Eigenschaften; mechanische, konstruktive, thermische, elektrische, ökologische, wirtschaftliche Aspekte. *Springer, Berlin* (2003).
- [Fle21] **Fleischer, J.:** Intrinsische Hybridverbunde für Leichtbautragstrukturen. Grundlagen der Fertigung, Charakterisierung und Auslegung. *Springer Vieweg, Berlin* (2021).
- [Fol98] **Foldager, J.; Hansen, J. S.; Olhoff, N.:** A general approach forcing convexity of ply angle optimization in composite laminates. *Structural optimization* 16 (1998) 2: 201-211.
- [For13] **Forghani, A.; Zobeiry, N.; Poursartip, A.; Vaziri, R.:** A structural modelling framework for prediction of damage development and failure of composite laminates. *Journal of Composite Materials* 47 (2013) 20-21: 2553-2573.
- [För72] **Förster, R.:** Grundlagen der Optimierung von Mehrschichtenverbunden aus faserverstärkten Werkstoffen. *Kunststoffe* 62 (1972) 1: 57-62.
- [För72a] **Förster, R.:** Grundlagen der Optimierung von Mehrschichtenverbunden aus faserverstärkten Werkstoffen. *Kunststoffe* 62 (1972) 3: 181-186.
- [Fri13] **Friedrich, H. E. (Hrsg.):** Leichtbau in der Fahrzeugtechnik. *Springer Vieweg, Wiesbaden* (2013).
- [Frö05] **Fröhlich, P.:** FEM-Anwendungspraxis. Einstieg in die Finite Elemente Analyse Zweisprachige Ausgabe Deutsch/Englisch. *Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden* (2005).
- [Ful75] **Fuller, K. N. G.; Tabor, D.:** The Effect of Surface Roughness on the Adhesion of Elastic Solids. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 345 (1975) 1642: 327-342.

- [Gan13] **Gan, K. W.; Wisnom, M. R.; Hallett, S. R.:** An approximate model of cylindrical and spherical contact on composite laminates of finite thickness. *Composite Structures* 103 (2013): 136-142.
- [Ghi09] **Ghiasi, H.; Pasini, D.; Lessard, L.:** Optimum stacking sequence design of composite materials Part I: Constant stiffness design. *Composite Structures* 90 (2009) 1: 1-11.
- [Ghi10] **Ghiasi, H.; Fayazbakhsh, K.; Pasini, D.; Lessard, L.:** Optimum stacking sequence design of composite materials Part II: Variable stiffness design. *Composite Structures* 93 (2010) 1: 1-13.
- [Gig07] **Giger, M.:** Representation concepts in Evolutionary Algorithm-Based Structural Optimization. *Dissertation. Eidgenössische Technische Hochschule Zürich* (2007).
- [Gig08] **Giger, M.; Keller, D.; Ermanni, P.:** A graph-based parameterization concept for global laminate optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization* 36 (2008) 3: 289-305.
- [Gil10] **Gillet, A.; Francescato, P.; Saffre, P.:** Single- and Multi-objective Optimization of Composite Structures. *Journal of Composite Materials* 44 (2010) 4: 457-480.
- [Gla80] **Gladwell, G. M. L.:** Contact problems in the classical theory of elasticity. *Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn* (1980).
- [Gol65] **Gol'denblat, I. I.; Kopnov, V. A.:** Strength of glass-reinforced plastics in the complex stress state. *Polymer Mechanics* 1 (1965) 2: 54-59.
- [Gor17] **Goryacheva, I.; Makhovskaya, Y.:** Combined effect of surface microgeometry and adhesion in normal and sliding contacts of elastic bodies. *Friction* 5 (2017) 3: 339-350.
- [Göt00] **Götz, K.:** Die innere Optimierung der Bäume als Vorbild für technische Faserverbunde – eine lokale Approximation. *Dissertation. Universität Karlsruhe* (2000).
- [Gre66] **Greenwood, J. A.; Williamson, J. B. P.:** Contact of Nominally Flat Surfaces. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 295 (1966) 1442: 300-319.
- [Gre88] **Greene, W. H.; Knight, N. F.; Stockwell, A. E.:** Structural behavior of the space shuttle SRM tang-clevis joint. *Journal of Propulsion and Power* 4 (1988) 4: 317-327.
- [Gro01] **Gross, D.; Seelig, T.:** Bruchmechanik. Mit einer Einführung in die Mikro-mechanik. 3. Auflage. *Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg* (2001).
- [Gro11] **Gross, D.; Hauger, W.; Wriggers, P.:** Technische Mechanik 4. Hydromechanik, Elemente der Höheren Mechanik, numerische Methoden. 8. Auflage. *Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg* (2011).
- [Gün13] **Günel, M.; Kayran, A.:** Non-linear progressive failure analysis of open-hole composite laminates under combined loading. *Journal of Sandwich Structures and Materials* 15 (2013) 3: 309-339.
- [Guo01] **Guo-Geruschkat, Z.-N.:** Augenstab-Bolzen-Verbindungen unter Berücksichtigung der Reibung. *Dissertation. Universität Hannover* (2001).

- [Gut11] **Gutkin, R.; Pinho, S. T.; Robinson, P.; Curtis, P. T.:** A finite fracture mechanics formulation to predict fibre kinking and splitting in CFRP under combined longitudinal compression and in-plane shear. *Mechanics of Materials* 43 (2011) 11: 730-739.
- [Gut11a] **Gutkin, R.; Pinho, S. T.:** Practical application of failure models to predict the response of composite structures. *The 18th Interational Conference on Composite Materials (ICCM18), Jeju, Korea (2011)*.
- [Gut14] **Gutkin, R.; Pinho, S. T.:** Combining damage and friction to model compressive damage growth in fibre-reinforced composites. *Journal of Composite Materials* 49 (2014) 20: 2483-2495.
- [Hab12] **Habenicht, G.:** Kleben – erfolgreich und fehlerfrei. Handwerk, Praktiker, Ausbildung, Industrie. 6. Auflage. *Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden (2012)*.
- [Hag06] **Hagedorn, P.:** Technische Mechanik. Band 2. Festigkeitslehre. 4. Auflage. *Verlag Harri Deutsch, Frankfurt/M. (2006)*.
- [Han00] **Hansel, W.; Becker, W.:** An Evolutionary Algorithm for a Layerwise Topology Optimization of Laminates. *Advanced Engineering Materials* 2 (2000) 7: 427-430.
- [Han02] **Hansel, W.:** Lagenweise Topologieoptimierung von Faserverbundstrukturen. *VDI-Verlag, Siegen (2002)*.
- [Han02a] **Hansel, W.; Treptow, A.; Becker, W.; Freisleben, B.:** A heuristic and a genetic topology optimization algorithm for weight-minimal laminate structures. *Composite Structures* 58 (2002) 2: 287-294.
- [Han99] **Hansel, W.; Becker, W.:** Layerwise adaptive topology optimization of laminate structures. *Engineering Computations* 16 (1999) 7: 841-851.
- [Har08] **Harzheim, L.:** Strukturoptimierung. Grundlagen und Anwendungen. 1. Auflage. *Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main (2008)*.
- [Har76] **Hart-Smith, L. J.:** Bolted joints in graphite-epoxy composites. *NASA/CR-144899. NASA, Long Beach, California, USA (1976)*.
- [Has80] **Hashin, Z.:** Failure Criteria for Unidirectional Fiber Composites. *Journal of Applied Mechanics* 47 (1980) 2: 329-334.
- [Has81] **Hashin, Z.:** Fatigue Failure Criteria for Unidirectional Fiber Composites. *Journal of Applied Mechanics* 48 (1981) 4: 846-852.
- [Hav07] **Havar, T.:** Beitrag zur Gestaltung und Auslegung von 3D-verstärkten Faserverbundsclaulen. *Dissertation. Universität Stuttgart (2007)*.
- [Her07] **Herakovich, C. T.:** Edge effects and delamination failures. *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design* 24 (2007) 4: 245-252.
- [Her16] **Hermesdorf, F.; Rapp, H.:** Untersuchung der Reibschlüssigen Lastübertragung in Doppelschnittigen Verbindungen mit CFK-Fügepartnern. *Deutscher Luft- und Raumfahrtkongress 2016. Deutsche Gesellschaft für Luft- und Raumfahrt - Lilienthal-Oberth e.V., Bonn (2016)*.

- [Her81] **Hertz, H.:** Über die Berührung fester elastischer Körper. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (1881)* 92: 156-171.
- [Her82] **Hertz, H.:** Über die Berührung fester elastischer Körper und über die Härte. *Verhandlung des Vereins für Beförderung des Gewerbfleißes (1882)* 61: 449-463.
- [Hig04] **High Performance Space Structure Systems GmbH (Hrsg.):** Failure Criteria for Non-Metallic Materials. Implementation of Puck's Failure Criterion in ESAComp *Technical Report. ESTEC/Contract No. 16162/02/NL/CP, Braunschweig (2004).*
- [Hil48] **Hill, R.:** A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals. *Proceeding of the Royal Society A* 193 (1948) 1033: 281-297.
- [Hin04] **Hinton, M. J.; Kaddour, A.; Soden, P. D.:** Failure Criteria in Fibre Reinforced Polymer Composites. The World-Wide Failure Exercise. 1. Edition. Elsevier, Oxford (2004).
- [Hin12] **Hinton, M. J.; Kaddour, A.:** Special Issue: Evaluation of Theories for Predicting Failure in Polymer Composite Laminates Under 3-D States of Stress: Part A of the Second World-Wide Failure Exercise (WWFE-II). *Journal of Composite Materials* 46 (2012) 19-20.
- [Hin13] **Hinton, M. J.; Kaddour, A.:** Special Issue: The Second World-Wide Failure Exercise (WWFE-II): Part B: Evaluation of Theories for Predicting Failure in Polymer Composite Laminates Under 3-D States of Stress: Comparison with experiments. *Journal of Composite Materials* 47 (2013) 6-7.
- [Hof67] **Hoffman, O.:** The Brittle Strength of Orthotropic Materials. *Journal of Composite Materials* 1 (1967) 2: 200-206.
- [Hör02] **Hörmann, M.:** Nichtlineare Versagensanalyse von Faserverbundstrukturen. *Dissertation. Universität Stuttgart (2002).*
- [Hou01] **Hou, J.; Petrinic, N.; Ruiz, C.:** A delamination criterion for laminated composites under low-velocity impact. *Composites Science and Technology* 61 (2001) 14: 2069-2074.
- [Huf10] **Hufenbach, W.; Helms, O.; Kupfer, R.:** Gestaltung von textilverbundgerechten Fügezonen mit warmgeformten Bolzenlöchern. *Zeitschrift Kunststofftechnik / Journal of Plastics Technology* 6 (2010) 6: 255-269.
- [Huf99] **Hufenbach, W.; Kroll, L.:** Stress analysis of notched anisotropic finite plates under mechanical and hygrothermal loads. *Archive of Applied Mechanics* 69 (1999) 3: 145-159.
- [Hye88] **Hyer, M. W.; Chastain, P. A.:** Effect of bolt load proportioning on the capacity of multiple-bolt composite joints. *Journal of Aircraft* 25 (1988) 2: 184-189.
- [Hye91] **Hyer, M. W.; Charette, R. F.:** Use of curvilinear fiber format in composite structure design. *AIAA Journal* 29 (1991) 6: 1011-1015.
- [Jia08] **Jia, H. P.; Jiang, C. D.; Li, G. P.; Mu, R. Q.; Liu, B.; Jiang, C. B.:** Topology Optimization of Orthotropic Material Structure. *Materials Science Forum* 575-578 (2008): 978-989.



- [Jia19] **Jiang, D.; Hoglund, R.; Smith, D.:** Continuous Fiber Angle Topology Optimization for Polymer Composite Deposition Additive Manufacturing Applications. *Fibers* 7 (2019) 2: 14.
- [Joh03] **Johnson, K. L.:** Contact mechanics. 9. Edition. Cambridge University Press, Cambridge (2003).
- [Joh09] **Johansen, L.; Lund, E.:** Optimization of laminated composite structures using delamination criteria and hierarchical models. *Structural and Multidisciplinary Optimization* 38 (2009) 4: 357-375.
- [Jon77] **Jong, T. d.:** Stresses Around Pin-Loaded Holes in Elastically Orthotropic or Isotropic Plates. *Journal of Composite Materials* 11 (1977) 3: 313-331.
- [Juh03] **Juhasz, J.:** Ein neues physikalisch basiertes Versagenskriterium für schwach 3D-verstärkte Faserverbundlaminate. *Dissertation. Technische Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig* (2003).
- [Kab11] **Kabiri Ataabadi, A.; Ziaei-Rad, S.; Hosseini-Toudeshky, H.:** Compression failure and fiber-kinking modeling of laminated composites. *Steel and Composite Structures* 12 (2011) 1: 53-72.
- [Kad12] **Kaddour, A.; Hinton, M. J.:** Input data for test cases used in benchmarking triaxial failure theories of composites. *Journal of Composite Materials* 46 (2012) 19-20: 2295-2312.
- [Kad13] **Kaddour, A.; Hinton, M. J.; Smith, P. A.; Li, S.:** Special Issue: Benchmarking of matrix cracking, damage and failure models for composites: Comparison between theories: Part A of The Third World-Wide Failure Exercise (WWFE-III). *Journal of Composite Materials* 47 (2013) 20-21.
- [Käs09] **Kästner, M.:** Skalenübergreifende Modellierung und Simulation des mechanischen Verhaltens von textilverstärktem Polypropylen unter Nutzung der XFEM. *Dissertation. Technische Universität Dresden* (2009).
- [Käs13] **Kästner, M.; Müller, S.; Ulbricht, V.:** XFEM modelling of inelastic material behaviour and interface failure in textile-reinforced composites. *Procedia Materials Science* 2 (2013): 43-51.
- [Kel10] **Keller, D. C.:** Evolutionary design of laminated composite structures. *Dissertation. Eidgenössische Technische Hochschule Zürich* (2010).
- [Kel10a] **Keller, D.:** Optimization of ply angles in laminated composite structures by a hybrid, asynchronous, parallel evolutionary algorithm. *Composite Structures* 92 (2010) 11: 2781-2790.
- [Kel11] **Keller, D.:** Global laminate optimization on geometrically partitioned shell structures. *Structural and Multidisciplinary Optimization* 43 (2011) 3: 353-368.
- [Kin12] **Kindmann, R.; Stracke, M.:** Verbindungen im Stahl- und Verbundbau. 3. Auflage. Ernst & Sohn, Berlin (2012).
- [Kir98] **Kirsch, G.:** Die Theorie der Elastizität und die Bedürfnisse der Festigkeitslehre. *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure* 42 (1898) 29: 797-807.

- [Kle12] **Klein, B.:** FEM. Grundlagen und Anwendungen der Finite-Element-Methode im Maschinen- und Fahrzeugbau. 9. Auflage. Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden (2012).
- [Kle12a] **Klein, B.:** Leichtbau-Konstruktion. Berechnungsgrundlagen und Gestaltung. 9. Auflage. Vieweg+Teubner Verlag / Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH Wiesbaden, Wiesbaden (2012).
- [Kle17] **Klein, D.:** Ein simulationsbasierter Ansatz für die beanspruchungsgerechte Auslegung endlosfaserverstärkter Faserverbundstrukturen. *Dissertation. Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg* (2017).
- [Kna89] **Knaust, U.:** Zur Analyse und Optimierung von Faserverbund-Leichtbauteilen Baugruppen. VDI-Verlag, Düsseldorf (1989).
- [Kno06] **Knops, M.; Bögle, C.:** Gradual failure in fibre/polymer laminates. *Composites Science and Technology* 66 (2006) 5: 616-625.
- [Kno08] **Knops, M.:** Analysis of failure in fiber polymer laminates. The Theory of Alfred Puck. 2. Auflage. Springer-Verlag, Berlin (2008).
- [Kno17] **Knothe, K.; Wessels, H.:** Finite Elemente. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg (2017).
- [Ko88] **Ko, W. L.:** Delamination stresses in semicircular laminated composite bars. *Technical Memorandum 4026. NASA, Scientific and Technical Information Division, Springfield, Virginia, USA* (1988).
- [Kob11] **Kober, M.:** Ein Beitrag zur strukturmechanischen Optimierung realer Bauteile in metallischer und Faserverbundbauweise unter Verwendung von wirkebenenbasierten Bruchkriterien. *Dissertation. Brandenburgische Technische Universität Cottbus* (2011).
- [Koe08] **Koerber, H.; Camanho, P.:** Simulation of Progressive Damage in Bolted Composite Joints. ECCM-13. *European Conference on Composite Materials, Stockholm* (2008).
- [Kök13] **Köke, H.:** Form- und Materialoptimierung von Faserverbundstrukturen. *Dissertation. Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg* (2013).
- [Kol12] **Kolios, A. J.; Proia, S.:** Evaluation of the Reliability Performance of Failure Criteria for Composite Structures. *World Journal of Mechanics* 2 (2012) 3: 162-170.
- [Kol16] **Kolesnikov, B.; Herbeck, L.; Fink, A.:** Fortschrittliche Verbindungstechniken von Faserverbundstrukturen. *DLR Institut für Strukturmechanik, Braunschweig* (2016).
- [Kon00] **Konter, A.:** How to - undertake a contact and friction analysis. NAFEMS, Glasgow (2000).
- [Kon06] **Konter, A. W. A.:** Advanced finite element contact benchmarks. NAFEMS, Glasgow (2006).
- [Kon75] **Konish, H. J.; Whitney, J. M.:** Approximate Stresses in an Orthotropic Plate Containing a Circular Hole. *Journal of Composite Materials* 9 (1975) 2: 157-166.

- [Koz16] **Kozlov, M. V.; Sheshenin, S. V.:** Modeling the Progressive Failure of Laminated Composites. *Mechanics of Composite Materials* 51 (2016) 6: 695-706.
- [Kre93] **Kress, G. R.:** Analytische und experimentelle Untersuchung zu Versagensvorgängen in Faserverbundstoffen mit besonderer Berücksichtigung der Randeffekte. *VDI-Verlag, Düsseldorf* (1993).
- [Kri92] **Kriechbaum, R.; Schäfer, J.; Mattheck, C.:** CAIO (computer aided internal optimization): A powerful method to optimize fiber arrangement in composite materials. *First European Conference on Smart Structures and Materials* (1992): 281-288.
- [Kri94] **Kriechbaum, R.:** Ein Verfahren zur Optimierung der Faserverläufe in Verbundwerkstoffen durch Minimierung der Schubspannungen nach Vorbildern der Natur. *Dissertation. Universität Karlsruhe* (1994).
- [Kro13] **Kroker, A. M.; Becker, W.; Schürmann, H.:** Strukturmechanische Modellierung und Analyse des Tragverhaltens von dünnwandigen hochbelasteten Composite-Biege- und Querkraftträgern. *Dissertation. Tech. Universität Darmstadt* (2013).
- [Kry10] **Krystek, J.; Kottner, R.; Bek, L.; Las, V.:** Validation of the adjusted strength criterion LaRC04 for uni-directional composite under combination of tension and pressure. *Applied and Computational Mechanics* 4 (2010) 2: 171-178.
- [Läp11] **Läpple, V.:** Einführung in die Festigkeitslehre. Lehr- und Übungsbuch. 3. Auflage. *Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden* (2011).
- [Las08] **Las, V.; Zemčík, R.; Kroupa, T.; Kottner, R.:** Failure prediction of composite materials. *Bulletin of Applied Mechanics* 4 (2008) 14: 81-87.
- [Lau13] **Laurin, F.; Carrere, N.; Huchette, C.; Maire, J.-F.:** A multiscale hybrid approach for damage and final failure predictions of composite structures. *Journal of Composite Materials* 47 (2013) 20-21: 2713-2747.
- [Lee05] **Lee, J.; Soutis, C.:** Thickness effect on the compressive strength of T800/924C carbon fibre–epoxy laminates. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing* 36 (2005) 2: 213-227.
- [Lek63] **Lekhnitskii, S. G.:** Theory of elasticity of an anisotropic elastic body. *Holden-Day, San Francisco* (1963).
- [Lek68] **Lekhnitskii, S. G.:** Anisotropic plates. 2. Ed.. *Gordon and Breach, New York* (1968).
- [Len14] **Lengsfeld, H.; Wolff-Fabris, F.; Krämer, J.; Lacalle, J.; Altstädt, V.:** Faserverbundwerkstoffe. Prepregs und ihre Verarbeitung. *Hanser, München* (2014).
- [Lin02] **Link, M.:** Finite Elemente in der Statik und Dynamik. 3. Auflage. *Teubner, Stuttgart, Leipzig, Wiesbaden* (2002).
- [Lin02a] **Lindemann, J.; Becker, W.:** Free-edge stresses around holes in laminates by the Boundary Finite-Element Method. *Mechanics of Composite Materials* 38 (2002) 5: 407-416.
- [Liu10] **Liu, G.; Tay, T. E.; Tan, V. B. C.:** Failure Progression and Mesh Sensitivity Analyses by the Plate Element-Failure Method. *Journal of Composite Materials* 44 (2010) 20: 2363-2379.

- [Lop09] **Lopez, R. H.; Luersen, M. A.; Cursi, E. S.:** Optimization of laminated composites considering different failure criteria. *Composites Part B: Engineering* 40 (2009) 8: 731-740.
- [Lov98] **Lovell, M.:** Analysis of contact between transversely isotropic coated surfaces. *Wear* 214 (1998) 2: 165-174.
- [Lur63] **Lurje, A. I.:** Räumliche Probleme der Elastizitätstheorie. *Akademie-Verlag, Berlin* (1963).
- [Mar02] **Marsden, W.; Irving, D.:** How to analyse composites. *NAFEMS, Glasgow* (2002).
- [Mat14] **Mathes, V.; Witten, E.:** Handbuch Faserverbundkunststoffe/Composites. Grundlagen, Verarbeitung, Anwendungen. 4. Auflage. *Springer Vieweg, Wiesbaden* (2014).
- [Mat95] **Matzenmiller, A.; Lubliner, J.; Taylor, R. L.:** A constitutive model for anisotropic damage in fiber-composites. *Mechanics of Materials* 20 (1995) 2: 125-152.
- [Mat98] **Mattheij, P.; Gliesche, K.; Feltin, D.:** Tailored Fiber Placement-Mechanical Properties and Applications. *Journal of Reinforced Plastics and Composites* 17 (1998) 9: 774-786.
- [Mes05] **Meske, R.; Sauter, J.; Schnack, E.:** Nonparametric gradient-less shape optimization for real-world applications. *Structural and Multidisciplinary Optimization* 30 (2005) 3: 201-218.
- [Mey08] **Meyer, O.:** Kurzfaserverform-Technologie zur kraftflussgerechten Herstellung von Faserverbundbauteilen. *Dissertation. Universität Stuttgart* (2008).
- [Mic00] **Michell, J. H.:** The Stress in an AEolotropic Elastic Solid with an Infinite Plane Boundary. *Proceedings of the London Mathematical Society* 32 (1900) 1: 247-257.
- [Mic09] **Michaeli, W.; Mannigel, M.; Preller, F.:** On the effect of shear stresses on the fibre failure behaviour in CFRP. *Composites Science and Technology* 69 (2009) 9: 1354-1357.
- [Mis28] **Mises, R. von:** Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* 8 (1928) 3: 161-185.
- [Mis98] **Mischler, A.:** Bedeutung der Duktilität für das Tragverhalten von Stahl-Holz-Bolzenverbindungen. *Dissertation. Eidgenössische Technische Hochschule Zürich* (1998).
- [Mit17] **Mittelstedt, C.; Becker, W.:** Strukturmechanik ebener Lamine. 1. Auflage. *Technische Universität Darmstadt FB Mechanik, Bibliothek, Darmstadt* (2017).
- [Mol16] **Moldenhauer, H.:** Die orthotrope Wärmeleitung als numerischer Integrator allgemeiner Richtungsfelder mit Anwendung zur optimalen Faserplatzierung und Kraftflussvisualisierung. *Dissertation. Karlsruher Institut für Technologie (KIT)* (2016).
- [Mön16] **Mönicke, A.; Katajisto, H.; Yancey, R.:** Design-optimization of a curved layered composite panel using efficient laminate parameterization. *SAMPE Long Beach 2016, Long Beach, California, USA* (2016).

- [Mor09] **Moro, J. L.; Rottner, M.; Alihodžić, B.; Weißbach, M.; Schlaich, J.:** Baukonstruktion. Vom Prinzip zum Detail. *Springer, Berlin (2009)*.
- [Mül91] **Müller, W.:** Krafteinleitung in Faserverbundwerkstoffe. Hinweise zur werkstoff- und fertigungsgerechten Gestaltung. *Dissertation. Rheinisch-Westfälische Tech. Hochschule Aachen (1991)*.
- [Nar11] **Narayana Naik, G.; Omkar, S. N.; Mudigere, D.; Gopalakrishnan, S.:** Nature inspired optimization techniques for the design optimization of laminated composite structures using failure criteria. *Expert Systems with Applications 38 (2011) 3: 2489-2499*.
- [Nie05] **Niemann, G.; Höhn, B.-R.; Winter, H.:** Maschinenelemente. Band 1: Konstruktion und Berechnung von Verbindungen, Lagern, Wellen. *4. Auflage. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg (2005)*.
- [Nom15] **Nomura, T.; Dede, E. M.; Lee, J.; Yamasaki, S.; Matsumori, T.; Kawamoto, A.; Kikuchi, N.:** General topology optimization method with continuous and discrete orientation design using isoparametric projection. *International Journal for Numerical Methods in Engineering 101 (2015) 8: 571-605*.
- [O'Br01] **O'Brien, T. K.:** Characterization, analysis and prediction of delamination in composites using fracture mechanics. *NASA Langley Research Center, Hampton, Virginia, USA (2001)*.
- [Öch16] **Öchsner, A.:** Theorie der Balkenbiegung. *Springer Fachmedien Wiesbaden, Wiesbaden (2016)*.
- [Oli04] **Oliver, W. C.; Pharr, G. M.:** Measurement of hardness and elastic modulus by instrumented indentation. *Journal of Materials Research 19 (2004) 01: 3-20*.
- [Pal98] **Palanterä, M.:** Theoretical Background of ESAComp Analyses. Part III – Laminates. *Componeering Inc., Helsinki (1998)*.
- [Par01] **París, F.:** A Study of Failure Criteria of Fibrous Composite Materials. *NASA/CR-2001-210661. NASA Langley Research Center, Hampton, Virginia, USA (2001)*.
- [Pee15] **Peeters, D.; van Baalen, D.; Abdallah, M.:** Combining topology and lamination parameter optimisation. *Structural optimization 52 (2015) 1: 105-120*.
- [Pet16] **Petersen, E.; Cuntze, R. G.; Hühne, C.:** Experimental determination of material parameters in Cuntze's Failure-Mode-Concept-based UD strength failure conditions. *Composites Science and Technology (2016): 12-25*.
- [Pha12] **Pham, D. C.; Sun, X. S.; Tan, V. B. C.; Chen, B.; Tay, T. E.:** Progressive Failure Analysis of Scaled Double-Notched Carbon/Epoxy Composite Laminates. *International Journal of Damage Mechanics 21 (2012) 8: 1154-1185*.
- [Pin05] **Pinho, S. T.; Davila, C. G.; Camanho, P. P.; Iannucci, L.; Robinson, P.:** Failure Models and Criteria for FRP Under In-Plane or Three-Dimensional Stress States Including Shear Non-Linearity. *NASA/TM-2005-213530. NASA Langley Research Center, Hampton, Virginia, USA (2005)*.

- [Pin12] **Pinho, S.; Darvizeh, R.; Robinson, P.; Schuecker, C.; Camanho, P.:** Material and structural response of polymer-matrix fibre-reinforced composites. *Journal of Composite Materials* 46 (2012) 19-20: 2313-2341.
- [Pip73] **Pipes, R. B.; Cole, B. W.:** On the Off-Axis Strength Test for Anisotropic Materials1. *Journal of Composite Materials* 7 (1973) 2: 246-256.
- [Pol69] **Polak, E.; Ribière, G.:** Note sur la convergence de méthodes de directions conjuguées. *Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle* 3 (1969) 16: 35-43.
- [Pop09] **Popov, V. L.:** Kontaktmechanik und Reibungsphysik. *Polytechnische Universität Tomsk, Tomsk* (2009).
- [Pop13] **Popov, V. L.; Heß, M.:** Methode der Dimensionsreduktion in Kontaktmechanik und Reibung. Eine Berechnungsmethode im Mikro- und Makrobereich. *Springer Vieweg, Berlin, Heidelberg* (2013).
- [Pop18] **Popov, V. L.; Heß, M.; Willert, E.:** Handbuch der Kontaktmechanik. Exakte Lösungen axialsymmetrischer Kontaktprobleme. *Springer Vieweg, Berlin* (2018).
- [Pra84] **Pradhan, B.; Ray, K.:** Stresses Around Partial Contact Pin-Loaded Holes in FRP Composite Plates. *Journal of Reinforced Plastics and Composites* 3 (1984) 1: 69-84.
- [Puc02] **Puck, A.; Kopp, J.; Knops, M.:** Guidelines for the determination of the parameters in Puck's action plane strength criterion. *Composites Science and Technology* 62 (2002) 3: 371-378.
- [Puc69] **Puck, A.:** Festigkeitsberechnung an Glasfaser-Kunststoff-Laminaten bei zusammengesetzter Beanspruchung. *Kunststoffe* 59 (1969) 11: 780-787.
- [Puc69a] **Puck, A.; Schneider, W.:** On failure mechanisms and failure criteria of filament-wound glass-fibre/resin composites. *Plastics & Polymers* (1969): 33-44.
- [Puc96] **Puck, A.:** Festigkeitsanalyse von Faser-Matrix-Laminaten. Modelle für die Praxis. *Hanser, München* (1996).
- [Puc98] **Puck, A.; Schürmann, H.:** Failure analysis of FRP laminates by means of physically based phenomenological models. *Composites Science and Technology* 58 (1998) 7: 1045-1067.
- [Pud15] **Pudenz, K.:** Der neue BMW 7er mit Carbon Core. 130 kg leichter. *Springer Professional / Automobil + Motoren* 21.04.2015 (2015).
- [Ree06] **Reeder, J. R.:** 3D mixed-mode delamination fracture criteria – An experimentalist's perspective, *Hampton, Virginia, USA* (2006).
- [Ren17] **Renjin J Bright, Sumathi M (Hrsg.):** Failure Analysis of FRP Composite Laminates Using Progressive Failure Criteria. *International Journal of Scientific & Engineering Research* 8 (2017) 6: 1651-1662.
- [Reu99] **Reuschel, D.; Mattheck, C.:** Optimization of fiber arrangement with CAIO (computer aided internal optimization) and application to tensile samples. *Transactions of the Built Environment* 40 (1999): 247-255.

- [Ric90] **Richard, H. A.:** Grundlagen und Anwendungen der Bruchmechanik. *Technische Mechanik* 11 (1990) 2: 69-80.
- [Rod18] **Rodrigues, H. C.; Herskovits, J.; Mota Soares, C. M.; Araújo, A. L.; Guedes, J. M.; Folgado, J. O.; Moleiro, F.; Madeira, J. F. A.:** EngOpt 2018 Proceedings of the 6th International Conference on Engineering Optimization. *Springer Nature Switzerland AG, Cham, Switzerland* (2018).
- [Roo08] **Roos, R.:** Model for Interlaminar Model for Interlaminar Normal Stresses in Doubly Curved Laminates. *Dissertation. Eidgenössische Technische Hochschule Zürich* (2008).
- [Sac20] **Sachse, R.:** Untersuchungen zur Auslegung von schadenstoleranten Klebeverbindungen durch mechanische Riss-Stopper-Elemente. *Dissertation. Universität Stuttgart* (2020).
- [San09] **Sandner, T.; Hornfeck, R.:** Experimentelle Untersuchung von Spannungen und Festigkeitseigenschaften an bauteilnahen CFK-Proben und Abgleich mit numerischen Berechnungsverfahren. *Abschlussbericht Forschungsprojekt der STAEDTLER Stiftung. Georg-Simon-Ohm Hochschule Nürnberg, Nürnberg* (2009).
- [Sat10] **Satheesh, R.; Narayana Naik, G.; Ganguli, R.:** Conservative Design Optimization of Laminated Composite Structures Using Genetic Algorithms and Multiple Failure Criteria. *Journal of Composite Materials* 44 (2010) 3: 369-387.
- [Sav56] **Savin, G. N.:** Spannungserhöhung am Rande von Löchern. *Verlag Technik, Berlin* (1956).
- [Sch03] **Schievenbusch, F.:** Beitrag zu hochbelasteten Krafterleitungselementen für Faserverbundbauteile. *Dissertation. Technische Universität Chemnitz* (2003).
- [Sch07] **Schürmann, H.:** Konstruieren mit Faser-Kunststoff-Verbunden. 2. Auflage. *Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg* (2007).
- [Sch13] **Schumacher, A.:** Optimierung mechanischer Strukturen. Grundlagen und industrielle Anwendungen. 2. Auflage. *Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg* (2013).
- [Sch18] **Schumacher, A.; Vietor, T.; Fiebig, S.; Bletzinger, K.-U.; Maute, K.:** Advances in structural and multidisciplinary optimization. Proceedings of the 12th World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization (WCSMO12). *Springer, Cham, Switzerland* (2018).
- [Sch19] **Schlosser, M.; Schumacher, A.; Bellendir, K.:** Effective Modeling of Load Applications in Composite Structures - Accuracy, Complexity, Computational Time. *Key Engineering Materials* 809 (2019): 461-466.
- [Sch73] **Schmit, L. A.; Farshi, B.:** Optimum laminate design for strength and stiffness. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 7 (1973) 4: 519-536.
- [Sch90] **Schapery, R. A.; Davidson, B. D.:** Prediction of Energy Release Rate for Mixed-Mode Delamination Using Classical Plate Theory. *Applied Mechanics Reviews* 43 (1990) 5S: 281-287.

- [Sev13] **Sevenois, R. D. B.:** Stress Analysis and Failure Prediction for Orthotropic Plates with Holes. An Analytic Tool for Orthotropic Plates with Loaded/Unloaded Holes Subjected to Arbitrary In-Plane Loads. *Masterarbeit. Delft University of Technology (2013).*
- [Shi04] **Shi, X.; Zhao, Y.-P.:** Comparison of various adhesion contact theories and the influence of dimensionless load parameter. *Journal of Adhesion Science and Technology 18 (2004) 1: 55-68.*
- [Sou08] **Soutis, C.; Lee, J.:** Scaling effects in notched carbon fibre/epoxy composites loaded in compression. *Journal of Materials Science 43 (2008) 20: 6593-6598.*
- [Sou90] **Soutis, C.; Fleck, N. A.:** Static Compression Failure of Carbon Fibre T800/924C Composite Plate with a Single Hole. *Journal of Composite Materials 24 (1990) 5: 536-558.*
- [Ste12] **Steinke, P.:** Finite-Elemente-Methode. Rechnergestützte Einführung. 4. Auflage. *Springer, Berlin, Heidelberg (2012).*
- [Ste93] **Stellbrink, K.:** Dimensionierung von Krafteinleitungen in FVW-Strukturen. Kleben, Nieten, Schlaufen. *DLR-Mitteilung 93-12. Deutsche Forschungsanstalt für Luft- und Raumfahrt e.V. (DLR), Köln (1993).*
- [Ste96] **Stellbrink, K. K. U.:** Micromechanics of composites. Composite properties of fibre and matrix constituents. *Hanser, München (1996).*
- [Sza03] **Szabó, I.:** Einführung in die technische Mechanik. Nach Vorlesungen. *Springer, Berlin (2003).*
- [Thi06] **Thielemann, K.:** Adaptive Strukturoptimierung von Faserkunststoffverbunden unter Berücksichtigung bionischer Aspekte. *Institut für Verbundwerkstoffe IVW, Technische Universität Kaiserslautern, Kaiserslautern (2006).*
- [Top08] **Topal, U.; Uzman, U.:** Strength Optimization of Laminated Composite Plates. *Journal of Composite Materials 42 (2008) 17: 1731-1746.*
- [Tos00] **Tosh, M. W.; Kelly, D. W.:** On the design, manufacture and testing of trajectorial fibre steering for carbon fibre composite laminates. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing 31 (2000) 10: 1047-1060.*
- [Töw15] **Töws, P.; Spancken, D.; Büter, A.:** Querlenker aus FVK mit integrierten Structural-Health-Monitoring-System. *Plastverarbeiter 19.06.2015 (2015).*
- [Tsa71] **Tsai, S. W.; Wu, E. M.:** A General Theory of Strength for Anisotropic Materials. *Journal of Composite Materials 5 (1971) 1: 58-80.*
- [Ulk17] **Ulke-Winter, L.:** Naturanaloge Optimierungsverfahren zur Auslegung von Faserverbundstrukturen. *Dissertation. Technische Universität Chemnitz (2017).*
- [Ver06] **Verband Deutscher Ingenieure (Hrsg.):** Entwicklung von Bauteilen aus Faser-Kunststoff-Verbund. Blatt 3: Berechnungen. VDI Richtlinien 2014,3. *Beuth, Berlin (2006).*
- [Ver89] **Verband Deutscher Ingenieure (Hrsg.):** Entwicklung von Bauteilen aus Faser-Kunststoff-Verbund. Blatt 1: Grundlagen. VDI Richtlinien 2014,1. *Beuth, Berlin (1989).*



- [Ver93] **Verband Deutscher Ingenieure (Hrsg.):** Entwicklung von Bauteilen aus Faser-Kunststoff-Verbund. Blatt 2: Konzeption und Gestaltung. VDI Richtlinien 2014,2. *Beuth, Berlin (1993).*
- [Vio09] **Violeau, D.; Ladevèze, P.; Lubineau, G.:** Micromodel-based simulations for laminated composites. *Composites Science and Technology* 69 (2009) 9: 1364-1371.
- [Vla03] **Vlassak, J. J.; Ciavarella, M.; Barber, J. R.; Wang, X.:** The indentation modulus of elastically anisotropic materials for indenters of arbitrary shape. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 51 (2003) 9: 1701-1721.
- [Vla94] **Vlassak, J. J.; Nix, W. D.:** Measuring the elastic properties of anisotropic materials by means of indentation experiments. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 42 (1994) 8: 1223-1245.
- [Völ20] **Völkl, H.; Franz, M.; Klein, D.; Wartzack, S.:** Computer Aided Internal Optimisation (CAIO) method for fibre trajectory optimisation: A deep dive to enhance applicability. *Design Science* 6 (2020).
- [Wag01] **Wagner, W.; Gruttmann, F.; Sprenger, W.:** Problemorientierte Modellierung von Faserverbund-Strukturen. *Universität Karlsruhe, Karlsruhe (2001).*
- [Wag17] **Wagner, M.:** Lineare und nichtlineare FEM. *Springer Fachmedien Wiesbaden, Wiesbaden (2017).*
- [Wei99] **Wei Ding:** Delamination Analysis of Composite Laminates. *Dissertation. University of Toronto (1999).*
- [Whi08] **Whitworth, H. A.; Aluko, O.; Tomlinson, N. A.:** Application of the point stress criterion to the failure of composite pinned joints. *Engineering Fracture Mechanics* 75 (2008) 7: 1829-1839.
- [Whi74] **Whitney, J. M.; Nuismer, R. J.:** Stress Fracture Criteria for Laminated Composites Containing Stress Concentrations. *Journal of Composite Materials* 8 (1974) 3: 253-265.
- [Wie07] **Wiedemann, J.:** Leichtbau. Elemente und Konstruktion. 3. Auflage. *Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg (2007).*
- [Wil02] **Wilmes, H.; Kolesnikov, B.:** CFK-Titan, ein Hybridwerkstoff zur verbesserten Kopplung von Faserverbundstrukturen. *Congress Intelligente Leichtbau Systeme. DLR Institut für Strukturmechanik, Braunschweig (2002).*
- [Wil66] **Willis, J. R.:** Hertzian contact of anisotropic bodies. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 14 (1966) 3: 163-176.
- [Wil99] **Wilmes, H.; Herrmann, A. S.; Kolesnikov, B.; Kröber, I.:** Festigkeitsanalysen von Bolzenverbindungen für CFK-Bauteile mit dem Ziel der Erstellung von Dimensionierungsrichtlinien. *DLR Institut für Strukturmechanik, Braunschweig (1999).*
- [Wis09] **Wisnom, M. R.; Hallett, S. R.; Soutis, C.:** Scaling Effects in Notched Composites. *Journal of Composite Materials* 44 (2009) 2: 195-210.

- [Wit13] **Wittel, H.; Muhs, D.; Jannasch, D.; Voßiek, J.:** Roloff/Matek Maschinenelemente. Normung, Berechnung, Gestaltung. 21. Auflage. Springer Fachmedien Wiesbaden, Wiesbaden (2013).
- [Wol14] **Wollschlager, J. A.:** Introduction to the design and analysis of composite structures: An engineers practical guide using OptiStruct. 2. Edition. Wollschlager, Mill Creek, Wash. (2014).
- [Wu16] **Wu, T.; Zhang, K.; Cheng, H.; Liu, P.; Song, D.; Li, Y.:** Analytical modeling for stress distribution around interference fit holes on pinned composite plates under tensile load. *Composites Part B: Engineering* 100 (2016): 176-185.
- [Yam78] **Yamada, S. E.; Sun, C. T.:** Analysis of Laminate Strength and Its Distribution. *Journal of Composite Materials* 12 (1978) 3: 275-284.
- [Yeh03] **Yeh, H.-L.:** Quadric Surfaces Criterion for Composite Materials. *Journal of Reinforced Plastics and Composites* 22 (2003) 6: 517-532.
- [Yu01] **Yu, H. Y.:** A concise treatment of indentation problems in transversely isotropic half-spaces. *International Journal of Solids and Structures* 38 (2001) 10-13: 2213-2232.
- [Zeh06] **Zehnder, N.; Ermanni, P.:** A methodology for the global optimization of laminated composite structures. *Composite Structures* 72 (2006) 3: 311-320.
- [Zha84] **Zhang, K.-D.; Ueng, C. E.:** Stresses Around a Pin-loaded Hole in Orthotropic Plates. *Journal of Composite Materials* 18 (1984) 5: 432-446.
- [Zha98] **Zhang, C.; Hoa, S. V.; Ganesan, R.:** Approximate Solutions for Stresses around Pin-Loaded Holes in Symmetric Composite Laminates. *Journal of Reinforced Plastics and Composites* 17 (1998) 9: 800-818.
- [Zor17] **Zorn, H.:** Optimierung der Materialausrichtung von orthotropen Materialien in Schalenkonstruktionen. *Dissertation. Universität Trier* (2017).

# Anhang

## A Versagenskriterien

Die Bruchbedingungen der in Kapitel 2.1.3 beschriebenen Versagenskriterien werden im Weiteren aufgeführt und anhand von Bruchkurven miteinander verglichen.

### *Differenzierende Bruchkriterien*

Für den ebenen Spannungszustand (ESZ) lauten das **Maximalspannungskriterium**

$$\frac{\sigma_{11}}{R_{11Z}} = 1, \quad \frac{\sigma_{11}}{-R_{11D}} = 1, \quad \frac{\sigma_{22}}{R_{22Z}} = 1, \quad \frac{\sigma_{22}}{-R_{22D}} = 1, \quad \frac{\tau_{12}}{R_{12}} = 1, \quad (\text{A.1a-e})$$

wobei die ersten beiden Gleichungen eher dem Faserbruch (FB) und die anderen dem Zwischenfaserbruch (ZFB) zuzuordnen sind. Im dreidimensionalen Raum wird das Kriterium um vier weitere Gleichungen erweitert (vgl. [Dan06] S.124).

Im ESZ lautet das **HASHIN-Kriterium** (vgl. [Has80] S.332):

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{\sigma_{11}}{R_{11Z}} \right)^2 + \left( \frac{\tau_{12}}{R_{12}} \right)^2 &= 1 & ; \quad \sigma_{11} \geq 0 \\ -\frac{\sigma_{11}}{R_{11D}} &= 1 & ; \quad \sigma_{11} < 0 \end{aligned} \right\} \text{FB}$$
$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{\sigma_{22}}{R_{22Z}} \right)^2 + \left( \frac{\tau_{12}}{R_{12}} \right)^2 &= 1 & ; \quad \sigma_{22} \geq 0 \\ \left( \frac{\sigma_{22}}{2R_{23}} \right)^2 + \left( \frac{\tau_{12}}{R_{12}} \right)^2 + \left[ \left( \frac{R_{22D}}{2R_{23}} \right)^2 - 1 \right] \frac{\sigma_{22}}{R_{22D}} &= 1 & ; \quad \sigma_{22} < 0 \end{aligned} \right\} \text{ZFB}$$

(A.2a-d)

Auf dem Stand von [Cun12] lautet das **CUNTZE-Kriterium** für den FB

$$\frac{\sigma_{11}}{\bar{R}_{11Z}} = 1 \quad ; \quad \sigma_{11} \geq 0, \quad (A.3a,b)$$

$$-\frac{\sigma_{11}}{\bar{R}_{11D}} = 1 \quad ; \quad \sigma_{11} < 0$$

und für den ZFB im Modus A (IFF1)<sup>40</sup>

$$\frac{\sigma_{22} + \sigma_{33} + \sqrt{(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + 4\tau_{23}^2}}{2\bar{R}_{22Z}} = 1, \quad (A.4a)$$

im Modus B (IFF2)<sup>40</sup>

$$\frac{b_{12}}{\bar{R}_{12}^3} \left[ (\sigma_{22} + \sigma_{33})(\tau_{13}^2 + \tau_{12}^2) - (\sigma_{22} - \sigma_{33})(\tau_{13}^2 - \tau_{12}^2) + 4\tau_{23}\tau_{13}\tau_{12} \right] + \frac{(\tau_{13}^2 + \tau_{12}^2)^2}{\bar{R}_{12}^3} = 1 \quad (A.4b)$$

und im Modus C (IFF3)<sup>40</sup>

$$b_{22}^{\tau} \frac{(\sigma_{22} + \sigma_{33}) + \sqrt{(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + 4\tau_{23}^2}}{\bar{R}_{22D}} - \frac{\sigma_{22} + \sigma_{33}}{\bar{R}_{22D}} = 1. \quad (A.4c)$$

Für die benötigten Reibungsparameter zur Anpassung gilt (vgl. [Cun12a])

$$1 < b_{22}^{\tau} < 1,25 \quad \text{und} \quad 0 < b_{12} < 0,3. \quad (A.5a,b)$$

<sup>40</sup> Die Zuordnung zu den Modi erfolgt nach [Cun03]

Das **LaRC03-Kriterium** für den ESZ gemäß [Dav05] lautet für den FB

$$\frac{\sigma_{11}}{R_{11Z}} = 1 \quad ; \quad \sigma_{11} \geq 0,$$

$$\left\langle \frac{|\tau_{12}^*| + \eta_L \cdot \sigma_{22}^*}{S_L^*} \right\rangle = 1 \quad ; \quad \sigma_{11} < 0 \quad \text{und} \quad \sigma_{22} < 0, \quad (\text{A.6a-c})^{41}$$

$$(1-g) \frac{\sigma_{22}^*}{R_{22Z}^*} + g \left( \frac{\sigma_{22}^*}{R_{22Z}^*} \right)^2 + \left( \frac{\tau_{12}^*}{S_L^*} \right)^2 = 1 \quad ; \quad \sigma_{11} < 0 \quad \text{und} \quad \sigma_{22} \geq 0$$

und für den ZFB

$$(1-g) \frac{\sigma_{22}}{R_{22Z}^*} + g \left( \frac{\sigma_{22}}{R_{22Z}^*} \right)^2 + \left( \frac{\tau_{12}}{S_L^*} \right)^2 = 1 \quad ; \quad \sigma_{22} \geq 0,$$

$$\left( \frac{\tau_{T,\text{eff}}^*}{S_T} \right)^2 + \left( \frac{\tau_{L,\text{eff}}^*}{S_L^*} \right)^2 = 1 \quad ; \quad \sigma_{22} < 0 \quad \text{und} \quad \sigma_{11} < -R_{22D}, \quad (\text{A.7a-c})$$

$$\left( \frac{\tau_{T,\text{eff}}}{S_T} \right)^2 + \left( \frac{\tau_{L,\text{eff}}}{S_L^*} \right)^2 = 1 \quad ; \quad \sigma_{22} < 0 \quad \text{und} \quad \sigma_{11} \geq -R_{22D}.$$

Die hierbei durch den In-situ-Effekt erhöhten Festigkeiten sind für eine dünne Schicht (näheres in [Dav05] S.333f) mit

$$R_{22Z}^* = \sqrt{\frac{8G_{lc}}{2\pi t \left( \frac{1}{E_{22}} - \frac{\nu_{21}^2}{E_{11}} \right)}} \quad \text{und} \quad S_L^* = \sqrt{\frac{8G_{12}G_{lc}}{\pi t}} = R_{12}^* \quad (\text{A.8a,b})$$

zu berechnen, wobei  $G_{lc}$  und  $G_{1c}$  die Risswiderstandsfähigkeit des Materials<sup>42</sup> beschreiben und ihr Verhältnis als

<sup>41</sup> McAuley Operator  $\langle x \rangle = \frac{1}{2}(x + |x|)$  bezeichnet den positiven Anteil von  $x$

<sup>42</sup> Werte in [Pin12] S.2330, [Kad12] S.2312 und [Cam07] S.2717

$$g = \frac{G_{lc}}{G_{llc}} \quad (\text{A.9})^{43}$$

definiert ist. Die Querschubfestigkeit der Bruchebene wird mit

$$S_T = R_{22D} \cos \theta \left( \sin \theta + \frac{\cos \theta}{\tan 2\theta} \right) \quad (\text{A.10})$$

bestimmt. Des Weiteren gilt für die effektiven bruchebenenbezogenen Spannungen

$$\begin{aligned} \tau_{T,\text{eff}} &= \langle -\sigma_{22} \cos \theta (\sin \theta - \eta_T \cos \theta) \rangle \quad \text{und} \\ \tau_{L,\text{eff}} &= \langle (|\tau_{12}| + \sigma_{22} \eta_L \cos \theta) \cos \theta \rangle, \end{aligned} \quad (\text{A.11a,b})$$

wobei  $\theta$  der Bruchebenenwinkel ist und die Längs-/ Quereinflussparameter mit

$$\eta_T = \frac{-1}{\tan 2\theta} \quad \text{sowie} \quad \eta_L = \eta_T \frac{R_{12}}{S_T} \quad (\text{A.12a,b})$$

ermittelt werden. Ferner findet eine Anpassung der Spannungen an den Verlust der Parallelität der Faserorientierung aufgrund von Beanspruchung längs der Faser statt, was die Gleichungen (A.6b,c) und (A.7b) betrifft. Die korrigierten Spannungen werden mit dem Faserabweichungswinkel  $\psi$  wie folgt bestimmt:

$$\begin{aligned} \tau_{T,\text{eff}}^* &= \langle -\sigma_{22}^* \cos \theta (\sin \alpha - \eta_T \cos \theta) \rangle, \\ \tau_{L,\text{eff}}^* &= \langle (|\tau_{12}^*| + \sigma_{22}^* \eta_L \cos \theta) \cos \theta \rangle, \end{aligned} \quad (\text{A.13a-d})$$

$$\begin{aligned} \sigma_{22}^* &= \sigma_{11} \sin^2 \psi + \sigma_{22} \cos^2 \psi - |\tau_{12}| \sin \psi \cos \psi, \\ \tau_{12}^* &= -\sigma_{11} \sin \psi \cos \psi + \sigma_{22} \sin \psi \cos \psi + |\tau_{12}| (\cos^2 \psi - \sin^2 \psi). \end{aligned}$$

Der Faserabweichungswinkel  $\psi$  kann mit

---

<sup>43</sup> Gültig für eine dünne Schicht, näheres in [Dav05] S.333f und S342

$$\psi = \frac{1}{G_{12} + \sigma_{11} - \sigma_{22}} \left[ |\tau_{12}| + (G_{12} - R_{11D}) \cdot \arctan \left( \frac{1 - \sqrt{1 - 4 \left( \frac{S_L^*}{R_{11D}} + \eta_L \right) \frac{S_L^*}{R_{11D}}}}{2 \left( \frac{S_L^*}{R_{11D}} + \eta_L \right)} \right) \right] \quad (\text{A.14})$$

ermittelt werden.

### **Pauschalbruchkriterien**

Für den dreidimensionalen Spannungszustand lautet das **HILL-Kriterium**

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2}{R_{11}^2 + R_{22}^2 - R_{33}^2} + \frac{(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2}{-R_{11}^2 + R_{22}^2 + R_{33}^2} + \frac{(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2}{R_{11}^2 - R_{22}^2 + R_{33}^2} \right] + \left( \frac{\tau_{12}}{R_{12}} \right)^2 + \left( \frac{\tau_{13}}{R_{13}} \right)^2 + \left( \frac{\tau_{23}}{R_{23}} \right)^2 = 1 \quad (\text{A.15})$$

wobei entsprechend der Richtung der Spannungen Zug- oder Druckfestigkeiten zu verwenden sind (vgl. [Hil48]).

Gleiches gilt beim  **TSAI-HILL-Kriterium** (vgl. [Azz65]), das für den ESZ wie folgt lautet

$$\left( \frac{\sigma_{11}}{R_{11}} \right)^2 - \frac{\sigma_{11} \sigma_{22}}{R_{11} R_{11}} + \left( \frac{\sigma_{22}}{R_{22}} \right)^2 + \left( \frac{\tau_{12}}{R_{12}} \right)^2 = 1. \quad (\text{A.16})$$

Das **HOFFMAN-Kriterium** gemäß [Hof67] lautet für den ESZ

$$\frac{\sigma_{11}^2}{R_{11Z} R_{11D}} - \frac{\sigma_{11} \sigma_{22}}{R_{11Z} R_{11D}} + \frac{\sigma_{22}^2}{R_{22Z} R_{22D}} + \left( \frac{\tau_{12}}{R_{12}} \right)^2 + \left( \frac{1}{R_{11Z}} - \frac{1}{R_{11D}} \right) \sigma_{11} + \left( \frac{1}{R_{22Z}} - \frac{1}{R_{22D}} \right) \sigma_{22} = 1. \quad (\text{A.17})$$

Das **TSAI-WU-Kriterium** in [Tsa71] enthält einen Interaktionskoeffizienten, der hier mit  $F_{12}^* = -0,5$  (vgl. [Hin04] S.335f) gewählt wird. Damit erhält man

$$\frac{\sigma_{11}^2}{R_{11Z}R_{11D}} - \frac{\sigma_{11}\sigma_{22}}{\sqrt{R_{11Z}R_{11D}R_{22Z}R_{22D}}} + \frac{\sigma_{22}^2}{R_{22Z}R_{22D}} + \left(\frac{\tau_{12}}{R_{12}}\right)^2 + \left(\frac{1}{R_{11Z}} - \frac{1}{R_{11D}}\right)\sigma_{11} + \left(\frac{1}{R_{22Z}} - \frac{1}{R_{22D}}\right)\sigma_{22} = 1 \quad . \quad (\text{A.18})$$

### **Delaminationskriterien**

Das **pauschale QDC-Kriterium** (Quadratic Delamination Criterion) in [Bre88] lautet

$$\left(\frac{\sigma_{33D}}{R_{33D}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{33Z}}{R_{33Z}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{13}}{R_{13}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{23}}{R_{23}}\right)^2 = 1 \quad . \quad (\text{A.19})$$

Ein **differenzierendes QDC-Kriterium** ist in [Cam99] angegeben mit

$$\left(\frac{\sigma_{33}}{R_{33Z}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{13}}{R_{13}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{23}}{R_{23}}\right)^2 = 1 \quad ; \quad \sigma_{33} > 0 \quad (\text{A.20})$$

$$\left(\frac{\tau_{13}}{R_{13}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{23}}{R_{23}}\right)^2 = 1 \quad ; \quad \sigma_{33} \leq 0 \quad .$$

In [Hou01] wird ein **differenzierendes QDC-Kriterium mit Einflussparametern** ( $d_{ms}$ ,  $d_{fs}$ ,  $\delta$ ) zur Berücksichtigung anderer Schädigungen vorgeschlagen. Für  $\sigma_{33} \geq 0$  gilt

$$\left(\frac{\sigma_{33}}{R_{33Z}}\right)^2 + \frac{\tau_{13}^2 + \tau_{23}^2}{R_{13}^2 (d_{ms} d_{fs} + \delta)} = 1 \quad , \quad (\text{A.21a})$$

für eine kleine interlaminare Normaldruckbeanspruchung  $\left(-\sqrt{\frac{\tau_{13}^2 + \tau_{23}^2}{8}} \leq \sigma_{33} < 0\right)$



$$\frac{\tau_{13}^2 + \tau_{23}^2 - 8\sigma_{33}^2}{R_{13}^2 (d_{ms} d_{fs} + \delta)} = 1 \quad (\text{A.21b})$$

und für große Druckspannungen  $\sigma_{33} < -\sqrt{\frac{\tau_{13}^2 + \tau_{23}^2}{8}}$  wird Delamination ausgeschlossen.

Für den Fall, dass vor der Delamination kein anderes Versagen aufgetreten ist, sind die Parameter mit  $d_{ms} = d_{fs} = 1$  und  $\delta = 0$  zu wählen. Auf die Wahl der Parameter für andere Fälle wird in [Hou01] nicht eingegangen.

Ein physikalischer Ansatz auf Basis der **Energiefreisetzungsrate** wird in [Ree06] verfolgt. Dabei wird für jeden Beanspruchungsmodus (vgl. Bild 2.6) die tatsächliche Energiefreisetzungsrate in Bezug zur kritischen Energiefreisetzungsrate gesetzt. Man erhält

$$\left(\frac{G_I}{G_{Ic}}\right)^\alpha + \left(\frac{G_{II}}{G_{IIc}}\right)^\beta + \left(\frac{G_{III}}{G_{IIIc}}\right)^\chi = 1. \quad (\text{A.22})$$

### Bruchkurven

Mit einem Bruchkörper werden grafisch die Bruchbedingungen im dreidimensionalen Spannungsraum  $(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \tau_{12})$  beschrieben. Dabei stellt jeder Punkt der Bruchkörperoberfläche einen Spannungszustand dar, der die Bruchbedingung erfüllt. Für einen CFK mit den Werkstoffkennwerten laut Tabelle 3.1 ist in Bild A.1 exemplarisch der Bruchkörper für das Versagenskriterium nach PUCK abgebildet. Ein Schnitt durch einen derartigen Bruchkörper gibt eine Bruchkurve dieser Schnittebene ( $\sigma_{11} \vee \sigma_{22} \vee \tau_{12} = \text{konst.}$ ) wieder. Im Bild A.2 sind die Bruchkurven für einige der obigen Versagenskriterien dargestellt.

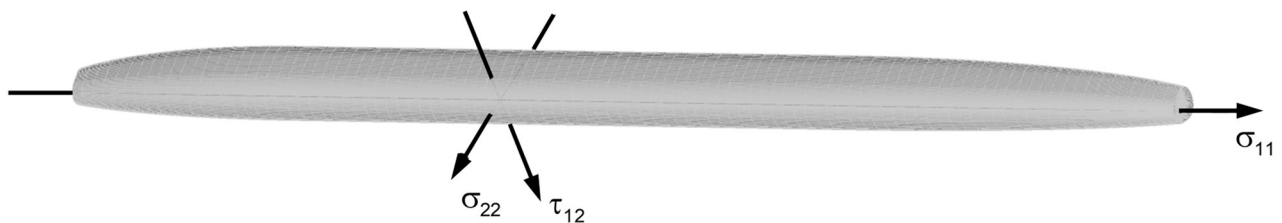


Bild A.1: Bruchkörper für das Versagenskriterium nach PUCK

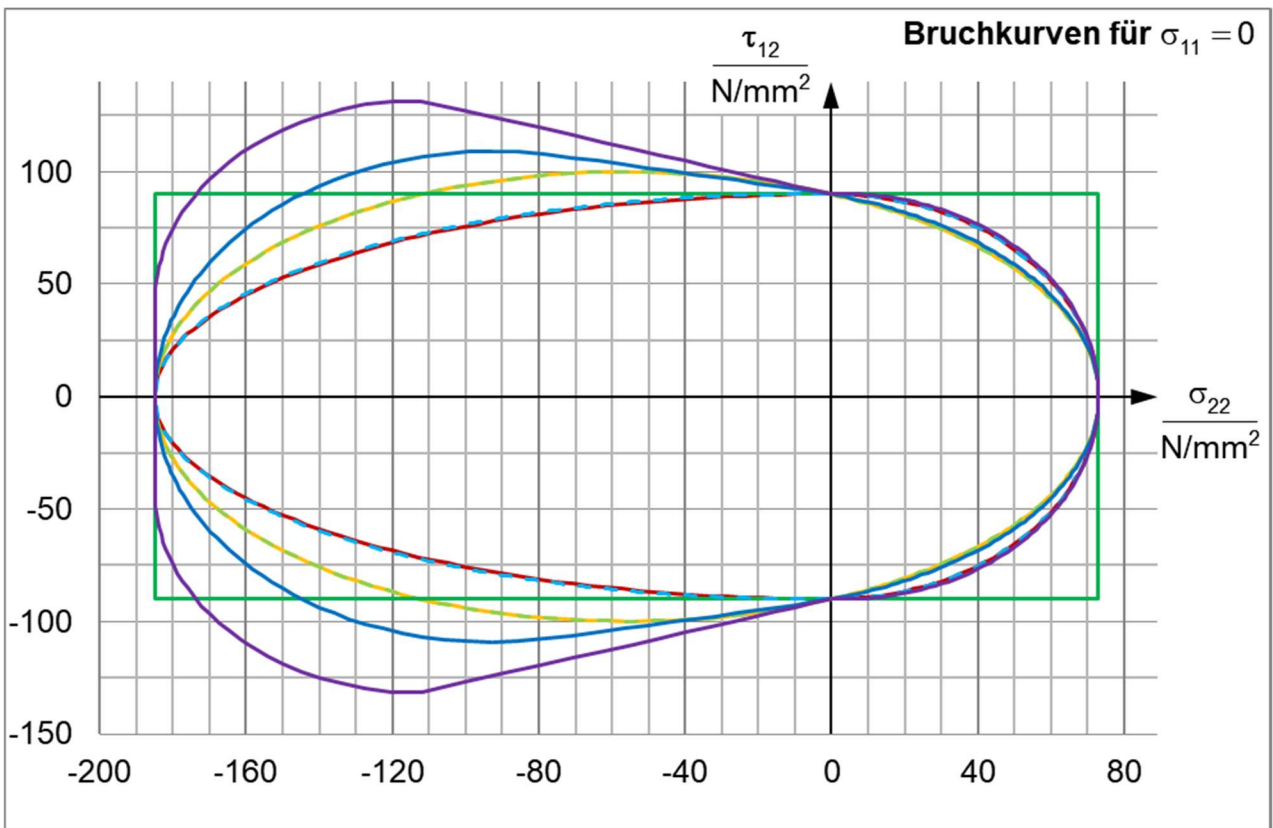
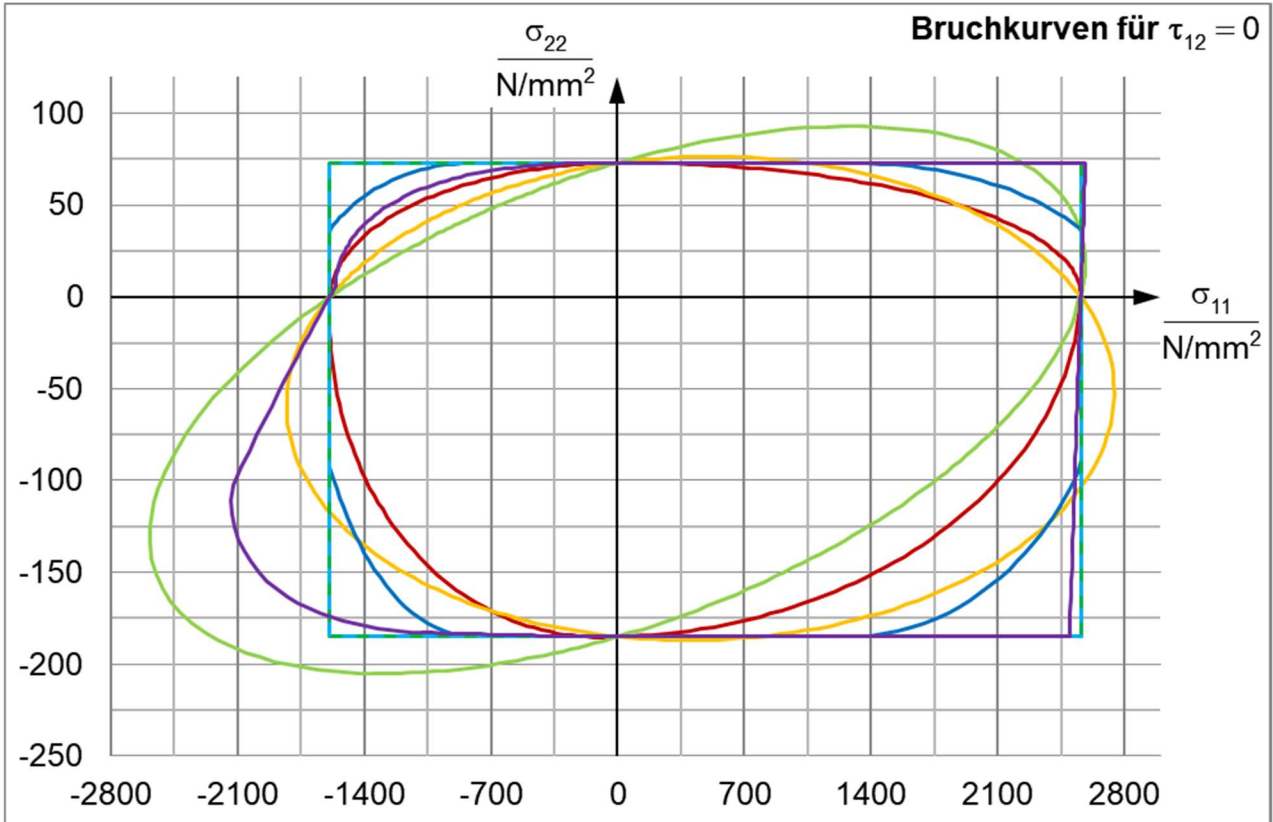


Bild A.2: Bruchkurven für ausgewählte Versagenskriterien

## B Bruchkräfte verschiedener Versagensarten bei Bolzenverbindungen in FVK

Für die in Kapitel 2.1.4 aufgeführten Versagensarten bei Bolzenverbindungen in faserverstärkten Strukturen können die jeweiligen Bruchkräfte überschlägig berechnet werden. Scher- und Biegebruch des Bolzens können mit

$$F_{B\_Scherung} = \frac{R_{eH}}{\sqrt{3}} \frac{\pi d^2}{2} \quad \text{und} \quad F_{B\_Biegung} = \frac{4 \cdot \sigma_{b,zul} \cdot W_b}{\frac{l_{\text{Bolzen}} - t}{2}}, \quad (\text{B.1})^{44}$$

$$\text{wobei } W_b = \frac{\pi d^3}{32} \quad \text{und} \quad \sigma_{b,zul} \approx 0,3 \cdot R_m,$$

abgeschätzt werden. Die Bruchkräfte für das Scherauszugs-, Querschnitts-, Trennspalt- und Lochleibungsversagen eines faserverstärkten Verbindungselements können überschlägig mit

$$F_{B\_Scherauszug} = R_{xy} \cdot 2e \cdot t, \quad F_{B\_Querschnitt} = R_x \cdot (B - d) \cdot t, \quad (\text{B.2a-d})^{45}$$

$$F_{B\_Trennspalt} = R_y \cdot \left( e - \frac{d}{2} \right) \cdot t \quad \text{und} \quad F_{B\_Lochleibung} = R_L \cdot d \cdot t$$

bestimmt werden, wobei der Bolzendurchmesser  $d$ , die Laminatdicke  $t$ , die Laminatbreite  $B$  und der Randabstand  $e$  gemäß Kapitel 3.1 gewählt wird. Die globalen Festigkeiten werden auf Basis der Werkstoffkennwerte laut Tabelle 3.1 bestimmt. Lediglich für die Lochleibungsfestigkeiten  $R_L$  werden Literaturwerte verwendet (näheres in [Sch07] S.535, [Ber92] S.142). Man beachte dabei jedoch die anderen Abmessungen der Lamine. Für das Bolzenversagen (Baustahl S235) ergeben sich unabhängig vom Laminat die Bruchkräfte

$$F_{B\_Scherung} = 13\,640 \text{ N} \quad \text{und} \quad F_{B\_Biegung} = 5\,429 \text{ N}.$$

Die Bruchkräfte verschiedener Lamine sind in Tabelle B.1 aufgeführt.

<sup>44</sup> Details in [Sch07] S.517 bzw. in [Wit13] S.282ff, Widerstandsmoment gemäß [Wit13] TB 11-3

<sup>45</sup> Details in [Sch07] S.521ff und [Ste93] S.46

	<b>Festigkeiten</b> in N/mm <sup>2</sup>	$F_{B\_Scher}$ auszug in kN	$F_{B\_Querschnitt}$ in kN	$F_{B\_Trennsplatt}$ in kN	$F_{B\_Lochleibung}$ in kN
<b>UD-Laminat</b> [0°]	$R_x = 2560$	–	942,1	–	–
	$R_y = 73$	–	–	28,0	–
	$R_{xy} = 90$	72,0	–	–	–
	$R_L = 366$ <sup>46</sup>	–	–	–	11,7
<b>UD-Laminat</b> [90°]	$R_x = 73$	–	26,9	–	–
	$R_y = 2560$	–	–	983,0	–
	$R_{xy} = 90$	72,0	–	–	–
	$R_L = 90$ <sup>47</sup>	–	–	–	2,9
<b>Kreuzverbund</b> <sup>48</sup> [0°/90°] <sub>s</sub>	$R_x = 761,2$	–	280,1	–	–
	$R_y = 761,2$	–	–	292,3	–
	$R_{xy} = 90$	72,0	–	–	–
	$R_L = 475$ <sup>47</sup>	–	–	–	15,2
<b>Winkelverbund</b> <sup>48</sup> [+45°/-45°] <sub>s</sub>	$R_x = 172,3$	–	63,4	–	–
	$R_y = 172,3$	–	–	66,2	–
	$R_{xy} = 756,7$	605,4	–	–	–
	$R_L = 570$ <sup>47</sup>	–	–	–	18,2
<b>Quasiisotropes Laminat</b> <sup>48</sup> [0°/45°/-45°/90°] <sub>s</sub> (25/25/25/25) %	$R_x = 600,3$	–	220,9	–	–
	$R_y = 600,3$	–	–	230,5	–
	$R_{xy} = 383,9$	307,1	–	–	–
	$R_L = 730$ <sup>47</sup>	–	–	–	23,4
<b>Flugzeugbaulaminat</b> <sup>48</sup> [0°/45°/-45°/90°] <sub>s</sub> (70/10/10/10) %	$R_x = 1191,4$	–	438,4	–	–
	$R_y = 282,7$	–	–	108,5	–
	$R_{xy} = 207,6$	166,0	–	–	–
	$R_L = 570$ <sup>46, 47</sup>	–	–	–	18,2

Tabelle B.1: Für ausgewählte Laminatüberschlägig berechnete Bruchkräfte für die Versagensarten bei Bolzenverbindungen

<sup>46</sup> [Sch07] S.535

<sup>47</sup> [Ber92] S.142

<sup>48</sup> Festigkeiten bis auf  $R_L$  mit Altair ESAComp ermittelt

	<b>Festigkeiten</b> in N/mm <sup>2</sup>	$F_{B\_Scher auszug}$ in kN	$F_{B\_Querschnitt}$ in kN	$F_{B\_Trenns palt}$ in kN	$F_{B\_Lochleibung}$ in kN
<b>Flugzeugbaulaminat</b> <sup>49</sup> [0°/45°/-45°/90°] <sub>s</sub> (50/20/20/10) %	$R_x = 913,9$	–	336,3	–	–
	$R_y = 949,5$	–	–	134,2	–
	$R_{xy} = 325,1$	260,1	–	–	–
	$R_L = 927$ <sup>50</sup>	–	–	–	29,7
	$R_L = 750$ <sup>51</sup>	–	–	–	24,0

Tabelle B.1: (Fortsetzung)

---

<sup>49</sup> Festigkeiten bis auf  $R_L$  mit Altair ESAComp ermittelt

<sup>50</sup> [Sch07] S.535

<sup>51</sup> [Ber92] S.142

## C OptiStruct-Modelle von Kragsscheibe und Bolzenverbindung

Die Parameter für die OptiStruct-Modelle der Kragsscheibe (Kapitel 4) und der Bolzenverbindung (Kapitel 3 und 5) sind mit der Zuordnung zu den einzelnen Berechnungen und Optimierungen in Tabelle C.1 angegeben. Die Bezeichnungen sind dabei wie folgt definiert:

A1: Topologieoptimierung	der Kragsscheibe in Kapitel 4
A2: Parameteroptimierung	der Kragsscheibe in Kapitel 4
B1: Elementdickenoptimierung (Free Size)	der Kragsscheibe in Kapitel 4
B2: Diskrete Schichtdickenoptimierung (Size)	der Kragsscheibe in Kapitel 4
B3: Optimierung der Lagenanordnung (Shuffle)	der Kragsscheibe in Kapitel 4
C1: Kontaktanalyse	der Bolzenverbindung in Kapitel 3, 5
D1: Topologieoptimierung	der Bolzenverbindung in Kapitel 5
D2: Parameteroptimierung	der Bolzenverbindung in Kapitel 5
E1: Elementdickenoptimierung (Free Size)	der Bolzenverbindung in Kapitel 5
E2: Diskrete Schichtdickenoptimierung (Size)	der Bolzenverbindung in Kapitel 5
E3: Optimierung der Lagenanordnung (Shuffle)	der Bolzenverbindung in Kapitel 5

Für nicht aufgelistete Parameter werden die Standardwerte verwendet. Das gilt ebenso für die verwendeten Optimierungsalgorithmen. Die eingesetzten Standardalgorithmen für die entsprechenden Optimierungsaufgaben sind in Kapitel 2.3.3 erläutert.

Die in Kapitel 4 und 5 verwendeten, programminternen automatischen Ausgaben werden über Parameter gesteuert, die in Tabelle C.1 unter „Kontrolle der Berechnungsausgabe (control cards)“ aufgeführt sind.

Die automatische Erstellung eines Volumenmodells in Kapitel 5 für ein Laminat erfolgt über den Reiter *Aerospace* unter dem Pfad *Composites / Shell To Solid Conversion*. Dazu muss im *User Profil* unter dem Reiter *Engineering Solutions Aerospace* und *OptiStruct* gewählt werden. Der Prozess kann nur für ein definiertes Laminat (STACK), welches eine PCOMPP Elementformulierung erfordert, durchgeführt werden.

Parameter	Bezeichnung	A	A	B	B	B	C	D	D	E	E	E
		1	2	1	2	3	1	1	2	1	2	3
<b>Elementformulierung</b>												
	PSHELL <i>Schalenelemente</i>	x										
	PSOLID <i>Volumenelemente</i>						x	x				
	PCOMPP <i>Schalenelemente zur schichtbasierten Modellierung von Laminaten</i>		x	x	x	x			x	x	x	x
	PCOMPP, Z0 REAL <i>Elementebene entspricht Laminatmittelebene</i>		x	x	x	x						
	PCOMPP, Z0 BOTTOM <i>Elementebene entspricht Laminatunterseite</i>								x	x	x	x
	PCOMPP, SB 90 <i>Interlaminare Schubfestigkeit <math>R_{13} = 90 \frac{N}{mm^2}</math></i>		x	x	x	x			x	x	x	x
	PCOMPP, FT PUCK <i>Versagensberechnung nach der Theorie von PUCK</i>		x	x	x	x			x	x	x	x
	PCOMPG „Grundlaminat“ <i>Schalenelemente zur zonenbasierten Modellierung von Laminaten</i>								x	x	x	x
	PCOMPG, Z0 BOTTOM <i>Elementebene entspricht Laminatunterseite</i>								x	x	x	x
	PCOMPG, SB 90 <i>Interlaminare Schubfestigkeit <math>R_{13} = 90 \frac{N}{mm^2}</math></i>								x	x	x	x
	PCOMPG, FT PUCK <i>Versagensberechnung nach der Theorie von PUCK</i>								x	x	x	x
	PCOMPLS <i>Volumenelemente zur schichtbasierten Modellierung von Laminaten</i>						x					
	PCOMPLS, SB 90 <i>Interlaminare Schubfestigkeit <math>R_{13} = 90 \frac{N}{mm^2}</math></i>						x					

Tabelle C.1: Zuordnungen der Parameter der OptiStruct-Modelle zu den einzelnen Berechnungen und Optimierungen

Parameter	Bezeichnung	A	A	B	B	B	C	D	D	E	E	E
		1	2	1	2	3	1	1	2	1	2	3
<b>Material</b>												
	MAT1 <i>Isotroper Werkstoff</i>	x					x	x				
	MAT8 <i>Transversal isotroper Werkstoff</i>		x	x	x	x			x	x	x	x
	MATF, CRI PUCK <i>Erweiterung von MAT8 mit den Festigkeitswerten für das Versagenskriterium nach PUCK</i>		x	x	x	x			x	x	x	x
	MAT9ORT <i>Orthotroper Werkstoff (transversal isotrop mit <math>E_{22} = E_{33}</math>, <math>G_{12} = G_{13}</math>)</i>						x	x				
	MATF, CRI PUCK3D <i>Erweiterung von MAT9ORT mit den Festigkeitswerten für das Versagenskriterium nach PUCK</i>						x	x				
<b>Lastfall (SUBCASE)</b>												
	LSTAT <i>Lineare statische Analyse</i>	x	x	x	x	x		x	x	x	x	x
	NLSTAT <i>Nichtlineare statische Analyse</i>						x					
<b>Schichtdefinition (PLY)</b>												
	TMANUF <i>Fertigbare Mindestschichtdicke (diskrete Entwurfsvariable)</i>		x	x	x				x	x	x	
<b>Laminatdefinition (STACK)</b>												
	SYM <i>symmetrischer Laminataufbau</i>		x									
	SMEAR <i>Biege-Dehn-Kopplung wird ignoriert</i>			x	x							

Tabelle C.1: (Fortsetzung)



Parameter	Bezeichnung	A	A	B	B	B	C	D	D	E	E	E
		1	2	1	2	3	1	1	2	1	2	3
<b>Kontaktdefinition</b>												
	SURF „Bolzen“ / SURF „Lochrand“ <i>Definition der Elementflächen für Bolzen bzw. Lochrand als Kontaktfläche</i>						x					
	SURF „Grundlaminat“ / SURF „Verstärkungslaminat“ <i>Definition der Elementflächen für Grund- bzw. Verstärkungslaminat als Kontaktfläche</i>							x	x	x	x	x
	CONTACT, STICK <i>Definition des Kontakts als haftend</i>						x					
	CONTACT, SSID = „Lochrand“ <i>Festlegen der Slave-Kontaktfläche</i>						x					
	CONTACT, MSID = „Bolzen“ <i>Festlegen der Master-Kontaktfläche</i>						x					
	CONTACT, DISCRET, S2S <i>Elementflächenbasierte Kontaktflächendiskretisierung</i>						x					
	NLPARM, NINC 10 <i>Inkrementelle Lastaufbringung in 10 Schritten</i>						x					
	TIE, SSID = „Verstärkungslaminat“ <i>Festlegen der Slave-Kontaktfläche</i>							x	x	x	x	x
	TIE, MSID = „Grundlaminat“ <i>Festlegen der Master-Kontaktfläche</i>							x	x	x	x	x
	TIE, SRCHDIS, 2 <i>Suchradius von 2 mm zur Findung der Kontaktpartner der starren Verbindung</i>							x	x	x	x	x

Tabelle C.1: (Fortsetzung)

Parameter	Bezeichnung	A	A	B	B	B	C	D	D	E	E	E
		1	2	1	2	3	1	1	2	1	2	3
<b>Kontrolle der Berechnungsausgabe (control cards)</b>												
GLOBAL_OUTPUT_REQUEST, CSTRESS= ALL <i>Schichtspannungen für alle Schichte</i>			x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
GLOBAL_OUTPUT_REQUEST, CONTF = ALL <i>Alle kontaktspezifischen Ausgabegrößen</i>							x	x				
GLOBAL_OUTPUT_REQUEST, CFAILURE = ALL <i>Bruchfunktionswerte für alle Schichten</i>			x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
PARAM, TCLTSTEP, 0.01 <i>Bereichsschrittweite des Materialfüllgrads = 0,01</i>		x						x				
PARAM, EXPERTNL, CNTSTB <i>Stabilisierung der Kontrollmechanismen bei der Kontaktflächendiskretisierung</i>							x					
GAPPRM, GAPCMPL, NO <i>Berechnung der mittleren Nachgiebigkeit unter Ausschluss der Kontaktsteifigkeiten</i>							x					
OUTPUT, REGCOMPL, YES <i>Mittlere Nachgiebigkeit für enthaltene Elementformulierungen und Materialien</i>							x	x	x	x	x	x
OUTPUT, FSTOSZ, LAST, 2, ADVFREE, IGNORE <i>Automatische Input-Datei für die Size Optimierung. Erzeugt für die letzte Iteration durch den „erweiterten Algorithmus“ bis zu 2 Schichten mit freien Dicken je Faserorientierung unter Vernachlässigung der Elemente mit einer Dicke unter 5 % der Maximaldicke</i>				x						x		
OUTPUT, SZTOSH <i>Automatische Input-Datei für die Shuffle Optimierung mit Aufteilung des Laminats in Mindestschichtdicken (TMANUF)</i>					x				x		x	
<b>Systemantworten (DRESP1)</b>												
VOLUME, TOTAL <i>Gesamtvolumen aller Elemente</i>		x	x	x	x	x		x	x	x	x	x
COMP, TOTAL <i>Gesamte mittlere Nachgiebigkeit aller Elemente</i>		x	x	x	x	x		x	x	x	x	x
CFAILURE, PCOMPP <i>Bruchfunktionswerte für jede Schicht eines PCOMPP-Elements</i>			x	x	x	x			x	x	x	x
CFAILURE, PCOMPG <i>Bruchfunktionswerte für jede Schicht eines PCOMPG-Elements</i>									x	x	x	x

Tabelle C.1: (Fortsetzung)

Bezeichnung	A 1	A 2	B 1	B 2	B 3	C 1	D 1	D 2	E 1	E 2	E 3
<b>Parameter</b>											
<b>Zielfunktion (DESOBJ(MIN))</b>											
min COMP <i>Minimierung der gesamten mittleren Nachgiebigkeit</i>	x	x	x	x	x		x	x	x	x	x
<b>Restriktionen (DCONSTR)</b>											
VOLUME, UB <i>Oberer Grenzwert für das Gesamtvolumen aller Elemente</i>	x	x	x	x			x	x	x	x	x
CFailure 1 <i>Bruchfunktionswerte für jede Schicht eines Elements ≤ 1</i>		x	x	x	x			x	x	x	x
<b>Entwurfsvariablen</b>											
DPTL <i>Entwurfsvariable für die Topologieoptimierung = Materialfüllgrad</i>	x						x				
DSIZE <i>Entwurfsvariable für die Free Size Optimierung = Elementdicke</i>			x						x		
DPTL bzw. DSIZE, MINDIM 10 <i>Mindestausdehnung ausgeprägter Bereiche = 10 mm</i>	x		x								
DESVAR <i>Entwurfsvariable mit Unter-, Obergrenze, Startwerten, gegebenenfalls mit diskreten Werten</i>		x		x				x		x	
DDVAL <i>Grenzen und Schrittweite diskreter Werte</i>		x						x			
DVPREL1 <i>Zuweisung der Schichteigenschaft (Winkel oder Dicke) zur Entwurfsvariable</i>		x		x				x		x	
DCOMP <i>Grenze der Laminatgesamtdicke</i>		x		x				x		x	
DSHUFFLE <i>Entwurfsvariable mit Lage der Einzelschichten</i>					x						x

Tabelle C.1: (Fortsetzung)

Parameter	Bezeichnung	A	A	B	B	B	C	D	D	E	E	E
		1	2	1	2	3	1	1	2	1	2	3
<b>Kontrolle der Optimierungsrechnung (DOPTPRM)</b>												
	DESMAX 500 <i>Maximale Anzahl an Iterationen = 500</i>	x	x	x	x	x		x	x	x	x	x
	MINDENS 0.001 <i>Kleinstmöglicher Materialfüllgrad = 0,001</i>	x	x	x	x	x		x	x	x	x	x
	CHECKER 1 <i>Vermeidung von Schachbrettmuster ist aktiv</i>	x	x	x	x	x		x	x	x	x	x
	OBJTOL 0.001 <i>Konvergenzbedingung für die Zielfunktion = 0,1 %</i>	x	x	x	x	x		x	x	x	x	x
	CONTOL 0.15 <i>Toleranz für die Restriktionsverletzung = 0,15 %</i>	x	x	x	x	x		x	x	x	x	x
	DDVOPT 2 <i>Kontinuierliche Optimierung mit anschließender diskreter Optimierung des Optimums</i>		x	x	x							

Tabelle C.1: (Fortsetzung)