

Integration von Fertigungsrestriktionen bei 3D-Fräsverfahren in die Topologieoptimierung mit der Level-Set-Methode

Dissertation zur Erlangung eines Doktorgrades

in der
Fakultät für Maschinenbau und Sicherheitstechnik
der
Bergischen Universität Wuppertal



vorgelegt von
Christopher Colling
aus Gelsenkirchen

Wuppertal 2024

Tag der mündlichen Prüfung: 28.11.2024

Christopher Colling

Integration von Fertigungsrestriktionen bei 3D-Fräsverfahren in die Topologieoptimierung mit der Level-Set-Methode

Dissertation, Bergische Universität Wuppertal,
Fakultät für Maschinenbau und Sicherheitstechnik,
Lehrstuhl für Optimierung mechanischer Strukturen, Januar 2024

Kurzfassung

Die Optimierung mechanischer Bauteile nimmt in der Entwicklung technischer Produkte einen immer größer werdenden Stellenwert ein. Ziel dieses Prozesses ist herauszufinden, welche Form und Topologie eine Struktur besitzen muss, um die an ihr gestellte Konstruktionsaufgabe besonders gut zu erfüllen. So kann beispielsweise mithilfe von Optimierungsverfahren zielgerichtet ermittelt werden, wie weit das Gewicht eines Bauteils reduziert werden kann, ohne die Mindestanforderungen an die mechanischen Eigenschaften zu unterschreiten. Das Resultat eines solchen Verfahrens ist eine optimierte Struktur. Damit die resultierenden Strukturen auch herstellbar sind, ist das Bestreben aktueller Forschung, Informationen über die Fertigungsprozesse direkt in die entsprechenden Optimierungsverfahren in Form von Fertigungsrestriktionen zu integrieren.

In dieser Arbeit wird eine Methodik zur Integration der Fertigungsrestriktionen bei 3D-Fräsverfahren in die Topologieoptimierung mit der Level-Set-Methode entwickelt. Als Restriktionen werden die Gewährleistung der Werkzeugzugänglichkeit jedes Bearbeitungspunktes sowie die Einhaltung einer Mindestwandstärke berücksichtigt. Der dabei verfolgte Ansatz basiert auf der Induktion eines Strukturwachstums in Bereichen, die entweder unzugänglich oder zu dünn sind. Um diese Bereiche zu identifizieren, wird ein Verfahren entwickelt, bei dem die Level-Set-Funktion entlang der Außenkonturen realistischer Werkzeuggeometrien unter Berücksichtigung verfügbarer Bearbeitungsrichtungen interpoliert wird. Zur anschließenden Induktion eines Strukturwachstums wird in regelmäßigen Schritten ein Potential definiert. Dieses besitzt innerhalb der Struktur größere Werte als außerhalb und ändert sich normal zum Strukturrand linear. Eine Minimierung des auf dem Strukturrand vorliegenden Potentials wird in ein Strukturwachstum überführt. Dazu werden die Sensitivitäten des Potentials bezüglich Verschiebungen des Strukturrandes ermittelt und mit den Entwicklungsgeschwindigkeiten der korrespondierenden Level-Set-Funktion gekoppelt. Im Zuge dieses Ansatzes werden beide Fertigungsrestriktionen in eine gemeinsame mathematische Restriktion überführt und explizit in das Optimierungsproblem integriert.

Stichworte: Topologieoptimierung, Level-Set-Methode, CNC-Fräsen, Fertigungsrestriktionen

Christopher Colling

Integration of manufacturing constraints in 3D milling processes into topology optimization with the Level Set Method

PhD thesis, University of Wuppertal, School of Mechanical Engineering and Safety Engineering, Chair for Optimization of Mechanical Structures, January 2024

Abstract

The optimization of mechanical structures is becoming increasingly important in the development of technical products. The goal of this process is to find out what shape and topology a structure must adopt to fulfill its design objective in the best possible way. For example, with the help of optimization methods, it is possible to determine in a targeted manner how far the weight of a structure can be reduced without falling below the minimum requirements for its mechanical properties. The result of such a process is an optimized structure. In order to guarantee the manufacturability of the optimized structures, current research is striving to integrate information about the manufacturing processes in the form of manufacturing constraints directly into the related optimization methods.

In this work, a methodology for integrating the manufacturing constraints of 3D milling processes into level set based topology optimization is developed. The constraints considered are ensuring tool accessibility of each machining point and maintaining a minimum wall thickness. The approach followed is based on the induction of structural growth in areas that are either inaccessible or too thin. To identify these areas, a method is developed in which the level set function is interpolated along the outer contours of realistic tool geometries, considering available machining directions. A potential is defined in regular steps for the subsequent induction of structural growth. This potential has greater values inside the structure than outside and changes linearly normal to the structural boundary. Minimization of the potential present on the structural boundary is converted into structural growth. For this purpose, the sensitivities of the potential with respect to deformations of the structural boundary are determined and coupled with the evolution velocities of the corresponding level set function. In the course of this approach, both manufacturing constraints are transformed into a single mathematical constraint and explicitly integrated into the optimization problem.

Keywords: Topology optimization, Level Set Method, CNC milling, Manufacturing constraints

Vorwort und Danksagung

Diese Dissertation ist während meiner Zeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am *Institut für Maschinenbau* der *Westfälischen Hochschule* in Gelsenkirchen entstanden. Die Promotion erfolgte in Kooperation mit dem *Lehrstuhl für Optimierung mechanischer Strukturen* an der *Bergischen Universität Wuppertal*.

Zum Gelingen dieses Projekts haben mehrere Personen beigetragen, denen ich im Folgenden meinen Dank aussprechen möchte.

Zuerst möchte ich meinem Doktorvater Herrn *Prof. Dr.-Ing. Axel Schumacher* herzlich für die fachliche Unterstützung und die großartige Betreuung während meiner Promotion danken.

Mein besonderer Dank gilt Herrn *Prof. Dr.-Ing. Klaus Mecking* für die gute Zusammenarbeit der letzten Jahre. Vielen Dank für die wertvollen Anregungen, für die fachlichen Gespräche – die am Whiteboard durchaus mal bis in die Abendstunden hineinreichen konnten – sowie für die Begutachtung dieser Arbeit.

Ebenfalls möchte ich mich bei Herrn *Prof. Dr.-Ing. Peter Gust* für die Begutachtung dieser Dissertation bedanken.

Vielen Dank an alle Kolleginnen und Kollegen aus der Doktorandenrunde in Wuppertal. Die Diskussionen und persönlichen Gespräche haben mir stets geholfen, meine eigene Arbeit kritisch zu hinterfragen und weiterzuentwickeln.

Außerdem möchte ich allen Kolleginnen und Kollegen aus Gelsenkirchen danken, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben. Hervorheben möchte ich hier Frau *Dr. rer. nat. Gabriela Marginean*, die als Ansprechpartnerin für Doktoranden an der Westfälischen Hochschule eine wertvolle Unterstützung war.

Zu guter Letzt möchte ich meinen Eltern *Manuela und Martin Colling* für ihre Unterstützung während meines Studiums und meiner Promotion danken, ohne die dieser Weg nicht möglich gewesen wäre.

Gelsenkirchen im Januar 2024

Christopher Colling

Inhaltsverzeichnis

Abkürzungs- und Symbolverzeichnis	III
1 Einleitung	1
1.1 Problemstellung und Motivation	1
1.2 Aufbau der Dissertation	2
2 Stukturoptimierung von fräsbaren Bauteilen	3
2.1 Einführung in die Strukturoptimierung	3
2.1.1 Begriffsdefinitionen	3
2.1.2 Arten der Strukturoptimierung	4
2.1.3 Verfahren der Topologieoptimierung	7
2.2 Fertigungsverfahren Fräsen	9
2.2.1 Definition und Einordnung des Verfahrens	9
2.2.2 Charakterisierung des 3D-FräSENS	9
2.3 Fertigungsrestriktionen am Beispiel der 3-Achs-Bearbeitung	11
2.3.1 Vermeidung unzugänglicher Bearbeitungspunkte	11
2.3.2 Vermeidung dünnwandiger Strukturen	13
2.4 Forschungsarbeiten zur Optimierung fräsbarer Strukturen	14
2.4.1 Gewährleistung der Werkzeugzugänglichkeit	14
2.4.2 Gewährleistung minimaler Wandstärken	17
3 Topologieoptimierung mit der Level-Set-Methode	19
3.1 Formulierung des Optimierungsproblems	19
3.2 Sensitivitätsanalyse	21
3.2.1 Konzept der Formableitung	21
3.2.2 Formableitung der mittleren Nachgiebigkeit	24
3.2.3 Formableitung des Volumens	25
3.3 Einführung in die Level-Set-Methode	25
3.3.1 Strukturbeschreibung durch eine Level-Set-Funktion	26
3.3.2 Entwicklung der Strukturränder	27
3.3.3 Lösung der Level-Set-Entwicklungsgleichung	28
3.3.4 Reinitialisierung	31
3.3.5 Velocity Extension	32
3.4 Optimierungsalgorithmus	34
3.4.1 Die erweiterte Lagrange-Methode	34
3.4.2 Wahl der Entwicklungsgeschwindigkeit	36

3.4.3	Konvergenzkriterium	36
3.5	Optimierungsablauf	37
3.6	Optimierungsbeispiele	39
3.6.1	Zweidimensionaler Kragträger	41
3.6.2	Dreidimensionaler Kragträger	42
4	Integration von Frässtriktionen in die Level-Set-Optimierung	47
4.1	Ansatz zur Erfüllung der Fertigungsrestriktionen	47
4.2	Erkennung von Restriktionsverletzungen	48
4.2.1	Werkzeugzugänglichkeit	49
4.2.2	Dünnwandige Strukturbereiche	51
4.2.3	Definition der Interpolationswege	53
4.3	Mathematische Formulierung der Fertigungsrestriktionen	59
4.3.1	Überführung der Fertigungsrestriktionen in ein Potential .	59
4.3.2	Reinitialisierung des Potentials	61
4.4	Sensitivitätsanalyse	62
4.5	Berücksichtigung der Fertigungsrestriktionen in der Optimierung .	63
4.5.1	Erweiterung des Optimierungsproblems	63
4.5.2	Bildung der neuen Entwicklungsgeschwindigkeit	64
4.5.3	Maßnahmen zur Verbesserung des Konvergenzverhaltens .	65
4.6	Eingliederung der Fertigungsrestriktionen in den Optimierungsablauf	68
5	Numerische Anwendungen	71
5.1	Details zur numerischen Umsetzung	71
5.2	Würfel	75
5.2.1	Optimierung ohne Fertigungsrestriktionen	76
5.2.2	Optimierung mit Zugänglichkeitsrestriktion	77
5.3	Kragträger	81
5.3.1	Optimierung ohne Fertigungsrestriktion	81
5.3.2	Optimierung unter verschiedenen Mindestwandstärken .	81
5.3.3	Optimierung unter Zugänglichkeits- und Wandstärkenrestriktion	82
5.4	Lagerhalterung aus der Luftfahrtindustrie	90
5.4.1	Optimierung ohne Fertigungsrestriktionen	93
5.4.2	Optimierung mit Fertigungsrestriktionen	93
5.4.3	Spannungsanalyse der optimierten Lagerhalterung	96
6	Zusammenfassung und Ausblick	99
Literaturverzeichnis		102

Anhang

A Herleitung der Formableitung eines Gebietsfunktional	108
B Lösung der Entwicklungsgleichung	109
B.1 Differenzenquotienten	109
B.2 Eindimensionales Lösungsschema	109
C Eulersche Drehmatrizen	110

Abkürzungs- und Symbolverzeichnis

Abkürzungen

CAD	Computer Aided Design
CAM	Computer Aided Manufacturing
CFL	Courant-Friedrichs-Lowy
CNC	Computerized Numerical Control
FE	Finite-Elemente
MOLE	Monotonicity based minimum Length scale
SIMP	Solid Isotropic Material with Penalization

Operatoren

Symbol	Bedeutung
x	Skalar
\boldsymbol{x}	Vektor
x_i	i -te Komponente des Vektors \boldsymbol{x}
$ \boldsymbol{x} $	Betrag des Vektors \boldsymbol{x}
$\mathbf{A} : \mathbf{B}$	Frobenius-Skalarprodukt der Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{B}
∇	Nabla-Operator
$D_i^{-x} \varphi$	linksseitiger Differenzenquotient von φ am Knoten i über x
$D_i^{+x} \varphi$	rechtsseitiger Differenzenquotient von φ am Knoten i über x
$\varphi_{,t}$	partielle Ableitung von φ nach t
$\frac{\delta J}{\delta \Omega}$	Formsensitivität des Funktional J
$\det(\mathbf{D})$	Determinante der Matrix D

Symbol **Bedeutung**

I Einheitsmatrix

R_b eulersche Drehmatrix um die Drehachse b

$\text{sgn}(x)$ Vorzeichenfunktion

$\mathcal{O}(t)$ linearer Approximationsfehler mit $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathcal{O}(t)}{t} = 0$

Mengenlehre

\in $i \in A$: das Element i ist in der Menge A enthalten

\notin $i \notin A$: das Element i ist nicht in der Menge A enthalten

\forall $\forall i \in A$: für alle Elemente i in der Menge A

\subseteq $A \subseteq B$: Die Menge A ist eine Teilmenge von der Menge B

\wedge $i \in A \wedge i \in B$: das Element i ist in den Mengen A und B enthalten

Lateinische Zeichen

Symbol	Bedeutung	Einheit
a	allgemeine Erhaltungsgröße	—
a_1	Interpolationsversatz von Werkzeug zu dessen Halterung	m
a_2	Interpolationsversatz an der breiter werdenden Halterung	m
a_3	Interpolationsversatz an der Hauptspindel	m
b	Bearbeitungsrichtung	—
C	mittlere Nachgiebigkeit	Nm
C_N	normierte mittlere Nachgiebigkeit	—
e	Fluss	—
e_{ri}	Einheitsvektor zur Bestimmung von Startpunkt i	—
e_s	Einheitsvektor zur Bestimmung der Interpolationsstartpunkte	—
E	Elastizitätsmodul	MPa
E_i	interpolierter Elastizitätsmodul des Elements i	MPa
E_i^0	Elastizitätsmodul des Grundwerkstoffes von Element i	MPa
f	über eine Struktur Ω definierte Funktion mit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$	—
f	Volumenkraft	Nm^{-3}

Symbol	Bedeutung	Einheit
g	Oberflächenkraft	Nm^{-2}
H	Hamilton-Funktion	-
J	Zielfunktion, Gebietsfunktional	-
K	Randfunktional	-
l_0	Interpolationslänge entlang des Werkzeugs	m
l_1	Höhe des kegelförmigen Teils der Werkzeughalterung	m
l_2	Höhe des zylindrischen Teils der Werkzeughalterung	m
l_3	Höhe der Hauptspindelverkleidung	m
\mathcal{L}^*	Lagrange-Funktion	-
\mathcal{L}	erweiterte Lagrange-Funktion	-
m	Memoryfaktor	-
\mathbf{n}	Normaleneinheitsvektor	-
n_A	Anzahl Interpolationspunkte in Bereich A	-
n_B	Anzahl Interpolationspunkte in Bereich B	-
n_C	Anzahl Interpolationspunkte in Bereich C	-
n_D	Anzahl Interpolationspunkte in Bereich D	-
n_w	Anzahl Interpolationspunkte für Wandstärken	-
n_{LS}	Anzahl Entwicklungsschritte	-
p	Potentialfunktion	-
r_h	Radius des Werkzeugkopfs	m
r_w	Radius des Fräswerkzeugs	m
R_i	Restriktion i	-
$R_{p0,2}$	Streckgrenze	MPa
s	Strafexponent	-
s_v	maximaler axialer Verfahrweg	m
t	Entwicklungszeit, Skalierungsfaktor bei Formableitungen	-
\mathbf{u}	mechanische Verschiebung	m
U	Randpotential	-
U_i	Formänderungsenergie	Nm
v_n	Entwicklungsgeschwindigkeit	-

Symbol	Bedeutung	Einheit
$v_{n,Mem}$	Memory-Feld	-
v_{n0}	Entwicklungsgeschwindigkeit vor der Velocity-Extension	-
v_τ	Entwicklungsgeschwindigkeit in Tangentialrichtung	-
V	Strukturvolumen	m^3
V_D	Volumen des Entwurfsraumes	m^3
V_F	Volumenfüllgrad	-
V_Z	Zielvolumen	m^3
w_{min}	Mindestwandstärke	m
W_a	Äußere Arbeit	Nm
\mathbf{x}	Koordinaten im Raum	m
\mathbf{x}_A	Koordinaten der Interpolationspunkte in Bereich A	m
\mathbf{x}_B	Koordinaten der Interpolationspunkte in Bereich B	m
\mathbf{x}_C	Koordinaten der Interpolationspunkte in Bereich C	m
\mathbf{x}_D	Koordinaten der Interpolationspunkte in Bereich D	m
\mathbf{x}_w	Koordinaten der Interpolationspunkte für Wandstärken	m
\mathbf{x}_h	Koordinaten der Spitze des Werkzeugkopfs	m
\mathbf{x}_m	Mittelpunkt der Interpolationsstartpunkte in Bereich A	m
\mathbf{x}_r	Koordinaten eines Randpunktes	m
\mathbf{x}_R	Koordinaten eines bewegten Randpunktes	m
\tilde{x}_i	normierte Dichte des Elements i	-

Griechische Zeichen

Symbol	Bedeutung	Einheit
α	Verstärkungsfaktor	-
Γ	Strukturrand	-
Γ_B	belasteter Strukturrand	-
Γ_L	gelagerter Strukturrand	-
Γ_0	unbelasteter Strukturrand	-
Γ_S	unzugänglicher Strukturrand	-

Symbol	Bedeutung	Einheit
Δt	Zeitschrittweite	-
Δx	Schrittweite, Gitterweite	-
$\Delta \varphi$	Distanz eines Randpunktes zum zugänglichen Bereich	-
$\Delta \varphi_{max}$	maximale Knotenverschiebung zur Ausbildung von Kanten	-
ε	Dehnung	-
ε	Potential des Randes bei Potentialinitialisierung	-
ε_{konv}	Konvergenz-Schwellwert	-
ζ	numerischer Hilfsfaktor	-
η	Aktivierungsfaktor	-
θ	Verschiebungen bei Gebietstransformationen	-
κ	mittlere Krümmung	-
λ_i	Lagrange-Multiplikator der Restriktion i	-
Λ_i	Strafparameter der Restriktion i	-
ν	Poisson-Zahl	-
ρ_i	physikalische Dichte des Elements i	kgm^{-3}
ρ_i^0	physikalische Dichte des Grundwerkstoffs von Element i	kgm^{-3}
σ	mechanische Spannung	MPa
σ_V	Von-Mises-Vergleichsspannung	MPa
σ_{Vmax}	maximale Von-Mises-Vergleichsspannung	MPa
τ	Tangentialeinheitsvektor	-
φ	Level-Set-Funktion	-
φ_0	Level-Set-Funktion vor der Strukturentwicklung	-
Φ	Abbildung bei Gebietstransformationen	-
Ψ	Gravitationspotential	Nm
ω	allgemein für Formsensitivitäten	-
Ω	Struktur	-
Ω_t	transformierte, veränderte Struktur	-
Ω_{opt}	Struktur, die eine Optimierungsaufgabe löst	-

1 Einleitung

1.1 Problemstellung und Motivation

Das Bestreben nach Verbesserung, vielmehr zur Optimierung, wird in zahlreichen Fragestellungen aus einem umfassenden Anwendungsspektrum verfolgt. Häufig entspringen diese Anwendungen den Wirtschaftswissenschaften, den Datenwissenschaften (englisch: *Data Science*), der Verkehrsorschung oder technischen Sachverhalten. In die letztere Kategorie reiht sich auch die Optimierung mechanischer Strukturen ein. Schon in der Architektur der römischen Antike finden sich Strukturen bzw. Bauwerke, die sich durch eine äußerst ‚effiziente‘ Bauweise auszeichnen. Ein prominenter Vertreter ist die Kuppel des Pantheons in Rom (125 n. Chr.), die, wie Ottoni und Blasi (2016) erläutern, durch ihre spezifische Form selbsttragende Eigenschaften erhält und damit deren Belastung besonders ‚gut‘ aufnehmen kann. Solche Strukturen können heute durch Strukturoptimierungen gefunden werden. Strukturoptimierungen verfolgen die Fragestellung, welche Struktur die an sie gestellte Konstruktionsaufgabe bestmöglich erfüllt. Diese werden insbesondere in der Automobilindustrie sowie der Luft- und Raumfahrtindustrie betrieben. Eine wichtige Teildisziplin der Strukturoptimierung ist die Topologieoptimierung. In der Topologieoptimierung mechanischer Strukturen werden Bauteile durch zielgerichtete Formänderungen bei gleichzeitiger Ausbildung von Löchern oder der Verschmelzung vorhandener Löcher verbessert. Dies geschieht über mehrere Iterationen so lange, bis ein Optimierungsziel erreicht und einzuhaltende Nebenbedingungen erfüllt sind. Eine Optimierungsaufgabe könnte z. B. lauten, dass ein Bauteil eine besonders hohe Steifigkeit annehmen und gleichzeitig seine Masse auf einen vorgegebenen Zielwert verringert werden soll (Schumacher 2020). Findet man ein solches Optimum, stellt sich die Frage, wie eine folgende Fertigung gelingen kann. In den Basismethoden der Topologieoptimierung werden keine Informationen über anschließende Fertigungsverfahren berücksichtigt. Die optimierten Strukturen sind daher in den meisten Fällen nicht herstellbar. Jedes Fertigungsverfahren stellt geometrische Anforderungen bzw. Fertigungsrestriktionen an die zu fertigenden Strukturen. Sind diese nicht erfüllt, müsste die optimierte Struktur manuell so weit

verändert werden, bis die spezifischen Fertigungsrestriktionen erfüllt sind. Dies birgt aber folgende Probleme: Zum einen wird durch jede Strukturveränderung das gefundene Optimum verlassen. Zum anderen wären solche Änderungen stark von der Interpretation des Anwenders abhängig. Wie wichtig ist z. B. eine einzelne Verstrebung? Kann diese verschoben oder gar entfernt werden? Ist die Lösung immer eindeutig? Wenn nicht, welche Lösung ist die Beste? Um diesen Prozess zu vermeiden, gibt es in der aktuellen Forschung ein großes Bestreben, Fertigungsrestriktionen direkt in die Verfahren der Topologieoptimierung zu integrieren.

Im Zuge dieser Arbeit wird untersucht, wie sich die Fertigungsrestriktionen von Fräsenverfahren in die Topologieoptimierung mit der Level-Set-Methode integrieren lassen. Dies umschließt die Gewährleistung der Werkzeugzugänglichkeit unter Berücksichtigung realistisch geformter Fräswerkzeuge an allen Bearbeitungspunkten der Strukturoberfläche. Darüber hinaus wird untersucht, wie während der Optimierung die Einhaltung einer Mindestwandstärke gelingen kann. Das Ziel dieser Arbeit ist, dass durch Integration der Fertigungsrestriktionen Strukturen optimiert werden können, die stets ohne anschließende manuelle Strukturveränderungen frässbar sind. Informationen zu Werkzeuggeometrien, Bearbeitungsrichtungen und Mindestwandstärken sollen in Form von Eingabeparametern berücksichtigt werden können.

1.2 Aufbau der Dissertation

In Kapitel 2 wird zunächst eine kurze Einführung in die Grundlagen der Strukturoptimierung gegeben. Dem folgend wird das Fertigungsverfahren Fräsen mitsamt den verfahrensspezifischen Fertigungsrestriktionen vorgestellt. Daraufhin werden die bisher erfolgten Forschungsarbeiten im Bereich der Integration von Fertigungsrestriktionen von Fräsenverfahren in die Strukturoptimierung vorgestellt. In Kapitel 3 wird die Topologieoptimierung mit der Level-Set-Methode im Detail erläutert. Zur Demonstration des Verfahrens werden exemplarische Strukturoptimierungen durchgeführt. Mit Kapitel 4 beginnt die Darstellung der Forschungsergebnisse. Darin wird das entwickelte Verfahren zur Integration der Fertigungsrestriktionen in die Topologieoptimierung mit der Level-Set-Methode hergeleitet. Das Verfahren wird in Kapitel 5 an verschiedenen Strukturoptimierungsbeispielen demonstriert. Es wird explizit ausgearbeitet, wie die Fertigungsrestriktionen die Optimierungsergebnisse beeinflussen. Abschließend werden die Inhalte dieser Arbeit in Kapitel 6 zusammengefasst und ein Ausblick zu weiterführenden Forschungsansätzen gegeben.

2 Stukturoptimierung von fräsbaren Bauteilen

Als Einführung wird zunächst das Konzept der Stukturoptimierung vorgestellt, wobei für den weiteren Verlauf der Arbeit wichtige Begriffe eingeführt und kurz beschrieben werden. Das Hauptaugenmerk liegt dabei auf der Topologieoptimierung.

Anschließend wird das Fertigungsverfahren Fräsen vorgestellt und der Begriff des 3D-FräSENS präzisiert. Dabei werden die Fertigungsrestriktionen des Verfahrens erläutert. Darauf folgend wird eine Literaturübersicht zu thematisch angesiedelten Forschungsarbeiten gegeben und deren Ergebnisse kurz beschrieben.

2.1 Einführung in die Stukturoptimierung

Unter der Optimierung mechanischer Strukturen bzw. der Stukturoptimierung versteht man im Allgemeinen die Verbesserung der Struktureigenschaften eines Bauteils (Schumacher 2020). Welche konkreten Eigenschaften verbessert werden sollen, wird im Optimierungsziel (*Zielfunktion*) und den einzuhaltenden Nebenbedingungen (*Restriktionen*) formuliert. Stukturoptimierungen müssen dabei nicht rein mechanischer Natur sein, sondern können auch unter dem Einfluss fertigungstechnischer oder wirtschaftlicher Gesichtspunkte definiert werden.

2.1.1 Begriffsdefinitionen

Grundlegende Begriffe im Zusammenhang mit der Optimierung mechanischer Strukturen werden in Tabelle 2–1 eingeführt und erläutert. Die tabellarische Darstellung lehnt sich an Dienemann (2018) und Ramsaier (2021) an.

Tabelle 2–1: Einführung und Definition wichtiger Begriffe der Strukturoptimierung nach Dienemann (2018) und Ramsaier (2021)

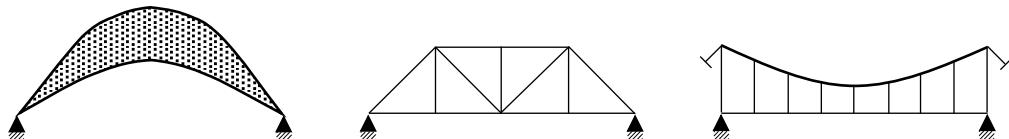
Begriff	Erklärung
Struktureigenschaft	Eine der Struktur zuordenbare Größe oder Eigenschaft wie z. B. das Volumen, die Masse oder die Steifigkeit
Entwurfsvariable, Designvariable	Parameter, die zum Erreichen des Optimierungsziels variiert werden wie z. B. Wandstärken oder Materialeigenschaften
Strukturmodell	Mathematische Beschreibung des Strukturverhaltens. Abhängig von den Entwurfsvariablen kann dies z. B. eine analytische Formulierung oder ein Finite-Elemente-Netz sein
Entwurfsraum, Designraum	Geometrischer Raum, in dem die Lösung des Optimierungsproblems liegen darf. Die Designraumgrenzen sind gleichzeitig die maximal möglichen Abmaße der Struktur
Zielfunktion	Mathematische Beschreibung des Optimierungsziels in Form einer zu minimierenden oder zu maximierenden Funktion
Restriktion	Bei der Optimierung einzuhaltende Nebenbedingung. Häufig wird das Erreichen eines spezifischen Gewichts gewählt
Fertigungsrestriktion	Auf die Fertigung bezogene Restriktion, die abhängig vom Fertigungsverfahren die Vorgabe spezifischer geometrischer Anforderungen an die Struktur beinhaltet
Optimierungsproblem	Mathematische Beschreibung einer Optimierungsaufgabe. Das Ziel ist die Minimierung oder Maximierung einer Zielfunktion unter der Einhaltung vorgegebener Restriktionen
Optimierungsalgorithmus	Methode zum Erreichen des Optimierungsziels wie z. B. die Methode des steilsten Abstiegs
Sensitivität	Maß für die Änderung einer Struktureigenschaft bei Variation einer Entwurfsvariablen

2.1.2 Arten der Strukturoptimierung

Nach Schumacher (2020) wird die Strukturoptimierung abhängig von den verwendeten Entwurfsvariablen in verschiedene Optimierungsarten kategorisiert. In Abbildung 2–1 ist gezeigt, dass die Klassifizierung nach insgesamt fünf unterschied-

lichen Varianten der Strukturoptimierung möglich ist. Dazu gehören die Wahl der Strukturbauweise, die Wahl der Materialeigenschaften, die Topologieoptimierung, die Formoptimierung sowie die Dimensionierung der Strukturelemente.

Wahl der Bauweise:



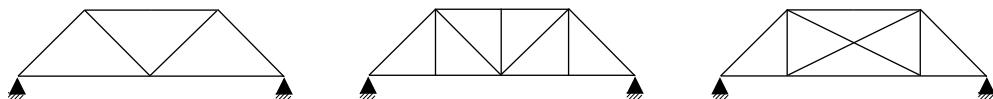
Wahl der Materialeigenschaften:

Aluminium

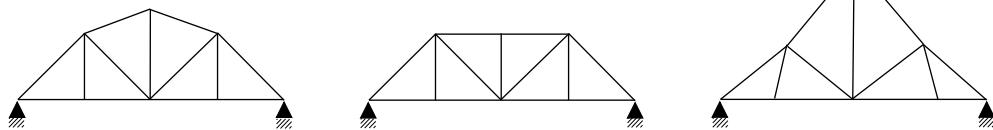
Stahl

Verbundwerkstoffe

Topologieoptimierung:



Formoptimierung:



Dimensionierung:

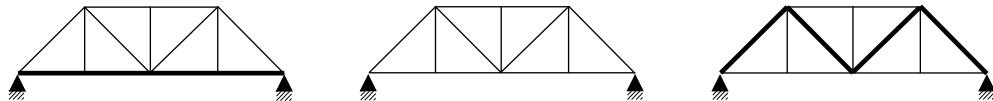


Abbildung 2–1: Varianten der Strukturoptimierung, modifiziert nach Schumacher (2020)

Wahl der Bauweise

Eine Optimierung durch die Wahl der Bauweise gilt als vergleichsweise allgemeine Optimierungsart. Als Beispiel für verschiedene Strukturbauweisen erläutert Klein (2013), dass Flugzeugräume prinzipiell als Fachwerkstrukturen, Vollwandsysteme oder Schalensysteme gebaut werden können.

Wahl der Materialeigenschaften

Auch die Materialeigenschaften können als Entwurfsvariablen betrachtet werden. Je

nach Optimierungsproblem werden unterschiedlichste Materialeigenschaften bevorzugt und durch eine darauf angepasste Werkstoffauswahl die Struktureigenschaften verbessert.

Topologieoptimierung

Der Begriff ‚Topologie‘ leitet sich von den griechischen Wörtern *topos* (τόπος) „Ort, Lage“ und *logos* (λόγος) „Wort“ ab und kann als Lehre über den räumlichen Zusammenhang geometrischer Objekte interpretiert werden. Übertragen auf die Topologieoptimierung mechanischer Strukturen wird hier das Ziel verfolgt, die Lage und Anordnung der Strukturelemente zu verbessern.

Monastyrsky (1987) illustriert, dass Strukturen gleicher topologischer Eigenschaften solche sind, deren Formen durch Verformungsoperationen wie Dehnen und Stauchen ineinander überführt werden können, ohne die Strukturen lokal *auseinanderzureißen* oder zu *verschmelzen*. Eine Pyramide und ein Würfel sind demnach topologisch äquivalent.

Die Topologieoptimierung gilt nach Harzheim (2008) als flexibelste Art der Optimierung. In der Regel wird diese jedoch in Kombination mit einer Formoptimierung durchgeführt.

Formoptimierung

Das Ziel der Formoptimierung ist, durch eine Variation der Strukturränder eine Optimierungsaufgabe zu lösen. Die Deklaration der formbeschreibenden Entwurfsvariablen stellt einen Schwerpunkt solcher Optimierungen dar. Eine verbreite Vorgehensweise ist die CAD-basierte (Computer Aided Design) Formoptimierung. Dabei werden die CAD-Parameter als Entwurfsvariablen definiert und zum Erreichen des Optimierungsziels variiert.

Dimensionierung

Werden geometrische Eigenschaften der Strukturelemente, wie z. B. die Stabdurchmesser in Fachwerkstrukturen als Entwurfsvariablen deklariert, kann eine Optimierung der Struktur durch eine Variation dieser ausgewählten geometrischen Eigenschaften durchgeführt werden.

2.1.3 Verfahren der Topologieoptimierung

Im Zuge dieser Arbeit wird die Strukturoptimierung in Form der Topologieoptimierung realisiert. Mit den von Michell (1904) entdeckten und nach ihm benannten *Michell-Strukturen* erstreckt sich die Geschichte der Topologieoptimierung bereits auf über 100 Jahre und hatte ihre erste Anwendung in der Optimierung von Stabwerken. Im Zuge umfangreicher Forschungsarbeiten und der Entwicklung von leistungsstarken Computern sind zahlreiche effiziente Optimierungsverfahren entstanden, die auch heute noch fortlaufend weiterentwickelt werden. Zhang und Zhu (2018) geben eine Zusammenfassung der populärsten Verfahren und deren Funktionsweisen.

Ein besonderes Merkmal der Topologieoptimierung ist, dass im Vergleich zu den anderen Varianten der Strukturoptimierung sehr viele Entwurfsvariablen verteilt über den gesamten Entwurfsraum benötigt werden. Wie Schumacher (2020) beschreibt, werden die zu optimierenden Strukturen im einfachsten Fall durch Finite-Elemente diskretisiert. Diesen Strukturelementen wird jeweils mindestens eine Entwurfsvariable zugeordnet. Durch eine Variation des Materialverhaltens über die zugeordneten Entwurfsvariablen wird die Topologie schließlich optimiert. Zwei populäre Vertreter unter den Verfahren der Topologieoptimierung sind einerseits die Dichtemethode – häufig auch Voxel-Methode genannt – und andererseits die Topologieoptimierung mit der Level-Set-Methode.

Dichtebasierter Topologieoptimierung

Die Grundlage der dichtebasierter Topologieoptimierung besteht in der Verknüpfung des Elastizitätsmoduls mit der Materialdichte. Dazu wird jedem Strukturelement i eine auf eins normierte Dichte als Entwurfsvariable zugewiesen und auf den Elastizitätsmodul interpoliert. Das Ziel ist, eine optimierte Massenverteilung durch eine Variation der normierten Dichten zu bestimmen. Diese sollen entweder den Wert 1 (massives Material) oder 0 (kein Material) annehmen.

Die dabei am häufigsten eingesetzte Materialinterpolation ist SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization). Nach Harzheim (2008) und Zhou und Rozvany (1991) werden dabei die Elastizitätsmodule E_i über einen Exponentialansatz aus den normierten Dichten \tilde{x}_i bzw. den korrespondierenden Materialdichten ρ_i für isotropes Werkstoffverhalten interpoliert. Bezeichnet man den Elastizitätsmodul des massiven Materials mit E_i^0 und dessen Materialdichte mit ρ_i^0 , gilt für den

interpolierten Elastizitätsmodul

$$E_i = E_i^0 \tilde{x}_i^s \quad \text{mit} \quad \tilde{x}_i = \frac{\rho_i}{\rho_i^0} \quad \text{und} \quad s > 1. \quad (2-1)$$

Der Strafexponent s dient der ‚Bestrafung‘ von potenziellen Zwischendichten. Diese sind physikalisch nicht interpretierbar. Je größer der Wert des Strafexponenten ist, desto stärker werden bei Optimierungen gewünschte Dichten von 0 oder 1 ausgebildet. In der Praxis wird der Exponent häufig auf den Wert 3 gesetzt, um einerseits die Ausbildung von Zwischendichten zu vermeiden und anderseits die Entstehung von schwachen lokalen Minima zu unterbinden (Dienemann 2018). Die Dichtemethode ist in vielen kommerziellen Finite-Elemente-Softwarepaketen integriert und in der industriellen Praxis weit verbreitet.

Level-Set-Optimierung

Eine weitere Möglichkeit der Topologieoptimierung bietet sich nach Wang et al. (2003) und Allaire et al. (2004) durch die Zuhilfenahme der *Level-Set-Methode* an. Dabei wird die zu optimierende Struktur implizit als Nullstellenmenge einer höherdimensionalen *Level-Set-Funktion* beschrieben. Zur Veranschaulichung dieses Zusammenhangs dient folgende Analogie am Beispiel einer Kreisfläche: Nimmt man ein kegelförmiges Sieb und taucht dieses mit der Spitze voran lotrecht in ein Wasserbecken ein, füllt sich der Kegel mit Wasser. Die Wasseroberfläche stellt in der Analogie das Nullniveau der Level-Set-Funktion dar. Der Teil des Kegels, der die Wasseroberfläche schneidet, liegt auf einem Kreis bzw. der Nullstellenmenge der Level-Set-Funktion. Der Anteil der Wasseroberfläche innerhalb des Kegels stellt eine Kreisfläche dar. Im Kontext der Topologieoptimierung entspricht die Kreisfläche der zu optimierenden Struktur. Im Gegensatz zur Dichtemethode läuft hierbei die Optimierung auf eine Verschiebung des Strukturrandes mithilfe einer über den Entwurfsraum definierten Entwicklungsgeschwindigkeit hinaus. Man nennt diesen Prozess häufig *Struktorentwicklung*. Im Sinne der vorherigen Analogie führt z. B. ein tieferes Eintauchen des Kegels in das Wasser zu einer Vergrößerung der innen liegenden Kreisfläche bzw. zu einem gleichmäßigen Strukturwachstum. Ein Vorteil der Level-Set-Methode gegenüber der Dichtemethode ist, dass durch die mathematische Beschreibung des Strukturrandes in Form einer Nullstellenmenge jederzeit glatte und klar definierte Randkonturen entstehen. Dijk et al. (2013) betonen jedoch, dass die Resultate der Optimierungen signifikant von den Startentwürfen abhängen. Das Verfahren wird in Kapitel 3 detailliert für den weiteren Verlauf dieser Arbeit vorgestellt.

2.2 Fertigungsverfahren Fräsen

2.2.1 Definition und Einordnung des Verfahrens

Das *Fräsen* gehört zur Gruppe der spanabhebenden Fertigungsverfahren. In der DIN 8580 (2003) wird die *Zerspanung* als Prozess definiert, bei dem eine Relativbewegung zwischen Werkzeug und Werkstück zu einer Verminderung des Materialzusammenhalts und damit zu einer Formänderung des Werkstücks führt. Klocke (2018) beschreibt, dass beim Fräsen die Zerspanung mit geometrisch bestimmter Schneide unter einer kreisförmigen Schnittbewegung erfolgt. Geometrisch bestimmt bedeutet, dass die Schneidenanzahl, deren Geometrie und Lage bekannt sind. Im Gegensatz dazu steht das Spanen mit geometrisch unbestimmter Schneide. Dazu zählt zum Beispiel das Schleifen. In DIN 8589-3 (2003) wird weiter spezifiziert, dass bei der Fräsbearbeitung die Vorschubbewegung senkrecht und schräg zur Drehachse des Werkzeugs liegen kann. Außerdem wird in der Norm das Fertigungsverfahren abhängig von den zu erzeugenden Geometrien, der Werkzeugform und der Bearbeitungskinematik in die insgesamt sechs folgenden Varianten gegliedert:

- Planfräsen
- Rundfräsen
- Schraubfräsen
- Walzfräsen
- Formfräsen
- Profilfräsen

2.2.2 Charakterisierung des 3D-Fräsen

Die Fräsbearbeitung räumlicher Flächen bzw. Strukturen wird unter der Kategorie *Formfräsen* zusammengefasst und im weiteren Verlauf auch als *3D-Fräsen* bezeichnet. Dietrich (2016) erläutert, dass mithilfe des Formfrässens sehr komplexe Strukturen gefertigt werden können, deren Hauptanwendungen im Werkzeug- und Formenbau, der Automobilindustrie, dem Maschinenbau und der Luft- und Raumfahrtindustrie liegen.

Für das 3D-Fräsen werden in der industriellen Praxis meistens CNC-Bearbeitungszentren (Computerized Numerical Control) genutzt. Kief et al. (2020) definieren ein Bearbeitungszentrum als eine in mindestens drei Achsen numerisch gesteuerte Werkzeugmaschine, die über eine automatisierte Werkzeugwechselvorrichtung und

ein integriertes Werkzeugmagazin verfügt und damit diverse Zerspanaufgaben durchführen kann. Wie Heisel et al. (2014) erläutern, werden auch konventionelle Fräsmaschinen mit integriertem Werkzeugmagazin und integrierter CNC-Steuerung vertrieben. Von daher wird im weiteren Verlauf nicht mehr zwischen Bearbeitungszentrum und Fräsmaschine unterschieden.

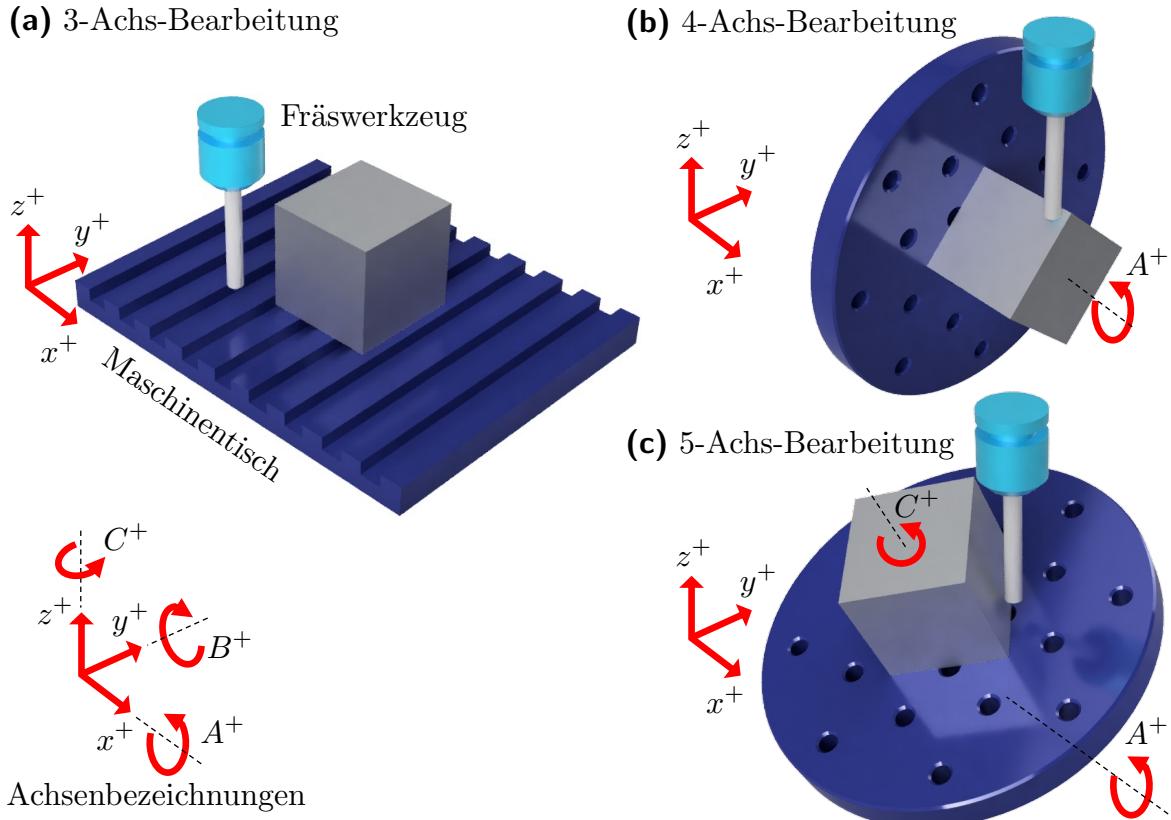


Abbildung 2-2: Unterschiedliche Kinematiken bei 3-Achs-, 4-Achs- und 5-Achs-Fräsmaschinen, modifiziert nach Kief et al. (2020)

Für Formfräsaufgaben werden Maschinen mit mindestens drei Linearachsen benötigt. Das Fräswerkzeug kann entlang dieser Achsen bewegt werden. Man bezeichnet solche Maschinen auch als 3-Achs-Maschinen. Wie in Abbildung 2-2a gezeigt, werden die drei Achsen mit x , y und z bezeichnet, wobei die z -Achse gleichzeitig die Spindelachse repräsentiert (Dangel (2020)). Mithilfe von 3-Achs-Maschinen kann ohne Umspannvorgang immer nur eine Seite eines Würfels bearbeitet werden. Für eine Bearbeitung aller sechs Würfelseiten sind insgesamt sechs Maschinenumspannvorgänge nötig.

Aufgrund der vielfältigeren Kinematik können mit 4-Achs- oder auch 5-Achs-Fräsmaschinen deutlich komplexere Strukturen hergestellt werden. Wie in Abbildung 2-2b und 2-2c gezeigt, besitzen solche Maschinen eine bzw. zwei zusätzliche Drehachsen die mit A , B und C bezeichnet werden. Kief et al. (2020) erläutern,

dass dies technisch entweder durch einen drehbaren Maschinentisch, ein drehbares Werkzeug oder einer Kombination aus beidem realisiert wird. Nach Dangel (2020) kann mit 4-Achs-Maschinen ein Würfel von vier Seiten ohne Umspannvorgang bearbeitet werden. Bei 5-Achs-Maschinen ist die Bearbeitung von fünf Würfelseiten ohne Umspannen möglich.

2.3 Fertigungsrestriktionen am Beispiel der 3-Achs-Bearbeitung

Geometrische Anforderungen, die eine Struktur zur Gewährleistung ihrer Herstellbarkeit zwingend einhalten muss, werden als *harte Fertigungsrestriktionen* bezeichnet. Neben harten Restriktionen lassen sich auch *weiche Fertigungsrestriktionen* definieren. Bei der Verletzung von weichen Restriktionen, ist die Fertigung der Struktur grundsätzlich möglich, jedoch steigen abhängig vom Grad der Restriktionsverletzung die Fertigungszeit und damit auch die Produktionskosten an. In dieser Arbeit wird die Integration der nachfolgenden zwei Fertigungsrestriktionen beim 3D-Fräsen am Beispiel der 3-Achs-Bearbeitung in die Topologieoptimierung untersucht:

1. Jeder Bearbeitungspunkt einer herzustellenden Struktur muss für ein vorgegebenes Fräswerkzeug unter Berücksichtigung der Geometrien von Werkzeug, Werkzeugaufnahme und Hauptspindel sowie aller nutzbaren Bearbeitungsrichtungen zugänglich sein.
2. Die Wandstärken der herzustellenden Strukturen dürfen einen vorgegebenen minimalen Wert nicht unterschreiten.

Die erste Restriktion ist eine harte Fertigungsrestriktion, die für alle spanenden Fertigungsverfahren erfüllt sein muss, während die Einhaltung einer Mindestwandstärke als weiche Fertigungsrestriktion klassifiziert werden kann. Im Folgenden werden die Restriktionen im Detail erläutert und motiviert.

2.3.1 Vermeidung unzugänglicher Bearbeitungspunkte

Hinterschneidungen und Werkzeugkollisionen

In Abbildung 2–3 ist verdeutlicht, wodurch die Zugänglichkeit der Strukturoberfläche für ein Fräswerkzeug eingeschränkt werden kann. Dazu ist eine Struktur

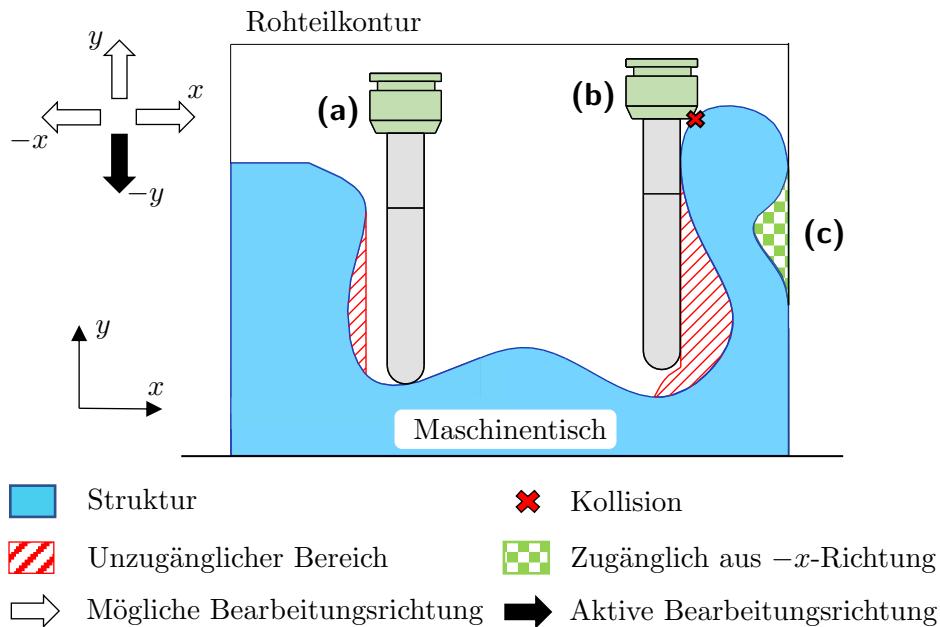


Abbildung 2-3: Einschränkung der Werkzeugzugänglichkeit durch Hinterschneidungen und Kollisionen bei tief liegenden Oberflächenbereichen

abgebildet, die aus einem Rohteil mithilfe des skizzierten Werkzeugs gefertigt werden soll. Abhängig von der Einspannung des Werkstücks auf dem Maschinentisch können verschiedene Seiten der Struktur bearbeitet werden. Im weiteren Verlauf wird dies durch die Einführung von *Bearbeitungsrichtungen* berücksichtigt. Eine um 90° im Uhrzeigersinn gedrehte Einspannung des Werkstücks kommt einer Bearbeitung aus der eingezeichneten $+x$ -Bearbeitungsrichtung gleich. Demzufolge kann die Bearbeitung aus vier verschiedenen Bearbeitungsrichtungen ($-x, +x, -y, +y$) erfolgen. (Im 3D stehen sechs Bearbeitungsrichtungen zur Verfügung.) Im Beispiel sind für die aktive Bearbeitungsrichtung drei Bereiche der Strukturoberfläche unzugänglich.

Die Hinterschneidungen in den Bereichen a) und b) sind aus allen verfügbaren Bearbeitungsrichtungen unzugänglich, während der Bereich c) durch die Hinzunahme einer weiteren Bearbeitungsrichtung ($-x$) erreicht werden könnte.

Außerdem wird an Bereich b) deutlich, dass die Zugänglichkeit nicht nur durch Hinterschneidungen, sondern auch durch sehr tief und steile Oberflächenbereiche eingeschränkt werden kann. Diese tief liegenden Bereiche können aufgrund von entstehenden Kollisionen zwischen der Werkzeughalterung und der Strukturoberfläche nicht erreicht werden.

Dünne Aussparungen und konkave Hinterschneidungen

Die Zugänglichkeit der Strukturoberfläche kann auch durch zu große Radien des Fräswerkzeugs eingeschränkt sein. In Abbildung 2–4 ist zur Veranschaulichung ein Fräswerkzeug mit dem Radius r_w in seiner Vorderansicht (links) gezeichnet, das zur Fertigung zweier unterschiedlicher Beispielstrukturen eingesetzt werden soll. In den dazugehörigen Draufsichten sind durch die eingezeichneten Schraffierungen die Bereiche gekennzeichnet, in denen Material abgetragen werden soll.

In der mittleren Struktur ist zu erkennen, wie durch eine lokale, hohe konkave Krümmung der Strukturoberfläche unzugängliche Bereiche entstehen können. Choi (2001) bezeichnet diese Bereiche auch als konkave Hinterschneidungen. Daneben zeigt die rechte Struktur, dass die minimale Breite von Aussparungen mindestens dem Durchmesser des Werkzeugs entsprechen muss. Die Werkzeughalterung ist nicht in der Abbildung eingezeichnet. Für diese gelten jedoch ebenfalls die zwei verdeutlichten Restriktionen.

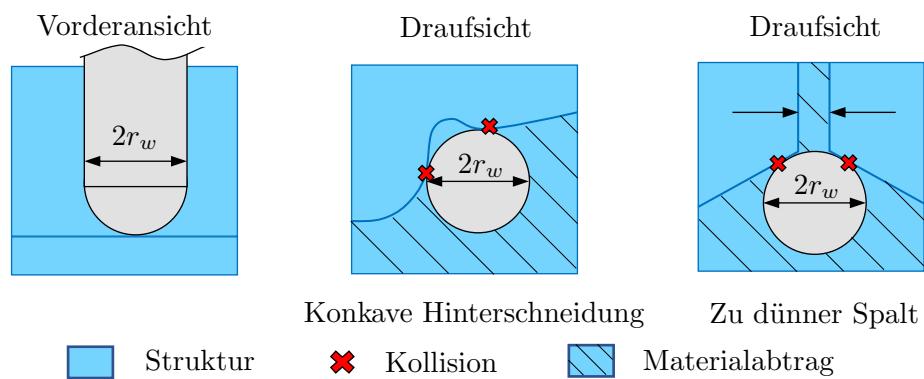


Abbildung 2–4: Einschränkung der Werkzeugzugänglichkeit durch zu große Werkzeigradien

2.3.2 Vermeidung dünnwandiger Strukturen

Die Fräsbearbeitung dünnwandiger Strukturen ist insbesondere in der Luft- und Raumfahrtindustrie sowie der Automobilindustrie von großer Bedeutung. Die Fertigung solcher Strukturen ist jedoch nur unter erhöhtem Arbeits- und Kostenaufwand möglich. Aus diesem Grund wird in zahlreichen Forschungsarbeiten untersucht, welche Faktoren die Fertigung dünnwandiger Strukturen erschweren und wie sich diese reduzieren lassen.

Zawada-Michałowska et al. (2020) erläutern, dass die durch das Werkzeug auf das Werkstück aufgebrachten Kräfte zu elastischen Verformungen der dünnwandigen

Strukturen führen. Diese Verformungen induzieren Vibrationen im Werkstück sowie im Werkzeug, die zu der Entstehung von Form- und Maßfehlern führen. Dabei erhöht sich zusätzlich der Werkzeugverschleiß.

Zawada-Michałowska et al. betonen außerdem, dass durch den Zerspanprozess bei dünnwandigen Strukturen erhöhte Eigenspannungen im Werkstück entstehen. Wie experimentell von Zhang et al. (2012) gezeigt, liegt dies zum einen an den plastischen Verformungen des Werkstücks im Eingriffsbereich der Werkzeugschneiden und zum anderen an den während des Spanprozesses entstehenden hohen Temperaturgradienten. Letztere können thermische Spannungen erzeugen, die über der Streckgrenze des Werkstoffs liegen. Die entstehenden Eigenspannungen können zwar durch anschließende Wärmebehandlungen reduziert werden, diese führen jedoch häufig zu Verformungen des Werkstücks.

In einer Studie zeigen Sridhar und Ramesh Babu (2015), dass zur Reduktion dieser Effekte eine Verringerung des Werkzeugdurchmessers beitragen kann. Bolar und Joshi (2021) zeigen, dass hohe Schnittkräfte die Ausbildung plastischer Verformungen begünstigen. Diese können durch eine Reduktion des Vorschubs, der Schnittbreite und der Schnitttiefe reduziert werden. In der Folge steigen jedoch die Produktionszeit und die Herstellungskosten.

2.4 Forschungsarbeiten zur Optimierung fräsbarer Strukturen

Forschungsbestrebungen zur Optimierung fräsbarer Strukturen unterliegen seit einigen Jahren einer immer stärker anwachsenden Popularität. Daher lassen sich einige Publikationen finden, in denen mögliche Lösungsansätze entwickelt und diskutiert werden. Die dabei entwickelten Methoden sind entweder für die Dichtemethode oder die Level-Set-Methode ausgearbeitet worden. Im Folgenden werden diese kurz vorgestellt.

2.4.1 Gewährleistung der Werkzeugzugänglichkeit

Als Erweiterung der Dichtemethode entwickeln Guest und Zhu (2012), Chen et al. (2016) und Vatanabe et al. (2016) Projektionsmethoden, mit der die Sichtbarkeit von Randelementen aus vordefinierten Richtungen untersucht werden kann. Wie in Abbildung 2–5 verdeutlicht, gilt ein Randelement als sichtbar, wenn alle Elementdichten entgegen dessen Beobachtungsrichtung kleiner als die des überprüften

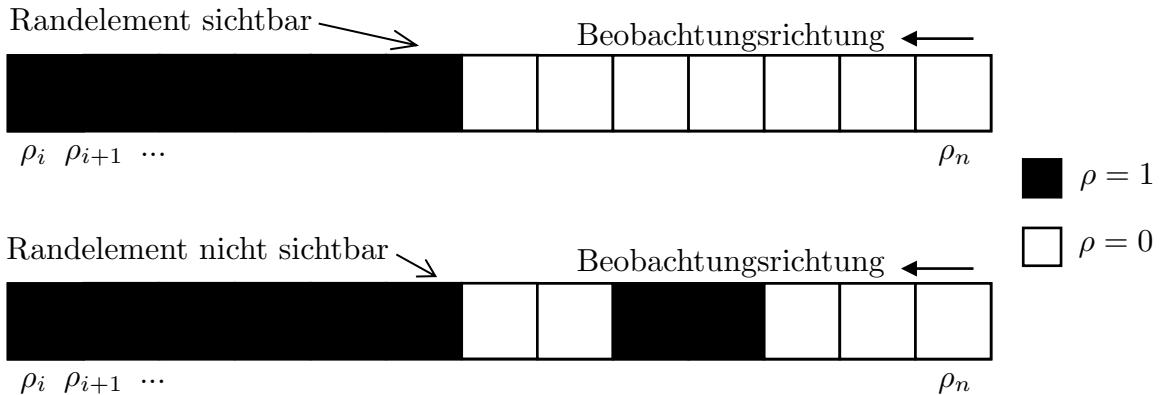


Abbildung 2–5: Projektionsmethode zur Überprüfung der Sichtbarkeit von Randelementen, modifiziert nach Chen et al. (2016)

Randelements sind. Überführt in eine mathematische Restriktion, muss für n Elemente entgegen der gewählten Beobachtungsrichtung gelten

$$\rho_i \geq \rho_{i+1} \geq \dots \geq \rho_n. \quad (2-2)$$

Die entwickelten Projektionsmethoden können dazu genutzt werden, Hinterschneidungen zu lokalisieren und diese während der Optimierung zu entfernen. Während Guest und Zhu (2012) das Werkzeug als Zylinder mit aufgesetzter Halbkugel modellieren, werden in den anderen genannten Arbeiten keine Geometrien des Werkzeugs oder dessen Werkzeughalterung berücksichtigt. Lee et al. (2022) haben die von Guest und Zhu (2012) entwickelte Projektionsmethode um die Berücksichtigung von 5-Achs-Kinematiken erweitert. In der Arbeit werden die Entwurfsvariablen nicht als einzelne normierte Elementdichten, sondern als Zusammenhang einer Menge benachbarter Elementdichten betrachtet. Pro Element werden alle Elementdichten zusammengefasst, die sich bei einem Werkzeugkontakt innerhalb der Außenkonturen des Werkzeugs befinden würden. So entstehen bei einer Optimierung neue Leerstellen immer in Form des modellierten Werkzeugs. Bei 5-Achs-Bearbeitungen werden die Elementgruppierungen für alle möglichen Bearbeitungsrichtungen wiederholt und anschließend über eine Projektionsfunktion gekoppelt.

Langelaar (2019) entwickelt einen Sensitivitätenfilter zur Integration der Fertigungsrestriktion. Die Basis des Filters besteht in der kumulativen Summation von Elementdichten in eine Bearbeitungsrichtung. 5-Achs-Verfahren können durch Rotationen der Struktur in die vorhandenen Bearbeitungsrichtungen und der anschließenden Bildung einer gemeinsamen Schnittmenge kumulativ summierte Elementdichten berücksichtigt werden. Die Werkzeulgänge sowie die Form der Werkzeugspitze können bei dem Verfahren beliebig gewählt werden.

Mirzendehtel et al. (2020) leiten zur Integration der Zugänglichkeitsrestriktion ein skalares Feld her, das an allen Punkten des Entwurfsraums ein Maß für deren Unzugänglichkeit angibt. Die Minimierung der unzugänglichen Strukturbereiche geschieht durch eine Kopplung der Sensitivitäten mit dem skalaren Feld. Die Fertigungsrestriktion wird explizit in das Optimierungsproblem integriert.

Unter Zuhilfenahme der Level-Set-Methode stellen Liu und Ma (2015) ein Verfahren zur Optimierung 2.5D-fräsbare Strukturen vor. 2.5D bedeutet, dass bei der Bearbeitung die z -Achse nicht simultan mit der x - und y -Achse bewegt wird (Dangel 2020). Diese Frästrategie wird häufig zur Fertigung von Bauteilen mit senkrecht zueinander ausgerichteten Flächen verwendet. Die Grundidee des entwickelten Verfahrens ist, die Strukturentwicklung so zu beeinflussen, dass die optimierten Strukturen nur aus vordefinierten, herstellbaren geometrischen Grundformen besteht. Dies können Quadern, Bohrungen oder einfache Freiformflächen sein. Mit der Methode der kleinsten Quadrate wird die Optimierung lokal auf die Ausbildung der am besten passendsten Formen ausgerichtet.

Morris et al. (2020) untersuchen erstmals eine Integration der Zugänglichkeitsrestriktion für das 3D-Fräsen unter Anwendung der Level-Set-Methode. Dabei wird das Werkzeug in Form von zwei Halbkugeln und zwei Zylindern modelliert. Zur Erfüllung der Zugänglichkeitsrestriktion wird eine Filterung der Entwicklungsgeschwindigkeiten untersucht. Dabei werden Geschwindigkeiten, die zur Ausbildung von Hinterschneidungen führen, herausgefiltert. Um zu erkennen, an welchen Stellen diese Filterung stattfinden muss, nutzen die Autoren einen klassischen Raycast-Algorithmus. Dazu wird jeder Punkt der Strukturoberfläche als Strahlenquelle deklariert, die Strahlen (englisch: *Ray*) entgegengesetzt zur Bearbeitungsrichtung erzeugen. Besitzt ein Strahl einen Schnittpunkt mit dem zugrunde liegenden FE-Netz, ist der betrachtete Punkt unzugänglich. Infolge der Filterung wird auf dem gesamten Strukturrand ein Strukturwachstum unterdrückt. In der Veröffentlichung wird betont, dass dadurch schwache lokale Minima entstehen können.

Deng et al. (2022) untersuchen eine CAD-basierte Form der Optimierung fräsbare Strukturen. Die Basis des Verfahrens besteht darin, den schrittweisen Materialabtrag während des Fertigungsprozesses durch parametrisierte Volumina zu beschreiben. Diese werden als zweidimensionale kubische Splines erzeugt und schließlich zu Volumenkörpern extrudiert, die aus dem Startentwurf entfernt werden. Die Form der Volumina und deren Position sind abhängig von der parallel stattfindenden Topologieoptimierung. Das Werkzeug wird als unendlich langer Zylinder mit einem halbkugelförmigen Werkzeugkopf modelliert.

2.4.2 Gewährleistung minimaler Wandstärken

In den zuvor zitierten Publikationen wird lediglich die Zugänglichkeitsrestriktion ohne Einbezug minimaler Wandstärken berücksichtigt. Wie die Einhaltung einer Mindestwandstärke gelingen kann, wird jedoch in eigenständigen Forschungsarbeiten untersucht.

Sigmund und Petersson (1998) diskutieren Techniken, die die Abhängigkeit der Optimierungsergebnisse der Dichtemethode von den Diskretisierungsgraden mindern sollen. Einerseits wird auf eine diskretisierungsunabhängige Filtertechnik (Sigmund 1997) und anderseits auf eine Begrenzung der zulässigen Dichteänderung (Petersson und Sigmund 1998) zwischen Elementen verwiesen, um die Ausbildung dünner Strukturen zu unterbinden. Diskretisierungsunabhängig meint, dass die feinsten geometrischen Details durch den Filterradius und nicht durch das Finite-Elemente-Netz vorgegeben werden. Zwar wird nicht explizit die Anwendbarkeit als Wandstärkenrestriktion betont, jedoch eignen sich dafür beide Ansätze.

Von Poulsen (2003) wird die MOLE-Methode (Monotonicity based minimum Length scale) vorgestellt. Der Kern der Methode besteht darin, die Dichteverteilung an jedem Punkt der Struktur über einen mit Geraden ausgefüllten Kreis abzutasten. Diese Geraden schneiden jeweils den Mittelpunkt des Kreises. Ändert sich die Dichte entlang der Geraden nicht, ist die minimale Wandstärke – die dem Durchmesser des Kreises entspricht – eingehalten worden. In der Veröffentlichung werden jedoch auf Begrenzungen des Verfahrens wie z. B. die nicht Anwendbarkeit auf glatte, konvexe Strukturränder hingewiesen.

Guest et al. (2004) führen eine Trennung zwischen Entwurfs- und physikalischen Variablen ein. Als physikalische Variablen werden die einzelnen Elementdichten gewählt. Als Entwurfsvariablen werden die Elementdichten lokal benachbarter Elemente zusammengefasst. Dies geschieht an jedem Elementschwerpunkt mithilfe einer Wichtungsfunktion, die innerhalb eines vordefinierten Radius wirkt. Aufgrund dieser lokalen Gruppierung von Elementdichten entstehen keine geometrischen Details, die kleiner als der Radius der Wichtungsfunktion sind.

Bei der Optimierung von tiefziehbaren Blechstrukturen überführt Dienemann (2018) die Wandstärkenrestriktion in die Bestrafung der Sensitivitäten von Elementen, die zu weit entfernt von der Mittelfläche eines Blechs liegen.

Im Kontext der Level-Set-Optimierung ist die Forschungshistorie in Bezug auf Wandstärkenrestriktionen weniger umfassend. Cheng et al. (2006) führen eine Methodik ein, mit deren Hilfe die Level-Set-Funktion hin zur Ausbildung vordefinierter geometrischer Formen gesteuert werden kann. Über eine Dimensionierung

dieser Formen kann die Wandstärke während der Optimierung restriktiv werden. Der Nachteil dabei ist jedoch, dass die optimierten Strukturen nur aus geometrischen, primitiven Formen bestehen, was die Entstehung schwacher lokaler Minima begünstigt.

Ein alternativer Ansatz wird von Chen et al. (2008) in Form eines zu minimierenden Straffunktionalen beschrieben. Dieses Funktional wird so definiert, dass dessen Minimierung die Ausbildung stabförmiger Strukturen mit einheitlichem Durchmesser begünstigt. Die Autoren betonen, dass die numerische Vorgabe einer minimalen Wandstärke nicht garantiert zur geforderten Wandstärke führt. Diese ist in den durchgeführten Versuchen abhängig von der Wahl eines Lagrange-Parameters. Von daher können nach Erreichen des Minimums immer noch zu geringe Wandstärken vorliegen.

Allaire et al. (2016) leiten zur Integration verschiedener Wandstärkenrestriktionen Sensitivitäten auf Basis der vorzeichenbehafteten Abstandsfunktion her. Zu den betrachteten Restriktionen zählen neben der Einhaltung einer Mindestwandstärke die Gewährleistung einer Maximalwandstärke und die Einhaltung eines Mindestabstandes zwischen nicht massebehafteten Strukturbereichen. Die Restriktionen werden in Straffunktionale überführt und mithilfe der vorzeichenbehafteten Abstandsfunktion mit der Level-Set-Funktion gekoppelt. Schließlich werden die Sensitivitäten dieser Funktionale bezüglich Verschiebungen der Strukturgrenzen berechnet. In der Veröffentlichung wird betont, dass bei der Einhaltung von Mindestwandstärken auch Bereiche beeinflusst werden können, an denen die Restriktion eigentlich erfüllt ist. Dieser Effekt kann beispielsweise in dünnen Spalten auftreten. Hier kann die Sensitivität an einem zu dünnen Strukturbereich einen auf der gegenüberliegenden Seite des Spalts liegenden, ausreichend dicken Bereich beeinflussen und diesen damit ‚ungewollt‘ verdicken.

Die vorgestellte Forschungshistorie zeigt, dass insbesondere in Anwendung der Level-Set-Methode weiterer Forschungsbedarf zur Optimierung fräsbarer Strukturen besteht. Besondere Aufmerksamkeit ist dabei auf die Berücksichtigung realistischer Werkzeuggeometrien zu legen, die in bisherigen Arbeiten nur stark vereinfacht oder zum Teil gar nicht einbezogen werden. Weiter ist zu untersuchen, wie eine fertigungsgerechte Optimierung ohne die strikte Unterdrückung des Strukturwachstums gelingen kann, um die von Morris et al. (2020) beobachtete Tendenz zur Ausbildung schwacher lokaler Minima zu verringern. Außerdem wird bisher in keiner Forschungsarbeit untersucht, wie die Kombination einer Zugänglichkeits- und Wandstärkenrestriktion gelingen kann. Dabei ist festzuhalten, in welchem Maße dadurch das Konvergenzverhalten und die Optimierungsergebnisse beeinflusst werden.

3 Topologieoptimierung mit der Level-Set-Methode

Im Zuge der Forschungsarbeiten von Wang et al. (2003) und Allaire et al. (2004) wird die Level-Set-Methode erstmalig in der Topologieoptimierung mechanischer Strukturen eingesetzt. Seither reiht sich dieser Ansatz als bedeutendes Verfahren in die Methoden der Topologieoptimierung ein.

In diesem Kapitel wird zur Einführung des Optimierungsverfahrens zunächst ein beispielhaftes Optimierungsproblem vorgestellt und mathematisch definiert. Im Anschluss daran werden die Sensitivitäten der Zielfunktion und der berücksichtigten Restriktion über das Konzept der Formableitung hergeleitet.

Schließlich wird die Funktionsweise der Level-Set-Methode grundlegend erläutert und dargestellt, wie die errechneten Sensitivitäten in diese Methode integriert und damit in eine Strukturoptimierung überführt werden.

3.1 Formulierung des Optimierungsproblems

Rozvany (1997) erläutert, dass als vergleichsweise einfaches Optimierungsproblem in der Topologieoptimierung mechanischer Strukturen die Minimierung der *mittleren Nachgiebigkeit* unter der Vorgabe einer Volumenrestriktion gilt. Die mittlere Nachgiebigkeit beziffert global über das gesamte Volumen einer belasteten Struktur, wie viel mechanische Arbeit deren äußere Lasten verrichten. Im Gegensatz zur mittleren Nachgiebigkeit gestaltet sich die Minimierung einer lokalen Eigenschaft wie z. B. der maximalen Vergleichsspannung als schwieriger. Wie Schumacher (2020) erläutert, liegt dies darin begründet, dass die Position, an der die maximale Vergleichsspannung auftritt, im Verlauf der Optimierung sprunghaft wechseln kann. Eindeutige Lösungen solcher Optimierungsaufgaben können dann nicht immer gefunden werden. Im Forschungskontext wird daher, sofern möglich, häufig die Minimierung der mittleren Nachgiebigkeit als Zielfunktion gewählt. Auch in dieser Arbeit wird diese Zielfunktion in allen Optimierungsbeispielen verwendet.

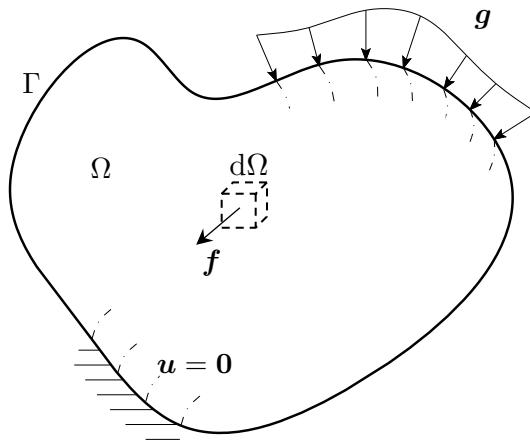


Abbildung 3–1: Eine durch Oberflächen- und Volumenkräfte belastete Struktur, modifiziert nach Schumacher (2020)

In Abbildung 3–1 ist eine Struktur Ω dargestellt, die durch Volumenkräfte \mathbf{f} und auf ihrem Rand Γ durch Oberflächenkräfte \mathbf{g} belastet wird. Reddy (2013) und Gross et al. (2012) beschreiben, dass im Gleichgewichtszustand bei linear-elastischem Materialverhalten die von den äußeren Lasten verrichtete Arbeit mit der in der Struktur gespeicherten Formänderungsenergie in Relation zueinander gesetzt werden kann. Dieser Zusammenhang wird im *Satz von Clapeyron* festgehalten. Setzt man voraus, dass die Belastungen unabhängig von der Deformation der Struktur sind, besagt der Satz, dass die von den äußeren Lasten verrichtete Arbeit W_a der doppelten im Körper gespeicherten Formänderungsenergie U_i entspricht

$$W_a = 2U_i. \quad (3-1)$$

Mithilfe des resultierenden Verschiebungsfelds \mathbf{u} wird die von den äußeren Lasten verrichtete Arbeit berechnet aus

$$W_a = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} d\Gamma. \quad (3-2)$$

Wird mit $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})$ der Spannungstensor und mit $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ der Dehnungstensor bezeichnet, ergibt sich die im Körper gespeicherte Formänderungsenergie zu

$$U_i = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) d\Omega. \quad (3-3)$$

Ersetzt man in Gleichung 3–1 die verrichtete Arbeit und die gespeicherte Formänderungsenergie durch die gezeigten analytischen Ausdrücke, erhält man die mittlere Nachgiebigkeit $C(\Omega)$. Diese entspricht formal der doppelten in der Struktur gespeicherten Formänderungsenergie und ergibt sich zu

$$C(\Omega) = W_a = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} d\Gamma = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) d\Omega. \quad (3-4)$$

Die Minimierung der mittleren Nachgiebigkeit entspricht demnach einer Verringerung der Formänderungsenergie bzw. einer Verringerung der von den äußeren Lasten verrichteten Arbeit.

Als Restriktion wird gefordert, dass das Volumen $V(\Omega)$ der Struktur einen Zielwert V_z annehmen soll. Besteht diese nur aus einem Material, wird dadurch gleichzeitig deren Masse restriktiert. In der numerischen Praxis wird häufig anstatt des Volumens ein *Volumenfüllgrad* $V_F(\Omega)$ verwendet. Dabei wird das Strukturvolumen auf das Designraumvolumen V_D normiert. Formal ergeben sich als Restriktionsformulierungen des Volumens und des Volumenfüllgrads

$$V(\Omega) - V_z = \int_{\Omega} d\Omega - V_z = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{V_D} \left(\int_{\Omega} d\Omega - V_z \right) = 0. \quad (3-5)$$

Das Optimierungsproblem wird schließlich unter Verwendung der Zielfunktion und der Volumenrestriktion wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \min C(\Omega) &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) d\Omega \\ \text{sodass } V(\Omega) - V_z &= \int_{\Omega} d\Omega - V_z = 0. \end{aligned} \quad (3-6)$$

3.2 Sensitivitätsanalyse

Zur Lösung des Optimierungsproblems 3–6 muss zunächst ermittelt werden, wie sich die Funktionswerte der Zielfunktion und der Restriktion bei Formänderungen der Struktur ändern. Dazu werden die *Formsensitivitäten* der mittleren Nachgiebigkeit sowie des Volumens mithilfe von *Formableitungen* bestimmt. Auf Grundlage dieser Informationen kann die Strukturentwicklung so gesteuert werden, dass das zugrunde liegende Optimierungsproblem gelöst wird.

3.2.1 Konzept der Formableitung

Nach Walker (2015) wird die Änderung von einem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ in ein neues Gebiet $\Omega_t \subseteq \mathbb{R}^n$ mathematisch durch eine Verschiebung aller Punkte \mathbf{x} des Gebiets entlang eines Verschiebungsfelds $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{x}) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ definiert. Für den weiteren Verlauf wird $n \in \{2, 3\}$ angenommen. Eine solche Transformation ist in Abbildung 3–2 verdeutlicht. Wird mit $t \in \mathbb{R}^+$ das Maß der Gebietsänderung skaliert, kann diese Transformation formuliert werden als

$$\Omega_t = \{\mathbf{x} + t\boldsymbol{\theta} : \forall \mathbf{x} \in \Omega\}. \quad (3-7)$$

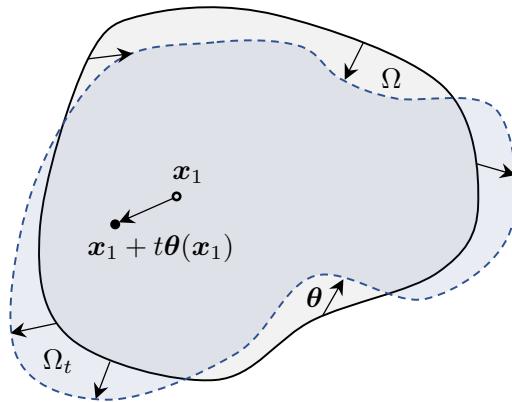


Abbildung 3–2: Transformation eines Gebietes Ω in ein Gebiet Ω_t über ein Verschiebungsfeld θ , modifiziert nach Allaire et al. (2021)

Sokolowski und Zolesio (1992) definieren die Formableitung eines gebietsabhängigen Funktionalen $J(\Omega)$ bei solchen Transformationen als folgenden Grenzwert:

$$J'(\Omega) \boldsymbol{\theta} = \frac{d}{dt} J(\Omega_t) \Big|_{t=0^+} = \lim_{t^+ \rightarrow 0} \frac{J(\Omega_t) - J(\Omega)}{t}. \quad (3-8)$$

Die Schreibweise $J'(\Omega) \boldsymbol{\theta}$ bedeutet, dass die Ableitung in Richtung des Verschiebungsfelds definiert ist. Im Folgenden werden die Formableitungen eines Gebiets- und Randfunktionalen nach Sokolowski und Zolesio (1992) sowie Walker (2015) vorgestellt. Eine exemplarische Herleitung für die Formableitung des Gebietsfunktionalen ist im Anhang A zu finden.

Formableitung eines Gebietsfunktionalen

Ein Funktional $J(\Omega) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, das auf einem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ ausgewertet wird und von einer Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ abhängt

$$J(\Omega) = \int_{\Omega} f(\Omega) d\Omega, \quad (3-9)$$

besitzt in Richtung eines Verschiebungsfelds $\boldsymbol{\theta} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ die Formableitung

$$J'(\Omega) \boldsymbol{\theta} = \int_{\Omega} f'(\Omega) d\Omega + \int_{\Gamma} f(\Omega) \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n} d\Gamma. \quad (3-10)$$

In Gleichung 3–10 wird durch den ersten Term berücksichtigt, dass Gebietstransformationen zu einer Änderungen der Funktion f führen können und diese wiederum zu einer Änderung des Funktionalen $J(\Omega)$ beitragen. Darin wird die Änderung

der Funktion als $f'(\Omega)$ beziffert. Walker illustriert dies wie folgt: Beschreibt das Funktional z. B. den Volumenstrom und die Funktion die Strömungsgeschwindigkeit in einem Rohr, führt eine Änderung des Innenradius (Gebietstransformation) zu einer Änderung der Strömungsgeschwindigkeit und des Volumenstroms. Im zweiten Term wird erfasst, welche Änderungen des Funktionals durch die reine Gebietstransformation bei konstant gehaltener Funktion f entstehen. Die Änderung des Gebiets wird charakterisiert durch die Randverschiebungen $\boldsymbol{\theta}$, die auf die Normalenrichtung \mathbf{n} des Randes abgebildet werden. Skaliert werden die Gebietsänderungen mit der Funktion f . Allaire et al. (2004) erläutern, dass Formableitungen nur von Randverschiebungen in Normalenrichtung abhängig sind. Tangentiale Verschiebungen führen zu keiner Änderung des zugrunde liegenden Functionals.

Formableitung eines Randfunktionals

Ein Funktional $K(\Omega) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, das auf einem Rand $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^3$ ausgewertet wird und von einer Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ abhängt

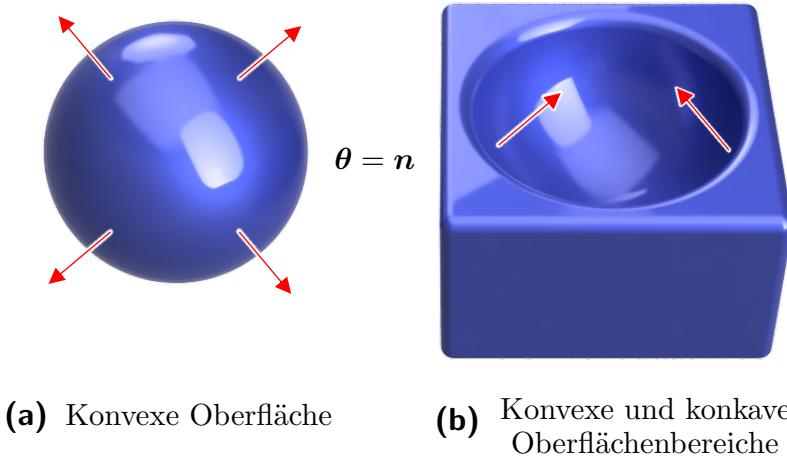
$$K(\Omega) = \int_{\Gamma} f(\Omega) d\Gamma, \quad (3-11)$$

besitzt in Richtung eines Verschiebungsfelds $\boldsymbol{\theta} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ die Formableitung

$$K'(\Omega) \boldsymbol{\theta} = \int_{\Gamma} f'(\Omega) d\Gamma + \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} + \kappa f \right) \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad \text{mit} \quad \kappa = \nabla \cdot \mathbf{n}. \quad (3-12)$$

Wie zuvor beschreibt $f'(\Omega)$ die Änderung der Funktion f bei Transformationen des Gebiets. Der dazugehörige Term beschreibt daher den Anteil der Funktionsänderung an der Änderung des Functionals $K(\Omega)$. Im zweiten Term wird auch hier berücksichtigt, welchen Anteil die Gebietsänderung bei konstant gehaltener Funktion f an der Änderung des Functionals besitzt. Hier ist die Gebietsänderung ebenfalls durch eine Verschiebung des Strukturrandes in Normalenrichtung charakterisiert und wird mit zwei Einflussgrößen skaliert. Mit der Ableitung der Funktion in Normalenrichtung $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}$ wird berücksichtigt, dass sich bei Randverschiebungen die auf dem Strukturrand vorliegenden Funktionswerte ändern können. Die zweite Einflussgröße κ ist die mittlere Krümmung des Strukturrandes. Diese hat bei Verschiebungen des Randes einen Einfluss auf die betragsmäßige Änderung der Oberfläche. Zur Veranschaulichung dieses Effekts sind in Abbildung 3-3 zwei Beispielstrukturen gezeigt.

Die Kugel in Abbildung 3-3a ist an allen Punkten ihrer Oberfläche konvex gekrümmmt. Bei einer gleichmäßigen Verschiebung der Oberfläche in ihre äußere Normalenrichtung vergrößert sich die Kugeloberfläche. Im Gegensatz dazu weist



(a) Konvexe Oberfläche

(b) Konvexe und konkav Oberflächenbereiche

Abbildung 3-3: Einfluss von konvex- und konkav gekrümmten Oberflächen auf die Entwicklung des Strukturrandes

die Struktur in Abbildung 3-3b im Bereich der ausgeschnittenen Halbkugel einen konkav gekrümmten Oberflächenbereich auf. Bei einer Verschiebung dieses Bereichs in seine äußere Normalenrichtung verringert sich die Oberfläche der Gesamtstruktur.

Die Formsensitivitäten $\frac{\delta J}{\delta \Omega}$ werden im weiteren Verlauf dieser Arbeit häufig allgemein als Skalarfeld ω ausgedrückt. Allaire et al. (2021) betonen, dass Formableitungen mithilfe der Formsensitivitäten wie folgt geschrieben werden können:

$$J'(\Omega) \boldsymbol{\theta} = \int_{\Gamma} \frac{\delta J}{\delta \Omega} \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \int_{\Gamma} \omega \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n} d\Gamma. \quad (3-13)$$

In dieser Schreibweise kann eine Formableitung als Änderung eines Gebiets- oder Randfunktionalen bei Verschiebungen des Randes in seine Normalenrichtung, skaliert durch die Formsensitivität verstanden werden.

3.2.2 Formableitung der mittleren Nachgiebigkeit

Zur Bildung der Formableitung der mittleren Nachgiebigkeit (Gleichung 3-4) muss berücksichtigt werden, dass sich bei Gebietstransformationen neben dem Gebiet Ω auch das Verschiebungsfeld \mathbf{u} ändert. Unter dieser Prämisse leiten Sokolowski und Zolesio (1992) die Formableitung her als

$$\begin{aligned} C'(\Omega) \boldsymbol{\theta} &= \int_{\Gamma_R} \left(2 \left[\frac{\partial(\mathbf{g} \cdot \mathbf{u})}{\partial \mathbf{n}} + \kappa \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \right] - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \right) \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_L} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n} d\Gamma. \end{aligned} \quad (3-14)$$

Darin wird mit Γ_L der gelagerte Rand und mit Γ_R der übrige Rand bezeichnet, sodass für den gesamten Rand $\Gamma = \Gamma_L + \Gamma_R$ gilt. Letzterer setzt sich aus belasteten Γ_B und unbelasteten Bereichen Γ_0 zusammen, wobei $\Gamma_R = \Gamma_B + \Gamma_0$ gilt. In numerischen Beispielen – so auch in den Beispielen dieser Arbeit – wird häufig auf Volumenkräfte verzichtet. Wird außerdem angenommen, dass sich der belastete und der gelagerte Rand während der Optimierung nicht verschieben, verschwindet das dortige Verschiebungsfeld. Die Formableitung wird dann nur noch auf dem unbelasteten Rand ausgewertet. Auf diesem ist der Ausdruck in der eckigen Klammer – aufgrund nicht vorhandener Belastung – null. Die Ableitung vereinfacht sich dann zu

$$C'(\Omega) \boldsymbol{\theta} = - \int_{\Gamma_0} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n} d\Gamma. \quad (3-15)$$

3.2.3 Formableitung des Volumens

Die Formableitung des Volumens

$$V(\Omega) = \int_{\Omega} d\Omega \quad (3-16)$$

kann direkt aus Gleichung 3-10 bestimmt werden. Dazu wird die Funktion $f(\Omega)$ zu $f = 1$ gesetzt. Deren Formableitung $f'(\Omega)$ ist null. Die Formableitung des Volumens lautet daher

$$V'(\Omega) \boldsymbol{\theta} = \int_{\Gamma} \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n} d\Gamma. \quad (3-17)$$

3.3 Einführung in die Level-Set-Methode

Die Level-Set-Methode ist ein in den 1980er-Jahren von Osher und Sethian (1988) entwickeltes Verfahren, mit dessen Hilfe sich bewegende Kurven und Oberflächen numerisch verfolgen und analysieren lassen. Als ursprüngliches Anwendungsgebiet gilt die Bildverarbeitung insbesondere in medizinischen Aufgaben. So diskutieren beispielsweise Osher und Tsai (2003) den Einsatz der Level-Set-Methode zur automatisierten Segmentierung der Bilddaten von Röntgengeräten und Computer-Tomografen. Osher und Fedkiw (2003) beschreiben als weiteres und populäres Anwendungsgebiet die numerische Verfolgung von dünnen Flammfronten bei der Analyse von Verbrennungsvorgängen. Weitere Einsatzmöglichkeiten neben der Strukturoptimierung stellen Gibou et al. (2018) vor. Dazu zählt beispielsweise die Simulation der Kristallisierung von Mehrkomponenten-Legierungen. Außerdem

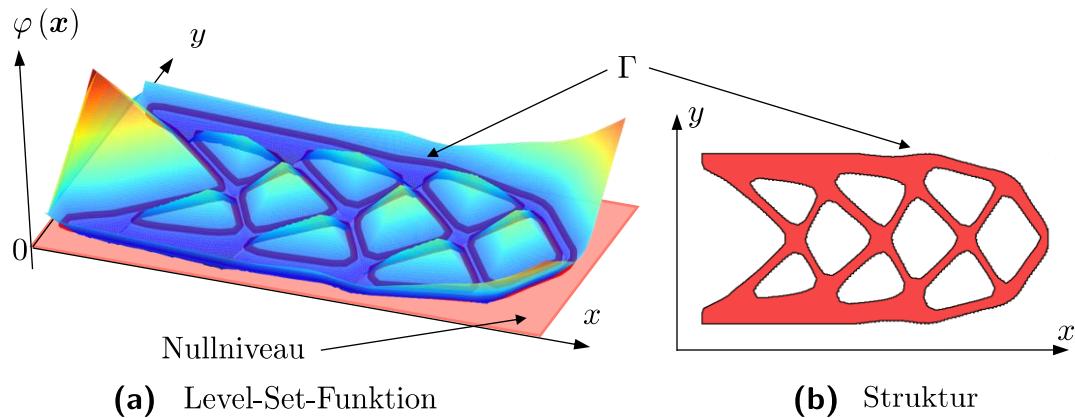


Abbildung 3-4: Eine Level-Set-Funktion zur impliziten Beschreibung einer Beispielstruktur

werden Anwendungen in der medizinischen Forschung genannt. So kann z. B. mithilfe eines auf der Level-Set-Methode basierenden Ansatzes eine Elektroporation simuliert werden. Ein solches Verfahren wird genutzt, um die Durchlässigkeit von Zellmembranen mittels elektrischer Pulse für medizinisch notwendige Moleküle zu erhöhen.

3.3.1 Strukturbeschreibung durch eine Level-Set-Funktion

Die Grundlage des Verfahrens bildet die Beschreibung des zu verfolgenden Objekts durch eine Level-Set-Funktion. Im Rahmen der Topologieoptimierung wird die zu optimierende Struktur durch eine solche Funktion parametrisiert. Dazu wird der n -dimensionale Rand Γ einer Struktur Ω implizit als Menge aller Nullstellen einer $(n+1)$ -dimensionalen Level-Set-Funktion definiert. Eine charakteristische Eigenschaft der Level-Set-Funktion ist, dass diese an innerhalb der Struktur liegenden Punkten negative und an außerhalb der Struktur liegenden Punkten positive Werte annimmt. Formal gilt dann für die Level-Set-Funktion $\varphi(\mathbf{x})$ an einem Punkt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$:

$$\varphi(\mathbf{x}) \begin{cases} > 0 & \text{falls } \mathbf{x} \notin \Omega, \\ = 0 & \text{falls } \mathbf{x} \in \Gamma, \\ < 0 & \text{falls } \mathbf{x} \in \Omega. \end{cases} \quad (3-18)$$

Um die in Gleichung 3-18 definierten Eigenschaften auf die Level-Set-Funktion zu übertragen, wird diese in den meisten Anwendungen als *vorzeichenbehaftete Abstandsfunktion* definiert (ein alternativer Ansatz wird von Wang und Wang

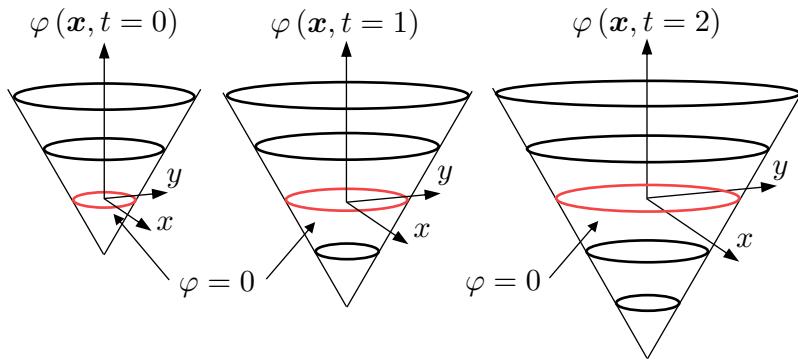


Abbildung 3-5: Wachstum eines Kreises (rot) durch die Entwicklung einer Level-Set-Funktion, modifiziert nach Sethian (1999)

(2006) über die Interpolation der Level-Set-Funktion aus radialen Basisfunktionen eingeführt). Die Level-Set-Funktion repräsentiert dann an jedem Punkt des Designraums den kürzesten vorzeichenbehafteten Abstand zur Strukturgrenze. Neben der Erfüllung aller geforderten mathematischen Eigenschaften hat die Abstandsfunktion numerische Vorteile bei der Entwicklung der Level-Set-Funktion. Eine beispielhafte Level-Set-Funktion ist in Abbildung 3-4a dargestellt. Deren rot markierte Nullstellenmenge beschreibt den Rand der in Abbildung 3-4b gezeigten Struktur.

3.3.2 Entwicklung der Strukturränder

Der zweite zentrale Bestandteil der Level-Set-Methode ist die numerische Verfolgung zeitlich veränderlicher Kurven oder Oberflächen. In der Topologieoptimierung werden damit Formänderungen mechanischer Strukturen erfasst. Solche Veränderungen der Strukturgrenzen werden formal durch eine Entwicklung der Level-Set-Funktion realisiert. Im Folgenden wird die von Sethian (1999) entwickelte *Level-Set-Entwicklungsleichung* hergeleitet.

Legt ein auf dem Strukturrand befindlicher Punkt \mathbf{x}_R bei einer Entwicklung des Randes einen Weg $\mathbf{x}(t)$ über die Entwicklungszeit t zurück, muss für die zeitabhängige Level-Set-Funktion auf diesem Randpunkt

$$\varphi(\mathbf{x}(t), t) = 0 \quad (3-19)$$

gelten. In Abbildung 3-5 ist dazu die exemplarische Entwicklung einer Level-Set-Funktion zu drei verschiedenen Zeitpunkten dargestellt. In der gezeigten Entwicklung wird die Level-Set-Funktion kontinuierlich abgesenkt. Dies führt zu einem gleichmäßigen Wachstum des roten Kreises.

Mithilfe des totalen Differentials und der Kettenregel lässt sich am verfolgten Randpunkt (Gleichung 3–19) die zeitliche Änderung der Level-Set-Funktion bestimmen. (Partielle Ableitungen werden im weiteren Verlauf durch ein Komma und die jeweilige Variable abgekürzt.) Für die zeitliche Änderung gilt dann

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial \mathbf{x}_R} \frac{\partial \mathbf{x}_R}{\partial t} = \varphi_{,t} + \nabla\varphi \cdot \mathbf{x}_{,t} = 0. \quad (3-20)$$

Der verfolgte Randpunkt bewegt sich mit der Geschwindigkeit $\mathbf{x}_{,t}$. Dieser kann sich nur normal zum Rand bewegen. Zur Begründung zerlegen Osher und Fedkiw (2003) die Geschwindigkeit in eine Normal- $v_n \mathbf{n}$ und eine Tangentialkomponente $v_\tau \boldsymbol{\tau}$. Aus Gleichung 3–20 folgt dann:

$$\varphi_{,t} + \nabla\varphi \cdot (v_n \mathbf{n} + v_\tau \boldsymbol{\tau}) = \varphi_{,t} + v_n \nabla\varphi \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{mit} \quad \nabla\varphi \cdot \boldsymbol{\tau} = 0. \quad (3-21)$$

Die Geschwindigkeit in Normalenrichtung v_n wird als *Entwicklungs geschwindigkeit* bezeichnet. Für die Normaleneinheitsvektoren kann geschrieben werden:

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|}. \quad (3-22)$$

Damit kann der Ausdruck 3–21 durch

$$\nabla\varphi \cdot \mathbf{n} = \nabla\varphi \cdot \frac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|} = |\nabla\varphi| \quad (3-23)$$

weiter vereinfacht werden. Die Level-Set-Entwicklungsgleichung lässt sich dann als folgendes Anfangswertproblem schreiben:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + v_n |\nabla\varphi| = 0 \quad \text{mit} \quad \varphi(\mathbf{x}, t=0) = \varphi_0. \quad (3-24)$$

Darin bezeichnet φ_0 die Struktur vor Beginn der Entwicklung.

3.3.3 Lösung der Level-Set-Entwicklungsgleichung

Die Level-Set-Entwicklungsgleichung wird von Sethian (1999) sowie Osher und Fedkiw (2003) in die Kategorie der *Hamilton-Jacobi-Gleichungen* eingeordnet. Unter Verwendung der Hamilton-Funktion H zeichnen sich diese durch die folgende Struktur aus:

$$\varphi_{,t} + H(\nabla\varphi) = 0 \quad \text{mit} \quad H(\nabla\varphi) = v_n |\nabla\varphi| = v_n (\varphi_{,x}^2 + \varphi_{,y}^2 + \varphi_{,z}^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (3-25)$$

Numerische Lösungsverfahren solcher Gleichungen werden von Osher und Shu (1991) sowie Sethian (1999) entwickelt und diskutiert. In beiden Publikationen

wird zur Gewinnung einer geeigneten Approximation der Hamilton-Funktion die Entwicklungsgleichung in eine Kontinuitätsgleichung überführt. Am Beispiel einer eindimensionalen Version von Gleichung 3–25 wird diese Transformation durch eine Differentiation über x erzielt

$$(\varphi_{,t})_{,x} + (H(\varphi_{,x}))_{,x} = (\varphi_{,x})_{,t} + (H(\varphi_{,x}))_{,x} = a_{,t} + (H(a))_{,x} = 0. \quad (3-26)$$

Sethian erläutert am Beispiel einer Strömung, dass die zeitliche Änderung der Erhaltungsgröße a als die Änderung der in ein Kontrollvolumen ein- und ausströmenden ‚Fluidanteile‘ $H(a)$ approximiert wird. Ein solcher Anteil wird als Fluss e bezeichnet und beschreibt im Sinne des Beispiels, welche Fluidmasse pro Zeiteinheit durch eine Grenzschicht in Strömungsrichtung fließt. In Abbildung 3–6a ist eine exemplarische Flussänderung über ein Kontrollvolumen gezeigt.

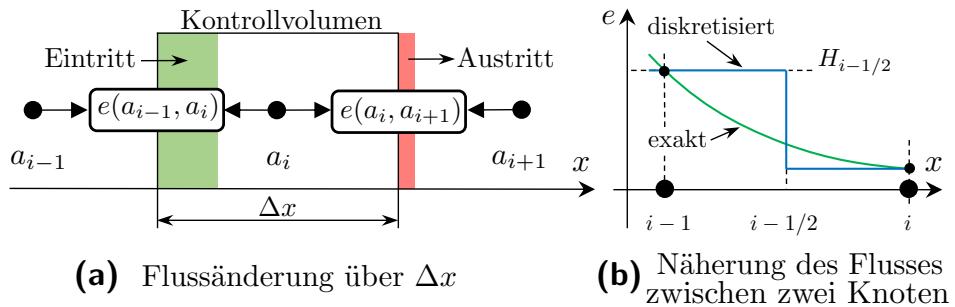


Abbildung 3–6: Abhängigkeit der zeitlichen Änderung der Erhaltungsgröße von der Flussänderung über ein Kontrollvolumen, modifiziert nach Sethian (1999)

Die Flüsse zwischen den Knoten bzw. auf den Grenzen des Kontrollvolumens werden mit $e(a_i, a_{i+1})$ bzw. $e(a_{i-1}, a_i)$ bezeichnet. Sethian überführt dies in eine diskretisierte Form der Kontinuitätsgleichung 3–26 über k Zeitschritte mit einer Zeitschrittweite Δt für ein Kontrollvolumen der Länge Δx am Knoten i als

$$\frac{a_i^{k+1} - a_i^k}{\Delta t} = - \frac{e(a_i^k, a_{i+1}^k) - e(a_{i-1}^k, a_i^k)}{\Delta x} \approx - \frac{H_{i+1/2} - H_{i-1/2}}{\Delta x}. \quad (3-27)$$

Bei einem Vergleich mit Gleichung 3–26 wird klar, dass die Flussänderung als Änderung der Hamilton-Funktion ausgedrückt werden kann.

Wie in Abbildung 3–6b gezeigt, wird der Fluss zwischen zwei Knoten – auf einer Grenze des Kontrollvolumens – bei einer Reduktion des Knotenabstands immer exakter aus den Knotenwerten genähert. Demnach kann die Hamilton-Funktion an einem Knoten als Fluss innerhalb des Kontrollvolumens $H(a_i^k) \approx e(a_{i-1/2}, a_{i+1/2})$ approximiert werden. Mithilfe dieser Information wird die Entwicklungsgleichung 3–25 diskretisiert. Das Schema zur Berechnung eines neuen Level-Set-Wertes ist an einem eindimensionalen Beispiel in Abbildung 3–7 verdeutlicht.

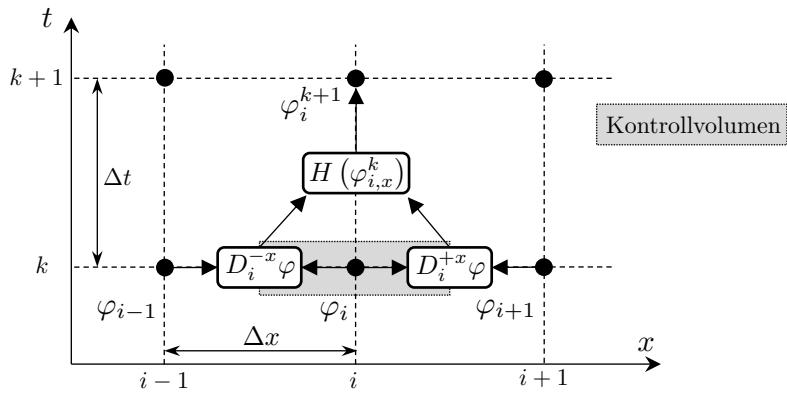


Abbildung 3–7: Lösung der Entwicklungsgleichung durch eine Approximation der Hamilton-Funktion, modifiziert nach Sethian (1999)

Die Änderung der Level-Set-Funktion in einem Zeitschritt entspricht einer negativen Änderung der am betrachteten Knoten approximierten Hamilton-Funktion. Letztere ist abhängig von den Flüssen auf den Grenzen des umschließenden Kontrollvolumens. Bei Annahme einer Entwicklungsgeschwindigkeit von $v_n = 1$ entspricht der Fluss gerade der Änderung der Level-Set-Funktion über die x -Richtung (siehe Gleichung 3–25, rechts). Osher und Sethian (1988) überführen dies in ein *Upwind-Schema*

$$\frac{\varphi_i^{k+1} - \varphi_i^k}{\Delta t} = -H(\varphi_{i,x}^k) = -\left(\max(D_i^{-x}\varphi_i^k, 0)^2 + \min(D_i^{+x}\varphi_i^k, 0)^2\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3-28)$$

Ist die Änderung der Level-Set-Funktion in Richtung der Entwicklungsgeschwindigkeit positiv, wird der linksseitige Differenzenquotient $D_i^{-x}\varphi$ verwendet. Ist die Änderung negativ, wird der rechtsseitige Differenzenquotient $D_i^{+x}\varphi$ eingesetzt (siehe Anhang B.1). Haben die Differenzenquotienten verschiedene Vorzeichen, werden entweder beide miteinander addiert oder der Fluss zu null gesetzt. In der Strömungsmechanik kann dies als ein Aufeinandertreffen oder Auseinanderfließen zweier Fluide interpretiert werden. Im letzteren Fall ist der Fluss zwischen beiden Strömungsanteilen gerade null. Eine Erweiterung der Lösung auf beliebige Entwicklungsgeschwindigkeiten ist im Anhang B.2 angegeben. Dazu wird das Upwind-Schema um negative Geschwindigkeiten ergänzt. Sethian (1999) stellt in seiner Forschungsarbeit zusätzlich Algorithmen zur Entwicklung mehrdimensionaler Beispiele auf strukturierten sowie unstrukturierten Rechengittern vor. Diese basieren alle auf dem hier beschriebenen Diskretisierungsansatz.

Die Lösung der explizit diskretisierten Entwicklungsgleichung muss zur Gewährleistung der Stabilität unter der Einhaltung einer *CFL-Bedingung* (Courant-Friedrichs-Lowy) erfolgen (Mecking 2000). Stabilität bedeutet nach Oertel et al. (2011), dass die Diskretisierungsfehler der Lösungen über den zeitlichen Verlauf nicht anwachsen.

Die CFL-Bedingung stellt dazu die Anforderung, dass die Level-Set-Funktion pro Zeitschritt Δt maximal über eine Gitterweite Δx entwickelt werden darf. Dadurch wird unterbunden, dass die in Gleichung 3–28 mithilfe der Differenzenquotienten erfasste Ausbreitungsgeschwindigkeit von Informationen im Rechennetz nicht die ‚physikalische‘ Entwicklungsgeschwindigkeit übersteigt. Nach Challis (2010) wird dazu die größte vorhandene Entwicklungsgeschwindigkeit ermittelt und folgende Bedingung für einen Zeitschritt aufgestellt:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{\max(|v_n|)} \quad \text{mit} \quad CFL = \max(|v_n|) \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad 0 < CFL \leq 1. \quad (3-29)$$

3.3.4 Reinitialisierung

Zuvor wurde bereits erwähnt, dass die Level-Set-Funktion häufig als vorzeichenbehaftete Abstandsfunktion definiert wird. Der Grund dafür ist, dass deren mathematische Eigenschaften numerische Vorteile bei der Level-Set-Entwicklung bieten. Neben den Eigenschaften aus Gleichung 3–18 gilt für den Betrag des Gradienten der vorzeichenbehafteten Abstandsfunktion

$$|\nabla \varphi| = 1. \quad (3-30)$$

Gemäß der Entwicklungsgleichung 3–24 entspricht in diesem Falle die zeitliche Änderung der Level-Set-Funktion genau der negativen Entwicklungsgeschwindigkeit. Im Verlauf der Strukturentwicklung verändert sich jedoch der Gradient der Level-Set-Funktion und die obige Eigenschaft geht fortlaufend verloren. Das Maß der Veränderung ist abhängig vom zugrunde liegenden Geschwindigkeitsfeld. Sethian (1999) erläutert, dass die Eigenschaft 3–30 nur erhalten bleibt, wenn die Entwicklungsgeschwindigkeiten die Bedingung

$$\nabla \varphi \cdot \nabla v_n = 0 \quad (3-31)$$

erfüllen. Dies bedeutet, dass die Entwicklungsgeschwindigkeiten normal zu den Isolinien der Level-Set-Funktion konstant sind. Diese Eigenschaft wird jedoch von den meisten Geschwindigkeitsfeldern, insbesondere wenn diese auf strukturmechanischen Gesetzen basieren, nicht erfüllt. Dijk et al. (2013) erläutern, welche numerischen Probleme eine Abweichung von der vorzeichenbehafteten Abstandsfunktion verursacht. Diese sind in Abbildung 3–8 illustriert:

- Ist die Level-Set-Funktion zu steil, führen große Änderungen der Funktion zu kleinen Verschiebungen des Randes (Abbildung 3–8a).

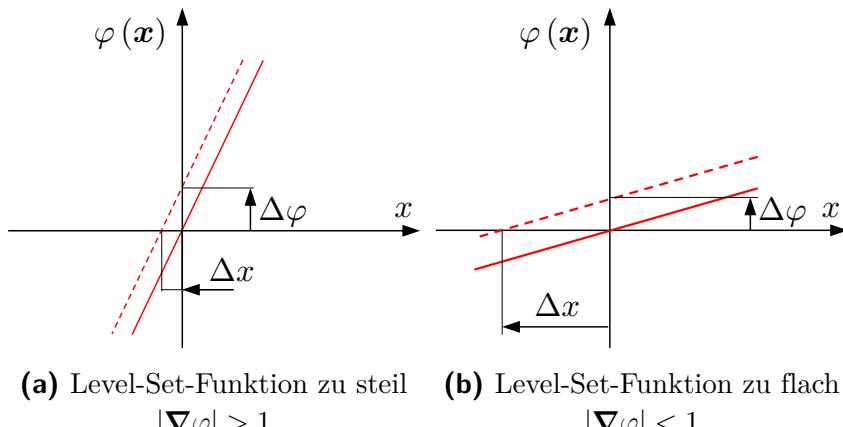


Abbildung 3-8: Einfluss des Gradienten der Level-Set-Funktion auf deren Entwicklung, modifiziert nach Dijk et al. (2013)

- Ist die Level-Set-Funktion zu flach, führen kleine Änderungen der Funktion zu großen Verschiebungen des Randes (Abbildung 3-8b).

Zur Lösung des Problems wird die Level-Set-Funktion zu regelmäßigen Zeitpunkten zur vorzeichenbehafteten Abstandsfunktion *reinitialisiert*. Sussman et al. (1994) überführen diesen Schritt in die Lösung einer Reinitialisierungsgleichung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{sgn}(\varphi_0) (|\nabla \varphi| - 1) = 0 \quad \text{mit} \quad \varphi(\mathbf{x}, t=0) = \varphi_0. \quad (3-32)$$

Die Gleichung wird bis zum Erreichen eines stationären Zustandes gelöst. Nimmt der Betrag des Gradienten den Wert eins an, ist dieser Zustand gerade erreicht. Mithilfe der Vorzeichenfunktion $\operatorname{sgn}(\varphi_0)$ wird zwischen innerhalb und außerhalb einer Struktur liegenden Bereichen differenziert. Zur Lösung wird der in Kapitel 3.3.3 vorgestellte Ansatz genutzt.

3.3.5 Velocity Extension

Für die Entwicklung der Level-Set-Funktion muss das zugrunde liegende Geschwindigkeitsfeld auch auf Punkten außerhalb des Nullniveaus definiert sein. Es reicht aus, wenn die Geschwindigkeiten in einem schmalen Band um das Nullniveau herum definiert werden. Dabei tritt jedoch die Fragestellung auf, welche Geschwindigkeit diesen Punkten zugewiesen werden soll. In Abbildung 3-9 ist diese Problematik skizziert.

Beruhen die Entwicklungsgeschwindigkeiten auf strukturmechanischen Sensitivitäten, sind diese häufig von ‚Natur‘ aus in der gesamten Struktur definiert. In

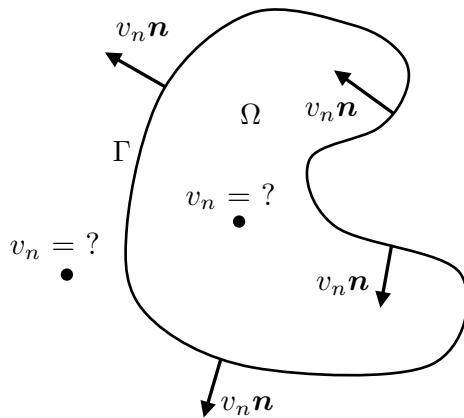


Abbildung 3–9: Velocity Extension, modifiziert nach Sethian (1999)

diesem Fall spricht man von *Natural Velocity Extension*.

Oftmals ist die natürliche Definition des Geschwindigkeitsfelds nicht gegeben. In einem solchen Fall schlagen Osher und Fedkiw (2003) eine Extrapolation der Randgeschwindigkeiten auf normal zum Rand orientierten Linien vor. Diese Form der Definition von Entwicklungsgeschwindigkeiten wird daher auch *Normal Velocity Extension* genannt. Ein dabei eintretender Nebeneffekt ist, dass dadurch gerade die durch Gleichung 3–31 formulierte Bedingung erfüllt wird. Das resultierende Geschwindigkeitsfeld führt also bei der Lösung der Entwicklungsgleichung zu einem Erhalt der vorzeichenbehafteten Abstandsfunktion. Die Bestimmung der unbekannten Geschwindigkeiten wird wie bei der Reinitialisierung der Level-Set-Funktion über die Lösung einer partiellen Differentialgleichung bis zum Erreichen eines stationären Zustands durchgeführt. Ersetzt man in Gleichung 3–32 den Klammerausdruck durch die Bedingung 3–31 und betrachtet die Entwicklungsgeschwindigkeit v_n als die zeitlich veränderliche Größe folgt daraus die Gleichung

$$\frac{\partial v_n}{\partial t} + \operatorname{sgn}(\varphi_0) \nabla \varphi \cdot \nabla v_n = 0 \quad \text{mit} \quad v_n(\mathbf{x}, t=0) = v_{n0}. \quad (3-33)$$

Darin ist v_{n0} das Geschwindigkeitsfeld sowie φ_0 die Level-Set-Funktion zum Zeitpunkt null. Durch die Vorzeichenfunktion wird gewährleistet, dass sich die Randinformationen immer vom Strukturrand weg bewegen. Auf innen liegenden Knoten werden die Geschwindigkeitsinformationen in die Struktur hinein transportiert und auf außen liegenden Knoten von der Struktur weg transportiert. Die Gleichung kann nach Osher und Fedkiw (2003) mithilfe des in Kapitel 3.3.3 vorgestellten Ansatzes diskretisiert werden.

3.4 Optimierungsalgorithmus

Im bisherigen Verlauf des Kapitels wurde die Minimierung der mittleren Nachgiebigkeit unter einer Volumenrestriktion als beispielhaftes Optimierungsproblem eingeführt. Darauf basierend werden Sensitivitäten in der Gestalt von Formableitungen hergeleitet. Mithilfe der Sensitivitäten kann eine Aussage darüber getroffen werden, wie sich die mittlere Nachgiebigkeit und das Strukturvolumen bei einer Verschiebung des Randes in dessen Normalenrichtung ändert. Im Folgenden wird die Fragestellung behandelt, in welche Richtung sich der Strukturrand zur Lösung des Optimierungsproblems bewegen muss. Dazu wird vorausgesetzt, dass die zu optimierende Struktur als Nullniveau einer Level-Set-Funktion beschrieben ist.

3.4.1 Die erweiterte Lagrange-Methode

Eine Möglichkeit zur Lösung einer Optimierungsaufgabe bietet sich durch Zuhilfenahme der *Lagrange-Funktion* an. Mithilfe dieser Funktion kann die Lösung eines restriktierten Optimierungsproblems in die Lösung eines nicht-restringierten Ersatzproblems überführt werden. Wie Harzheim (2008) betont, vereinfacht dies die mathematische Handhabung der Optimierungsaufgabe. Zur Veranschaulichung des Prinzips dient folgende Optimierungsaufgabe, bestehend aus einer zu minimierenden Zielfunktion $J(\Omega)$ und n Gleichheitsrestriktionen $R_i(\Omega)$:

$$\begin{aligned} & \min J(\Omega) \\ & \text{sodass } R_i(\Omega) = 0 \quad \text{mit } i = 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{3-34}$$

Die Zielfunktion und die Restriktionen werden nun in eine Lagrange-Funktion \mathcal{L}^* überführt. Unter Zuhilfenahme von Lagrange-Multiplikatoren λ_i lässt sich diese schreiben als

$$\mathcal{L}^*(\Omega, \lambda) = J(\Omega) + \sum_{i=1}^n \lambda_i R_i(\Omega) \quad \text{mit } \lambda_i \in \mathbb{R}. \tag{3-35}$$

Die Lösung der Optimierungsaufgabe befindet sich an einem Punkt der Lagrange-Funktion, der bezüglich Formänderungen und Änderungen der Lagrange-Multiplikatoren stationär wird. Strategien zum Auffinden dieses Punktes werden von Harzheim (2008) und Schumacher (2020) vorgestellt.

Bei der *erweiterten Lagrange-Methode* wird Gleichung 3-35 um einen quadratischen Strafterm ergänzt (Harzheim 2008). Dieser Term „bestraft“ während der Minimierung der Lagrange-Funktion auftretende Verletzungen der Restriktionen. Das Maß der Bestrafung wird durch Bestrafungsparameter Λ_i skaliert. Allaire et al. (2016)

erläutern, dass mit der erweiterten Lagrange-Methode sehr einfach verschiedenste Restriktionen in die Optimierung integriert werden können. Diese Eigenschaft wird zur Integration der Fertigungsrestriktionen in Kapitel 4 ausgenutzt. Die erweiterte Lagrange-Funktion \mathcal{L} wird folgendermaßen formuliert:

$$\mathcal{L}(\Omega, \lambda, \Lambda) = J(\Omega) + \sum_{i=1}^n \lambda_i R_i(\Omega) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\Lambda_i} R_i^2(\Omega) \quad \text{mit } \Lambda_i \in \mathbb{R}^+. \quad (3-36)$$

Die Lagrange-Multiplikatoren müssen iterativ während der Optimierung bestimmt werden. Je näher sich diese ihren optimalen Werten nähern, desto geringer wird der Einfluss der Strafparameter auf die Lage des Optimums. Sind die optimalen Lagrange-Multiplikatoren ermittelt, haben Änderungen der Strafparameter keinen Einfluss mehr auf die Lage des Optimums. Der Bestrafungsterm führt demnach lediglich zu einer Erhöhung der Konvergenzgeschwindigkeit. Dies ist ein Vorteil gegenüber anderen, auf Straftermen basierenden Verfahren wie z. B. die Verwendung von internen- oder externen Straffunktionen (Schumacher 2020).

Zum Auffinden des Optimums Ω_{opt} wird Gleichung 3-36 über mehrere Iterationen minimiert. Für deren Formableitung gilt formal in der k -ten Iteration in Richtung des Verschiebungsfeldes $\boldsymbol{\theta}$

$$\mathcal{L}'(\Omega^k, \lambda^k, \Lambda^k) \boldsymbol{\theta} = J'(\Omega^k) \boldsymbol{\theta} + \sum_{i=1}^n \left(\lambda_i^k + \frac{1}{\Lambda_i^k} R_i(\Omega^k) \right) R_i'(\Omega^k) \boldsymbol{\theta}. \quad (3-37)$$

Der darin enthaltene Klammerausdruck wird zur Verbesserung der Lagrange-Multiplikatoren verwendet. Zu Beginn der Optimierung können diese als $\lambda_i^0 = 0$ gewählt werden. Für die verbesserten Werte zur Iteration $k + 1$ gilt

$$\lambda_i^{k+1} = \lambda_i^k + \frac{1}{\Lambda_i^k} R_i(\Omega^k). \quad (3-38)$$

Sobald die Restriktionen $R_i(\Omega) = 0$ erfüllt werden, sind die optimalen Lagrange-Multiplikatoren gefunden. Zur Erhöhung der Konvergenzgeschwindigkeit kann das Maß der Bestrafung im Verlaufe der Optimierung erhöht werden. Dies entspricht in der gewählten Formulierung einer Verkleinerung der Strafparameter mit dem sogenannten Verstärkungsfaktor α

$$\Lambda_i^{k+1} = \alpha \Lambda_i^k \quad \text{mit } 0 < \alpha < 1. \quad (3-39)$$

Das Maß der Bestrafung darf zu Beginn der Optimierung nicht zu groß gewählt werden, da sonst Restriktionsverletzungen zu stark bestraft werden und dies wiederum zur Ausbildung schwacher lokaler Minima führen kann.

3.4.2 Wahl der Entwicklungsgeschwindigkeit

Zum Erreichen des Optimierungsziels muss die Entwicklungsgeschwindigkeit der strukturbeschreibenden Level-Set-Funktion auf die Lösung der Optimierungsaufgabe ausgerichtet werden. Eine geeignete Entwicklungsgeschwindigkeit kann mithilfe der erweiterten Lagrange-Funktion $\mathcal{L}(\Omega)$ gewonnen werden. Nach Allaire et al. (2004) wird dazu die Definition der Formableitung aus Gleichung 3–8 in eine Bedingung für die Randverschiebung überführt. Die über den Parameter t skalierte Verschiebung $\boldsymbol{\theta}$ muss so gewählt werden, dass folgende Beziehung erfüllt wird:

$$\mathcal{L}(\Omega_t) = \mathcal{L}(\Omega) + t\mathcal{L}'(\Omega)\boldsymbol{\theta} + \mathcal{O}(t) < \mathcal{L}(\Omega) \quad \text{mit} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathcal{O}(t)}{t} = 0. \quad (3-40)$$

Darin bezeichnet $\mathcal{O}(t)$ den Fehler in der linearen Approximation. Wenn es gelingt, die Formableitung der Lagrange-Funktion in Abhängigkeit einer normal zum Rand orientierten Verschiebung auszudrücken

$$\mathcal{L}'(\Omega)\boldsymbol{\theta} = \int_{\Gamma} \omega \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n} d\Gamma, \quad (3-41)$$

(siehe auch Gleichung 3–13) kann das gesuchte Geschwindigkeitsfeld durch die Methode des steilsten Abstiegs bestimmt werden. In diesem Fall wird das Verschiebungsfeld als $\boldsymbol{\theta} = -\omega \mathbf{n}$ definiert. Dies gewährleistet, dass die oben formulierte Bedingung erfüllt wird

$$\mathcal{L}(\Omega_t) = \mathcal{L}(\Omega) - t \int_{\Gamma} \omega^2 d\Gamma + \mathcal{O}(t) < \mathcal{L}(\Omega). \quad (3-42)$$

Die Entwicklungsgeschwindigkeit der Level-Set-Funktion setzt normal zum Rand orientierte Geschwindigkeitskomponenten voraus. Von daher werden für diese die Normalkomponenten des zuvor gewählten Verschiebungsfelds verwendet

$$v_n = \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n} = -\omega \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = -\omega. \quad (3-43)$$

3.4.3 Konvergenzkriterium

Um während der Optimierung zu entscheiden, wann die Optimierung ihr Ziel erreicht hat und beendet werden soll, wird ein Konvergenzkriterium definiert. In dieser Arbeit geschieht dies, wenn die Änderung der Zielfunktion $J(\Omega)$ in zwei aufeinanderfolgenden Iterationen k unter einem vordefinierten Schwellwert ε_{konv} bleibt und gleichzeitig alle Restriktionen erfüllt sind

$$\left| \frac{J(\Omega)^k - J(\Omega)^{k-1}}{J(\Omega)^k} \right| < \varepsilon_{konv}. \quad (3-44)$$

Es sind alternative Definitionen für Konvergenzkriterien möglich. Weitere werden z. B. von Dienemann (2018) oder Harzheim (2008) aufgelistet.

3.5 Optimierungsablauf

In der von Allaire et al. (2004) eingeführten Topologieoptimierung mit der Level-Set-Methode wird in der numerischen Umsetzung der in Abbildung 3–10 gezeigte Ablauf verfolgt. Die Darstellung des Optimierungsablaufs orientiert sich an Dienemann (2018). Im weiteren Verlauf wird diese Variante auch als klassische Level-Set-Optimierung bezeichnet.

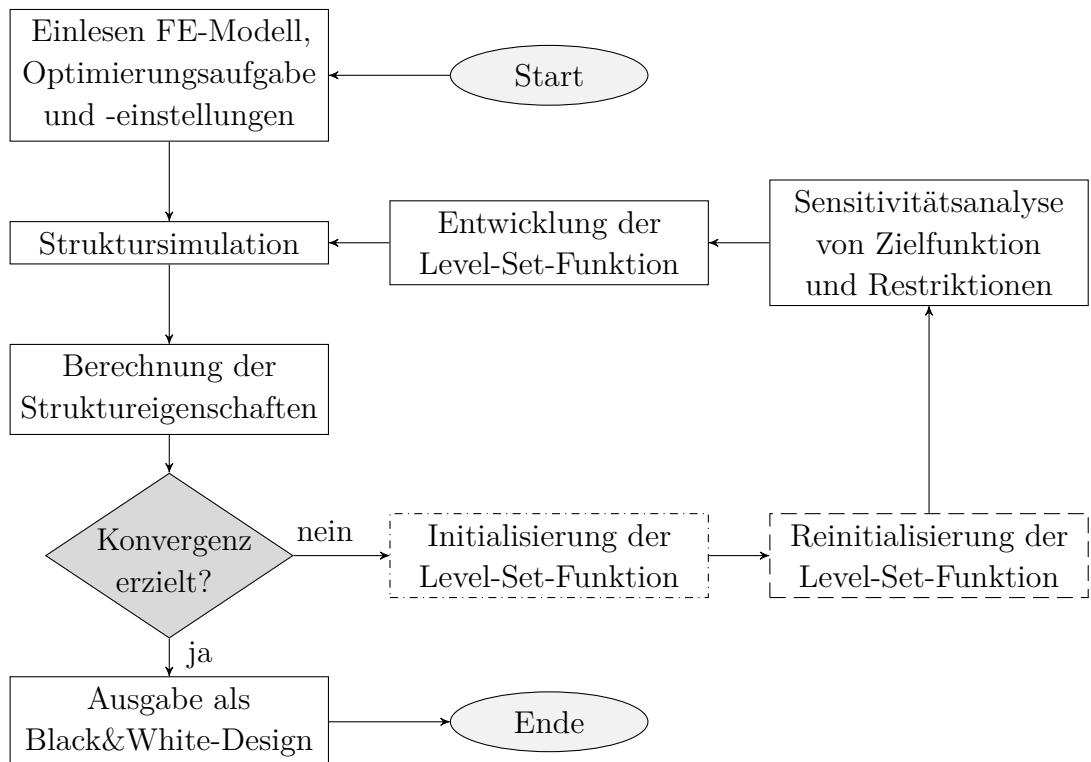


Abbildung 3–10: Klassischer Ablauf der Topologieoptimierung mit der Level-Set-Methode

----: nur in erster Iteration, --: nur in jeder k_R -ten Iteration $k_R \in \mathbb{N}$

Die Optimierung beginnt mit dem Einlesen der Optimierungsaufgabe, dazugehörigen Einstellungen sowie eines Finite-Elemente-Modells (FE-Modell). Zu den Einstellungen gehören z. B. die Wahl eines Konvergenzkriteriums oder die Definition der Strafparameter zu Optimierungsbeginn. Als Diskretisierung wählen Allaire et al. (2004) ein strukturiertes Netz. Ähnlich wie bei der Dicthenmethode erhalten in der Struktur liegende Elemente eine normierte Dichte von eins und außerhalb der Struktur liegende Elemente eine Dichte von null (zur Vermeidung singulärer Steifigkeitsmatrizen wird statt null ein Wert von $\tilde{x} = 10^{-3}$ genutzt). Anschließend wird eine Struktursimulation durchgeführt, um das mechanische

Verschiebungsfeld und daraufhin die Struktureigenschaften zu bestimmen. Dazu zählen im Falle des gewählten Optimierungsproblems die mittlere Nachgiebigkeit und das Volumen der Struktur. Ist das Konvergenzkriterium nicht erfüllt, wird in der ersten Iteration eine Level-Set-Funktion initialisiert. Diese wird später nach jeder k_R -ten Iteration reinitialisiert. Daraufhin werden die Sensitivitäten der Zielfunktion sowie der Restriktionen berechnet. Das resultierende Geschwindigkeitsfeld wird zur Entwicklung der Level-Set-Funktion benutzt. Die Entwicklung nach Kapitel 3.3.3 wird über n_{LS} Iterationen bzw. *Entwicklungsschritte* durchgeführt. Die Anzahl der Entwicklungsschritte ist problemabhängig. Ist diese zu klein, konvergiert die Optimierung langsam in einem schwachen lokalen Minimum. Werden zu viele Entwicklungsschritte gewählt, ändert sich das Design sehr schnell. Dabei können geometrische Details verloren gehen. Die Optimierung konvergiert in einem schwachen lokalen Minimum oder kann vollständig abbrechen (Challis 2010). Nach der Strukturentwicklung wird mit der veränderten Struktur eine erneute Struktursimulation durchgeführt. Sobald das Konvergenzkriterium erfüllt ist, liegt die optimierte Struktur als Black&White Design vor. Strukturbefahnte Bereiche sind darin schwarz dargestellt.

Im Rahmen dieser Arbeit wird ein von der klassischen Level-Set-Optimierung abweichender Ablauf eingesetzt. Dies liegt darin begründet, dass in der numerischen Umsetzung eine unstrukturierte Diskretisierung in Form von Tetraedernetzen gewählt wird. Ein Vorteil davon ist, dass durch adaptive Vernetzungstechniken auch Details komplexer Strukturen vergleichsweise genau vernetzt werden können. Als Nachteil ist der dadurch erhöhte Rechenaufwand festzuhalten. Wie in Abbildung 3–11 gezeigt, verändert sich dabei der Optimierungsablauf.

Angelehnt an die Forschungsarbeit von Allaire et al. (2013) wird nach jeder Iteration eine Neuvernetzung entlang des verschobenen Strukturrandes durchgeführt. Dabei werden die neuen Randknoten exakt auf das aktuelle Nullniveau der Level-Set-Funktion positioniert. Dazu wird auf jeder Tetraederkante, die das Nullniveau schneidet, eine neue Randknotenposition bestimmt. Der anliegende Netzbereich wird anschließend entlang dieser Randknoten neu vernetzt. Daraus resultiert ein Netz, das in zwei Bereiche unterteilt werden kann. Ein Bereich repräsentiert das Strukturnetz und der andere das Designraumnetz. Während die Entwicklung der Level-Set-Funktion auf dem gesamten Netz erfolgt, wird die Struktursimulation lediglich auf dem Strukturnetz durchgeführt. Aufgrund der Neuvernetzungen muss die Level-Set-Funktion in jeder Iteration reinitialisiert werden. Sobald das Konvergenzkriterium erreicht ist, liegt die optimierte Struktur in Form eines Tetraedernetzes vor.

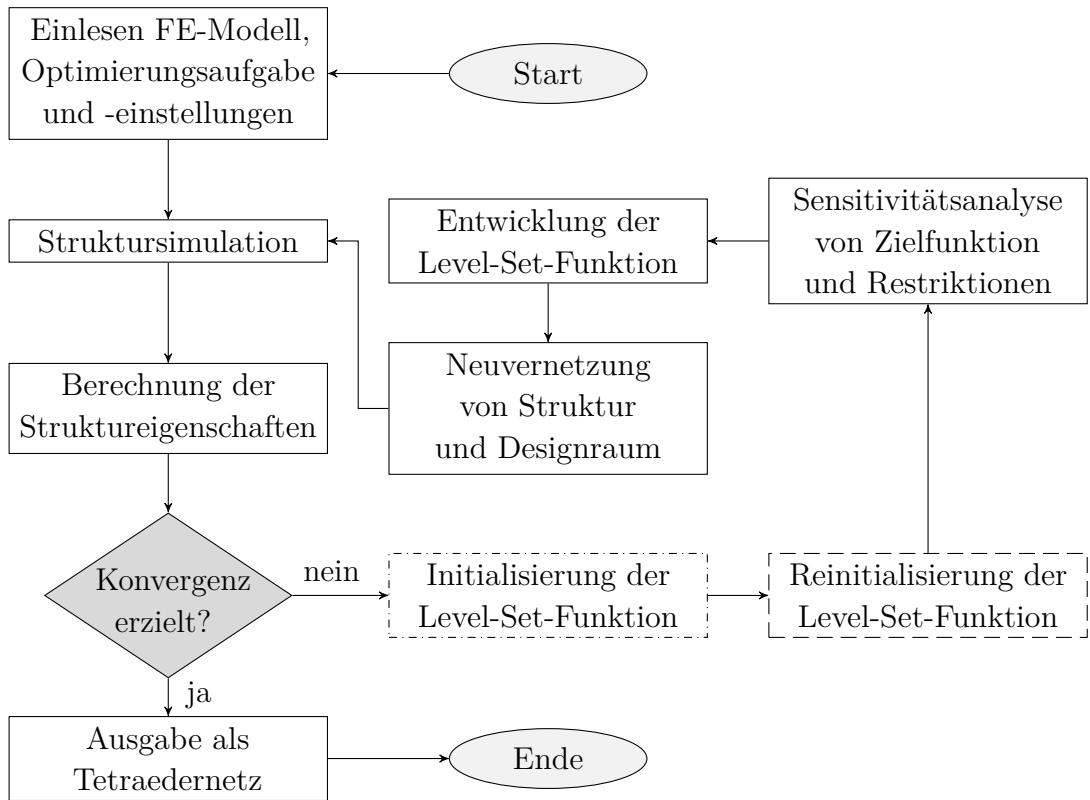


Abbildung 3–11: Topologieoptimierung mit der Level-Set-Methode bei Verwendung adaptiver unstrukturierter Netze
 ----: nur in erster Iteration, --: ab der zweiten Iteration

3.6 Optimierungsbeispiele

Als Abschluss dieses Kapitels wird das Optimierungsverfahren an zwei numerischen Beispielen demonstriert. In beiden Beispielen wird das Optimierungsproblem 3–6 gelöst. Aus Gründen der Vergleichbarkeit der numerischen Optimierungsergebnisse wird die mittlere Nachgiebigkeit normiert. Ist der Entwurfsraum vollständig mit Strukturmateriale ausgefüllt, nimmt die normierte mittlere Nachgiebigkeit den Wert $C_N = 1000$ an. Alle verwendeten Optimierungsparameter sind in Tabelle 3–1 aufgelistet. Wie in Abschnitt 3.4.1 erläutert, können die Lagrange-Multiplikatoren zu Beginn der Optimierung zu null gesetzt werden. In beiden hier gezeigten Beispielen wird jedoch von dieser Strategie abgewichen. Die in der Tabelle aufgeführten Startwerte basieren auf Erfahrungswerten in der Lösung der jeweiligen Optimierungsaufgabe und befinden sich bereits näher an ihren optimalen Werten. Falls die optimalen Werte der Lagrange-Multiplikatoren durch eine vorherige Optimierung bekannt sind, garantiert deren Wahl als Startwert jedoch nicht, dass sich die Anzahl benötigter Iterationen reduziert. Dies ist auch davon abhängig, wie

viele Entwicklungsschritte der Level-Set-Funktion vor einer erneuten FE-Analyse durchgeführt werden. Die FE-Rechnungen werden mit dem Solver OptiStruct® der Firma Altair durchgeführt. Für die Vernetzungen wird die ebenfalls von Altair entwickelte Software HyperMesh® verwendet. Zur automatisierten Umsetzung der in Kapitel 3.5 erläuterten Vernetzungsstrategie wird ein selbst entwickeltes Tcl-Skript genutzt. Das eigentliche Optimierungsverfahren wird in eigens entwickelten Python-Programmen umgesetzt.

Parameter	Symbol	Beispiel 3.6.1	Beispiel 3.6.2
Elastizitätsmodul	E	1 N/mm ²	1 N/mm ²
Poisson-Zahl	ν	0.3	0.3
Konvergenz-Schwellwert	ε_{konv}	0.001	0.001
Lagrange-Multiplikator	λ^0	0.1	0.025
Strafparameter	Λ^0	1000	1000
Verstärkungsfaktor	α	0.9	0.92
Entwicklungsschritte	n_{LS}	40	40
CFL-Zahl	CFL	0.3	0.3

Tabelle 3–1: Verwendete Optimierungs- und Simulationsparameter. Die angegebenen Parameter des Lagrange-Verfahrens sind die Werte zu Beginn der Optimierung

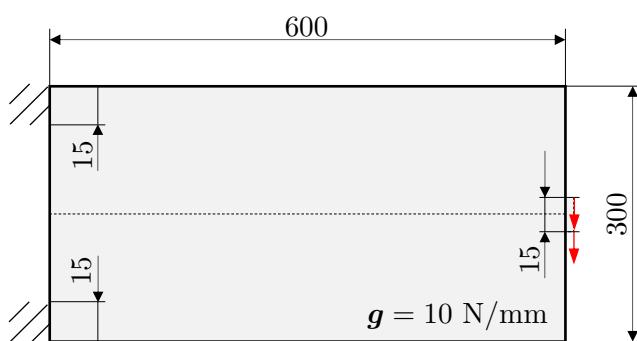


Abbildung 3–12: Startentwurf eines zu optimierenden zweidimensionalen Kragträgers. Alle Maße sind in mm angegeben

3.6.1 Zweidimensionaler Kragträger

Zunächst wird der in Abbildung 3–12 dargestellte zweidimensionale Kragträger optimiert. Dieser besitzt eine Breite von 600 mm und eine Höhe von 300 mm. Die äußeren Abmessungen des Kragträgers sind gleichzeitig die Maße des rechteckigen Designraums. An den schraffierten Stellen ist der Träger fest fixiert. Als Belastung wird entlang der auf der rechten Seite markierten Strecke von 15 mm eine Last von 10 N/mm aufgebracht. Die Minimierung der mittleren Nachgiebigkeit erfolgt unter der Restriktion, einen Volumenfüllgrad von $V_F = 0.3$ zu erreichen.

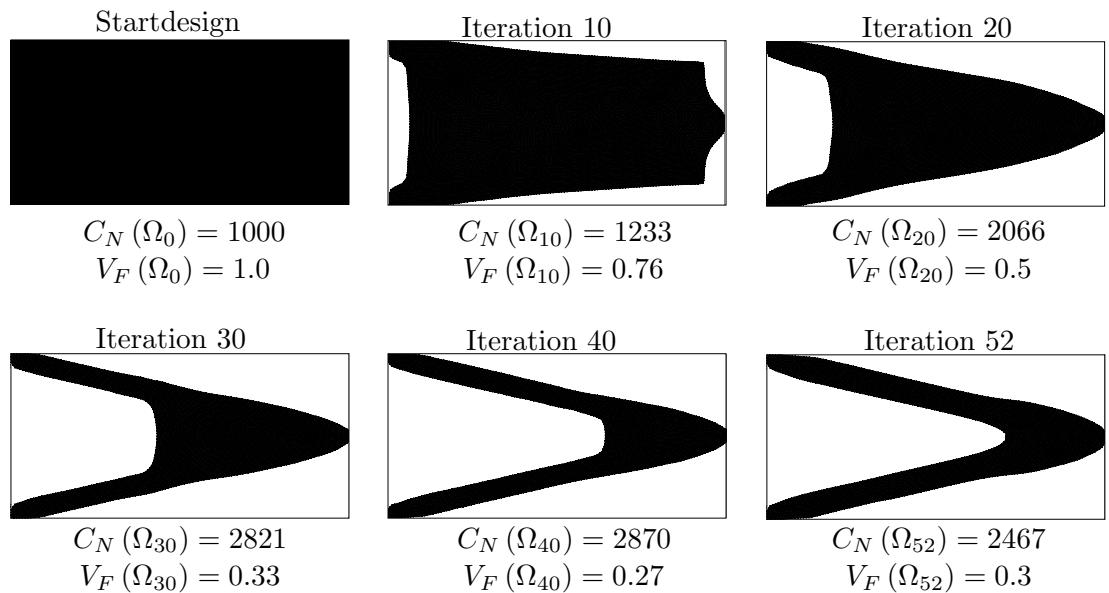


Abbildung 3–13: Verlauf der Topologieoptimierung des zweidimensionalen Kragträgers. Gezeigt ist die Struktur zu sechs exemplarischen Iterationen

Die Optimierung konvergiert nach insgesamt 52 Iteration. Das ermittelte Optimum weist eine normierte mittlere Nachgiebigkeit von $C_N = 2467$ auf. In Abbildung 3–13 ist ein Auszug aus der Optimierungshistorie zu sechs verschiedenen Iterationen gezeigt. Darin ist zu erkennen, dass sich die Form der Struktur im Verlauf der Optimierung einem Stabzweischlag annähert. Dadurch wird die Biegebeanspruchung der Struktur minimiert und weitestgehend in Zug- und Druckbeanspruchung überführt. Bei Zug- und Druckbelastung nimmt eine Struktur weniger Formänderungsenergie als bei vergleichbarer Biegebelastung auf. Dies führt wiederum zu einer reduzierten mittleren Nachgiebigkeit. Michell (1904) nutzt dieses mechanische Verhalten zur Entwicklung der Michell-Strukturen.

Mit der vorgestellten Verfahrensvariante können keine Löcher zwischen den Strukturelementen erzeugt werden. Topologieänderungen sind zwar möglich, jedoch nur durch die Verschmelzung von Strukturgrenzen. In einem solchen Fall trifft das

Nullniveau der Level-Set-Funktion beider Grenzbereiche lokal aufeinander. Um jedoch inmitten von Strukturmaterial Löcher zu erzeugen, müsste die Level-Set-Funktion lokal ansteigen können. Die systematische Erzeugung von Löchern kann das Optimierungsergebnis deutlich verbessern. Allaire et al. (2004) schlagen deshalb verschiedene Methoden zu deren Erzeugung vor. Eine Möglichkeit ist, bereits den Startentwurf mit Löchern zu versehen. Außerdem ist die Nutzung systematischer Kriterien zur Lochpositionierung in Form von Topologieableitungen (Garreau et al. 2001) oder der Bubble-Methode (Eschenauer et al. 1994) denkbar. Welchen Einfluss die Locherzeugung auf das vorliegende Beispiel hat, ist in Abbildung 3-14 zu sehen. Hier wurde der Startentwurf mit Löchern versehen. Dieser besitzt daher zu Beginn der Optimierung eine normierte mittlere Nachgiebigkeit von $C_N = 1578$. Die mit diesem Startentwurf durchgeführte Optimierung konvergiert nach 54 Iterationen. Im gefundenen Optimum weist die Struktur eine normierte mittlere Nachgiebigkeit von $C_N = 2134$ auf. Dies ist damit das beste erzielte Design dieses Beispiels.

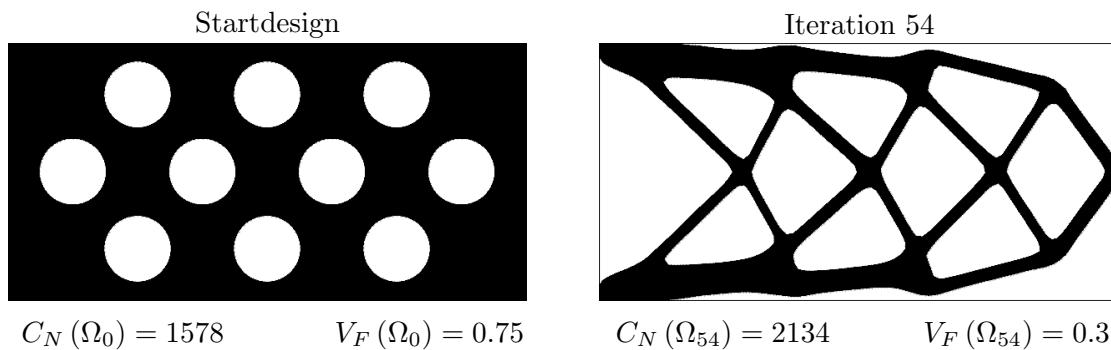


Abbildung 3-14: Topologieoptimierung des zweidimensionalen Kragträgers mit der Vorgabe von Löchern im Startentwurf

3.6.2 Dreidimensionaler Kragträger

Als zweites Beispiel wird die Topologieoptimierung des in Abbildung 3-15 gezeigten dreidimensionalen Kragträgers demonstriert. Dieser besitzt eine Breite von 900 mm, eine Höhe von 300 mm sowie eine Tiefe von 300 mm. Auch in diesem Beispiel markieren die äußeren Maße des Trägers die Grenzen des quaderförmigen Designraums. Der Kragträger ist an den vier schraffierten quadratischen Flächen fest fixiert. Auf der Vorderseite wird eine Flächenlast von 0.1 N/mm^2 über die markierte quadratische Fläche aufgebracht. Im vorherigen Beispiel wurde gezeigt, dass die Vorgabe von Löchern im Startdesign zu besseren Optimierungsergebnissen

führen kann. Von daher wird das Startdesign mit den in Abbildung 3–15 (rechts) gezeigten, symmetrisch entlang der Längsachse verteilten kugelförmigen Aussparungen versehen. Diese besitzen einen Durchmesser von 100 mm und führen dazu, dass der Startentwurf eine normierte mittlere Nachgiebigkeit von $C_N = 1019$ aufweist. Die Minimierung der mittleren Nachgiebigkeit erfolgt unter der Restriktion, einen Volumenfüllgrad von $V_F = 0.15$ zu erreichen.

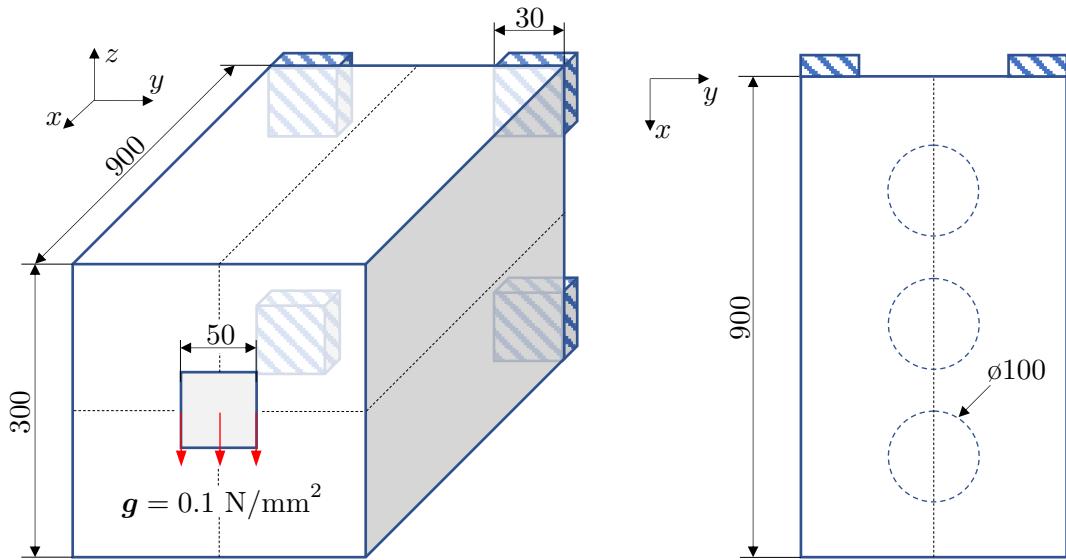


Abbildung 3–15: Startentwurf eines zu optimierenden dreidimensionalen Kragträgers.
Alle Maße sind in mm angegeben

In Abbildung 3–16 ist die Entwicklung der Struktur zu sechs exemplarischen Iterationen gezeigt. Außerdem sind die Verläufe der Zielfunktion und der Volumenrestriktion während der Optimierung abgebildet. Die Optimierung konvergiert nach 79 Iterationen. Im gefundenen Optimum besitzt die Struktur eine normierte mittlere Nachgiebigkeit von $C_N = 3049$. In diesem Beispiel wird deutlich, wie Topologieänderungen mithilfe der Level-Set-Methode vollzogen werden. Ersichtlich ist dies z. B. in Iteration 22. Dort verschmelzen die äußeren mit den inneren Strukturgrenzen. Letztere Grenzen stammen von den kugelförmigen Aussparungen im Startdesign. Das Zusammentreffen des Nullniveaus der Level-Set-Funktion kann auch zum Abtrennen von Material führen. Dieser Effekt ist in Iteration 29 zu sehen. Wird die Restriktion um weniger als 5 % verletzt, wird die Diskretisierung um 25 % erhöht bzw. die Elementgröße um 25 % reduziert. Dadurch ist die Oberfläche der Struktur in der letzten Iteration deutlich glatter als in Iteration 45. In dreidimensionalen Anwendungen besteht durch die zusätzliche Raumdimension die Möglichkeit, dass Löcher auch ohne den Einsatz der zuvor beschriebenen Locherzeugungsmethoden ausgebildet werden können. Werden beispielsweise im

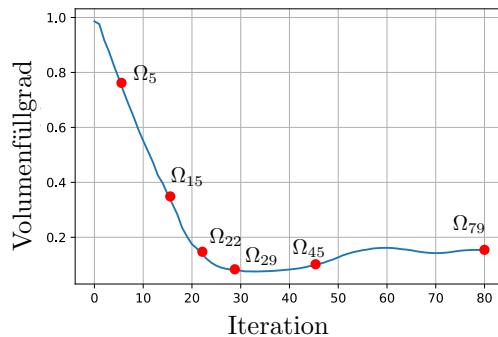
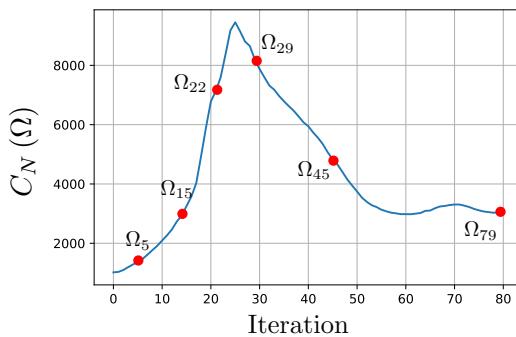
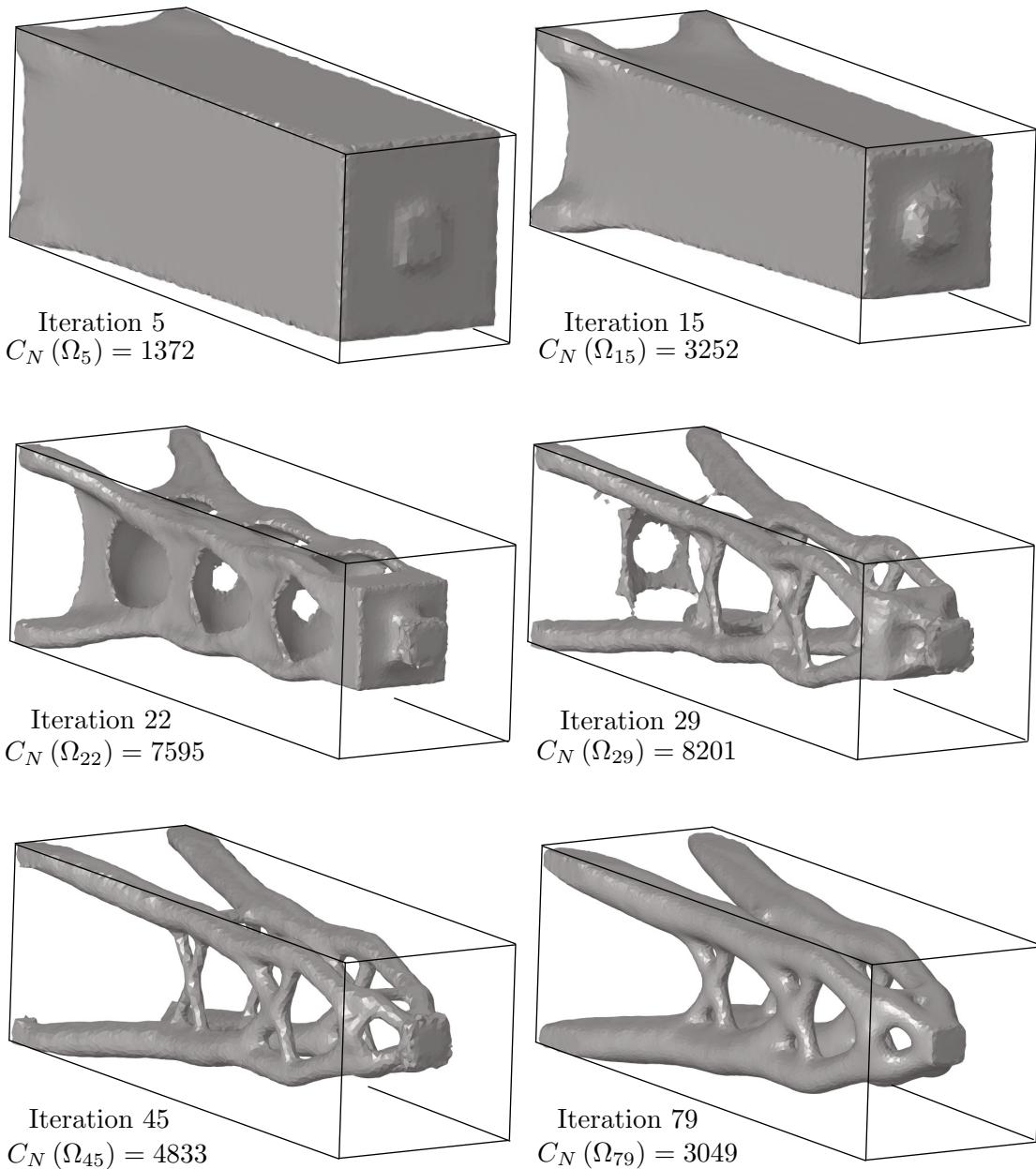


Abbildung 3–16: Topologieoptimierung des dreidimensionalen Kragträgers. Gezeigt ist die Entwicklung der Struktur zu sechs exemplarischen Iterationen

Startentwurf des Kragträgers keine Aussparungen vorgegeben, würde der in Iteration 22 auftretende Effekt in ähnlicher Weise zur Entstehung von Löchern führen. Eine so durchgeführte Optimierung des Kragträgers führt zu der in Abbildung 3–17 gezeigten Struktur. In diesem Beispiel zieht sich die Struktur lokal zusammen, bis es zu einem Aufeinandertreffen des Nullniveaus der Level-Set-Funktion entlang der y -Richtung kommt. Durch die Verschmelzung der Strukturränder entsteht das Loch in der Struktur. Mit einer erzielten normierten mittleren Nachgiebigkeit von $C_N = 3123$ nach insgesamt 68 Iterationen ist das resultierende Design jedoch schlechter als bei der vorherigen Optimierung. Um die Ausbildung schwacher lokaler Minima zu vermeiden, werden daher auch bei dreidimensionalen Anwendungen häufig Aussparungen im Startentwurf vorgegeben.

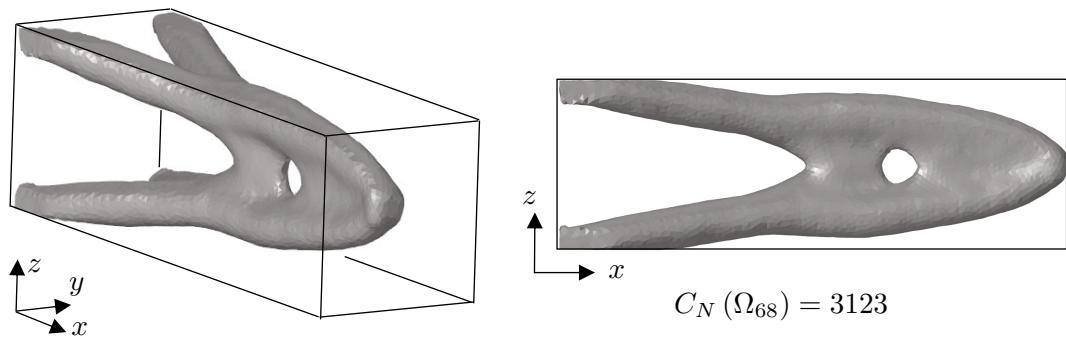


Abbildung 3–17: Topologieoptimierung des dreidimensionalen Kragträgers ohne Vorgabe von Löchern im Startentwurf

4 Integration von Fräsestriktionen in die Level-Set-Optimierung

Um die direkte Herstellbarkeit von optimierten Strukturen gewährleisten zu können, müssen Fertigungsrestriktionen in das Optimierungsverfahren integriert werden. Welchen Restriktionen Fräseverfahren unterliegen, ist bereits in Kapitel 2 beschrieben worden. Im Folgenden wird erläutert, wie diese Restriktionen in die Topologieoptimierung mit der Level-Set-Methode integriert werden können. Die hier vorgestellten Ergebnisse sind im Rahmen der Forschungsarbeiten dieser Dissertation entstanden (siehe auch Colling et al. (2024)).

4.1 Ansatz zur Erfüllung der Fertigungsrestriktionen

Als Ansatz zur Erfüllung der Zugänglichkeitsrestriktion wird in dieser Arbeit das Ziel verfolgt, während einer Optimierung in den entstehenden unzugänglichen Strukturbereichen einen ‚Wachstumsdruck‘ zu erzeugen. Dieser wird im weiteren Verlauf auf die Minimierung einer Restriktionsfunktion zurückgeführt. Mithilfe einer Sensitivitätsanalyse werden die Entwicklungsgeschwindigkeiten um die Sensitivitäten der Restriktionsfunktion erweitert. Unzugängliche Strukturbereiche können dann im Verlauf einer Optimierung entstehen, werden aber bis zu einer möglichen Konvergenz des Verfahrens vollständig eliminiert.

Zur Verdeutlichung sei an dieser Stelle erneut auf Abbildung 2–3 verwiesen. Die gezeigte Struktur wird mit dem abgebildeten Werkzeug frässbar, wenn sämtliche unzugänglichen Bereiche mit Strukturmaterial ausgefüllt werden. Das Ausfüllen dieser Bereiche soll mithilfe des induzierten Strukturwachstums geschehen. Um die gezeigte Struktur frässbar zu gestalten, ist es jedoch auch denkbar, das über den unzugänglichen Bereichen befindliche Material zu entfernen. Dies könnte durch ein induziertes Schrumpfen der Struktur in den entsprechenden Bereichen bewerkstelligt werden. Ein solcher Schrumpfungseffekt tritt jedoch auf ‚natürliche‘

Weise bei der Induktion eines Strukturwachstums bei der Lösung der Optimierungsaufgabe aus Kapitel 3.1 auf. Der Grund dafür ist, dass ein Wachstum in den unzugänglichen Bereichen zu einer Erhöhung des Strukturvolumens führt. Zur Erfüllung der Volumenrestriktion muss an anderer Stelle das Volumen wieder reduziert werden. An welchen Stellen der Struktur das Volumen verringert wird bzw. ein Schrumpfen einsetzt, geschieht dann im Sinne der Optimierungsaufgabe auf der Grundlage der vorliegenden Sensitivitäten.

Ein induziertes Strukturwachstum wird ebenfalls zur Integration der Wandstärkenrestriktion untersucht. Das Ziel ist, dünnwandige, restriktionsverletzende Bereiche zu verdicken. Dabei muss analysiert werden, in welchem Maße dadurch Topologieänderungen gehemmt werden. Da die Integration beider Fertigungsrestriktionen auf dem gleichen Ansatz beruht, werden diese im Verlauf des Kapitels in eine gemeinsame mathematische Restriktion überführt.

4.2 Erkennung von Restriktionsverletzungen

Für die Induktion des beschriebenen Strukturwachstums ist es zunächst erforderlich, die unzugänglichen Strukturbereiche zu lokalisieren. Die Detektion solcher Bereiche ist ein wesentlicher Bestandteil von CAM-Software (Computer Aided Manufacturing) und wird im Rahmen der kollisionsfreien Erzeugung von Werkzeugwegen eingesetzt (Choi 2001). In dieser Arbeit wird die Detektion der unzugänglichen Strukturbereiche ausschließlich auf FE-Netzen durchgeführt. Dazu wird im Folgenden ein Verfahren eingeführt, bei dem die Level-Set-Funktion ausgehend von Bearbeitungspunkten auf der Strukturoberfläche entlang der Außenkonturen eines Fräswerkzeugs, dessen Halterung sowie der Hauptspindel interpoliert wird. Die Vorzeichen der interpolierten Level-Set-Funktionswerte geben Aufschluss darüber, ob ein Bearbeitungspunkt zugänglich ist oder nicht. Wie die folgenden Abschnitte zeigen, können damit beliebige Werkzeuggeometrien unter vergleichsweise geringem numerischen Aufwand berücksichtigt werden. Außerdem kann das Verfahren zur Detektion dünnwandiger Strukturen eingesetzt werden. Unzugängliche und zu dünne Bereiche werden im weiteren Verlauf häufig als restriktionsverletzende Bereiche zusammengefasst.

Grundsätzlich ist für eine solche Detektion auch der Einsatz eines Raycast-Algorithmus denkbar. Auf Basis des entwickelten Interpolationsverfahrens könnte dies durch mehrere verkettete Strahlen vollzogen werden, die ausgehend von der Strukturoberfläche die Außenkontur des Fräswerkzeugs abbilden. Dabei würden für jeden Teilstrahl potenzielle Schnittpunkte mit dem FE-Netz der Struktur

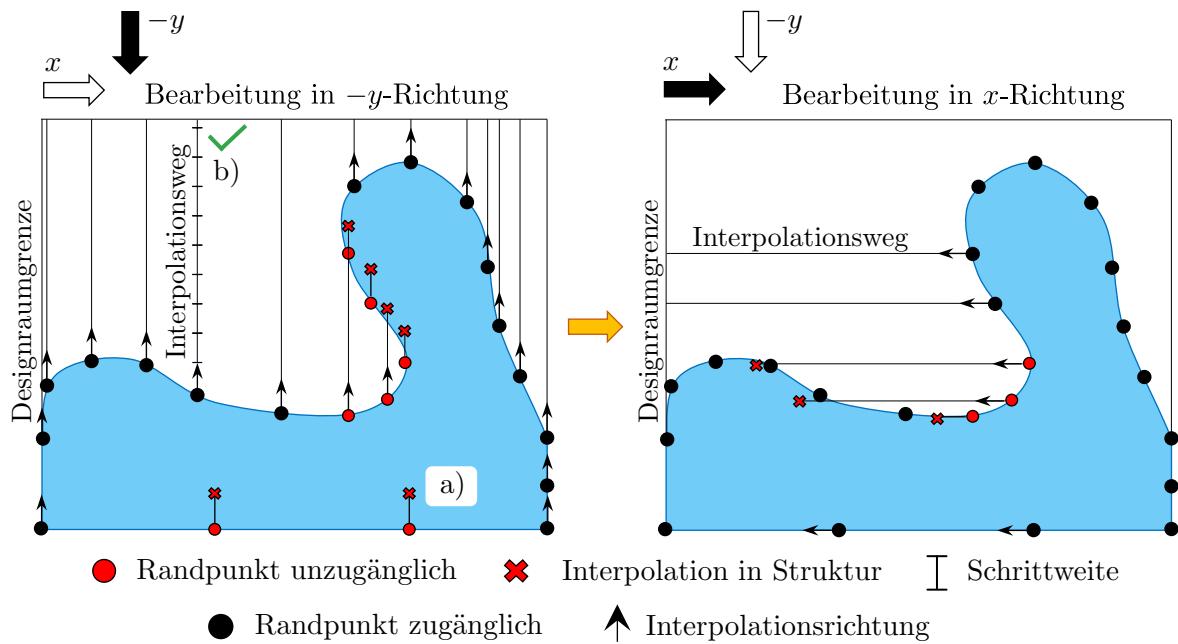


Abbildung 4-1: Identifizierung unzugänglicher Bereiche über die Interpolation der Level-Set-Funktion am Beispiel gerader Interpolationswege

bestimmt. Der numerische Aufwand zur Berechnung solcher Punkte steigt jedoch mit feiner werdender Diskretisierung stark an. Für eine effiziente Anwendung des Verfahrens sind daher vergleichsweise aufwendige Zusatzalgorithmen nötig. Zur Reduktion des numerischen Rechenaufwands könnte man z. B. das FE-Netz in mehrere volumetrische Abschnitte unterteilen und vorab überprüfen, welche Abschnitte ein betrachteter Strahl schneidet.

4.2.1 Werkzeugzugänglichkeit

Das im Folgenden eingeführte Verfahren zur Überprüfung der Werkzeugzugänglichkeit wird separat für jede nutzbare Bearbeitungsrichtung durchgeführt. Zur Veranschaulichung dient Abbildung 4-1. Darin ist eine mechanische Struktur dargestellt, die aus zwei Bearbeitungsrichtungen gefertigt werden soll. Dazu zählen einerseits die $-y$ -Richtung (links) und anderseits die x -Richtung (rechts). Zunächst werden *Interpolationswege* definiert. Diese verlaufen von den Randpunkten der Struktur entgegen der Bearbeitungsrichtung bis zur Designraumgrenze. Auf jedem der Wege wird eine *Interpolationsrichtung* vorgegeben. Für diese wird die negative Bearbeitungsrichtung gewählt. Anschließend wird entlang der Interpolationswege in diskreten Schrittweiten die Level-Set-Funktion interpoliert. Gemäß Gleichung 3-18 sind dabei die folgenden Fälle zu unterscheiden: Tritt am

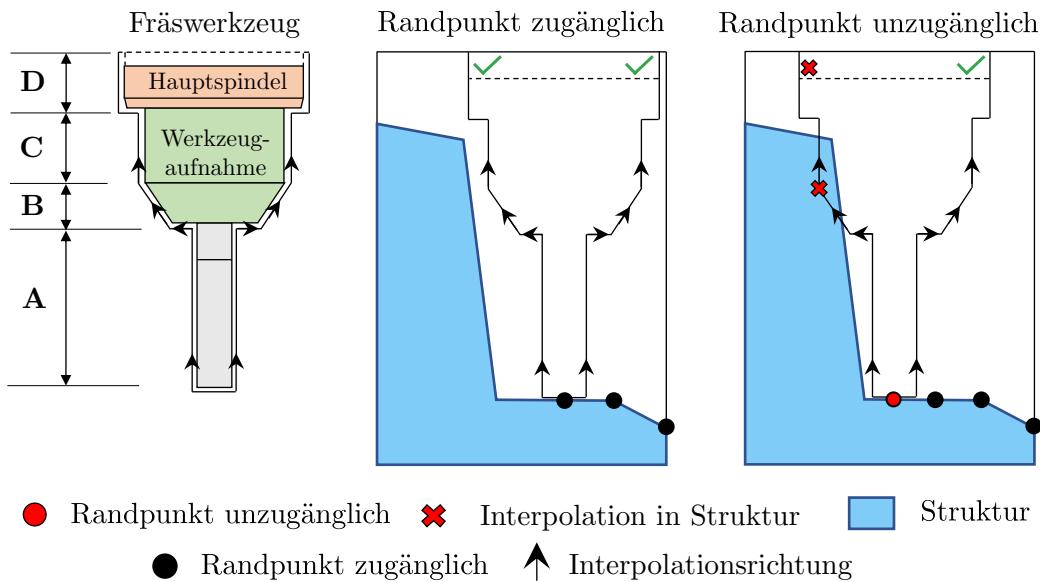


Abbildung 4-2: Anpassung des Interpolationsweges an die Geometrie von Werkzeug, Werkzeughalterung und Hauptspindel (links). Bei einer Kollision (rechts) wird der Randpunkt als unzugänglich markiert

Interpolationspunkt ein negativer Wert auf – d. h. die Interpolation erfolgte in der Struktur – ist der zugrunde liegende Randpunkt aus der aktuellen Bearbeitungsrichtung unzugänglich. Wie am Interpolationsweg a) ersichtlich, wird dieser dann aus der weiteren Berechnung entfernt. Ein Randpunkt ist aus der aktuellen Bearbeitungsrichtung zugänglich, falls auf seinem Interpolationsweg kein negativer Wert auftritt. Einen solchen Fall repräsentiert z. B. der Interpolationsweg b). Sobald eine Interpolation außerhalb des Designraums stattfindet, wird der dazugehörige Randpunkt als zugänglich markiert. Das Verfahren ist für die aktuelle Bearbeitungsrichtung abgeschlossen, sobald alle Randpunkte entweder als zugänglich oder unzugänglich markiert sind. Falls zuvor Randpunkte als unzugänglich erkannt wurden, wird das Verfahren mit der nächsten verfügbaren Bearbeitungsrichtung wiederholt (siehe Abbildung 4-1, rechts). Dazu werden jedoch nur noch die bis dahin unzugänglichen Randpunkte betrachtet.

Zur Integration der Werkzeuggeometrie werden die Interpolationswege nun verändert. Anstatt einzelner gerader Linien werden zur Interpolation die Außenkonturen eines Fräswerkzeugs, seiner Halterung und der Hauptspindel gewählt. Die an jedem Randpunkt neu entstehenden Interpolationswege sind in Abbildung 4-2 (links) gezeigt. Zur vollständigen Abbildung der Außenkonturen werden pro Randpunkt zwei Interpolationswege verwendet. Bei dreidimensionalen Anwendungen werden vier symmetrisch um den Umfang verteilte Wege eingesetzt. Die in der Abbildung gezeigten Werkzeugbereiche werden für den weiteren Verlauf in die folgenden vier

Bereiche unterteilt:

- **Bereich A:** Interpolation von der Unterseite des Fräswerkzeugs bis zur Unterseite der Werkzeughalterung.
- **Bereich B:** Interpolation entlang der breiter werdenden Werkzeughalterung.
- **Bereich C:** Interpolation entlang des Außendurchmessers der Werkzeughalterung.
- **Bereich D:** Interpolation entlang der Außenverkleidung der Hauptspindel und des zugelassenen Verfahrwegs in axialer Richtung.

Damit ein Randpunkt als zugänglich markiert wird, müssen alle Interpolationswege in den Bereichen A-D kollisionsfrei die Designraumgrenze erreichen (Abbildung 4-2, mittig). Kollidiert einer der Wege mit der Struktur, wird der Randpunkt als unzugänglich markiert (Abbildung 4-2, rechts). Im Bereich D wird die Außenverkleidung der axial beweglichen Hauptspindel modelliert. Diese wurde in keiner Arbeit der in Abschnitt 2.4 aufgeführten Forschungshistorie berücksichtigt. Es kann jedoch bei sehr sperrigen Strukturen zu Kollisionen zwischen der Hauptspindel und der Struktur kommen. Gleichzeitig wird in Bereich D ein maximal zulässiger axialer Verfahrweg der Hauptspindel definiert. Dadurch kann beispielsweise die Einhaltung einer restlichen Materialschicht zum Maschinentisch berücksichtigt werden. Liegt die Oberkante der modellierten Hauptspindel im Designraum und ist deren Abstand zur Designraumgrenze größer als der zulässige Verfahrweg, wird der Randpunkt als unzugänglich markiert.

4.2.2 Dünnwandige Strukturbereiche

Als Definition der Wandstärken wird die von Allaire et al. (2016) verwendete Formulierung genutzt. Das Prinzip ist in Abbildung 4-3 gezeigt. An dieser Stelle sei noch einmal darauf hingewiesen, dass durch die Level-Set-Funktion die nach außen orientierten Normaleneinheitsvektoren des Strukturrandes bekannt sind (siehe Gleichung 3-22). Ausgehend von jedem Randpunkt werden Geraden eingeführt, die in Richtung der negativen Normaleneinheitsvektoren bis zu ihren Schnittpunkten mit dem Strukturrand oder der Designraumgrenze gezogen werden. Die jeweilige Länge der Geraden wird als Maß der vorliegenden Wandstärke gewählt.

Um nun Bereiche zu identifizieren, an denen zu dünne Wandstärken vorliegen, wird ebenfalls eine Interpolation der Level-Set-Funktion an spezifischen Punkten vollführt. In Abbildung 4-4 ist die Funktionsweise dargestellt. Die Koordinaten

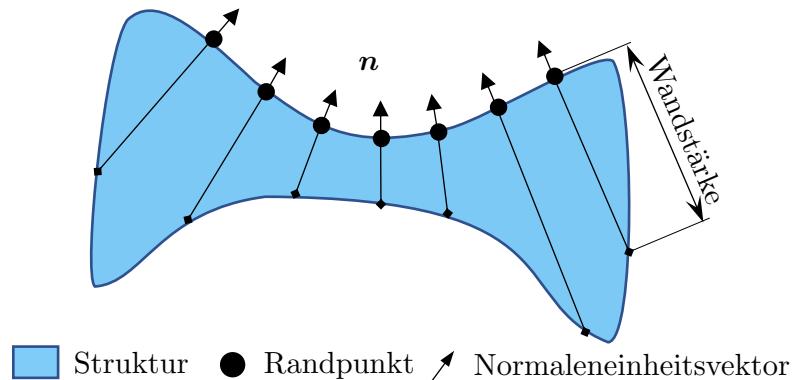


Abbildung 4–3: Definition der Wandstärke an den Randpunkten mithilfe von Geraden orientiert in negativer Richtung ihrer Normaleneinheitsvektoren

der Interpolationspunkte ergeben sich ausgehend von den betrachteten Randpunkten aus den negativen Normaleneinheitsvektoren, multipliziert mit einer Mindestwandstärke w_{min} . Ist der interpolierte Wert der Level-Set-Funktion größer als null, liegt der Interpolationspunkt außerhalb der Struktur. Dies bedeutet, dass die dem Randpunkt zugeordnete Wandstärke zu gering ist. Ein negativer Funktionswert lässt wiederum auf eine ausreichende Wandstärke schließen. Aus Gründen der Übersichtlichkeit ist das Verfahren in Abbildung 4–4 in zwei Schritte unterteilt. In seiner numerischen Umsetzung wird dieses in einem gemeinsamen Schritt ausgeführt.

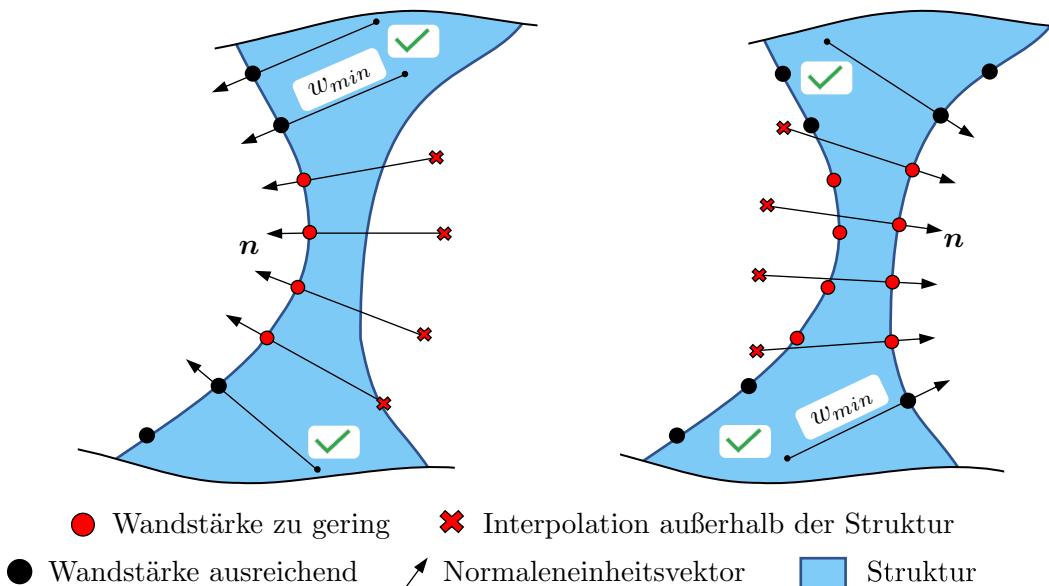


Abbildung 4–4: Identifikation zu dünner Strukturbereiche. Zur Übersichtlichkeit ist die in einem Schritt stattfindende Interpolation in zwei Grafiken gezeigt

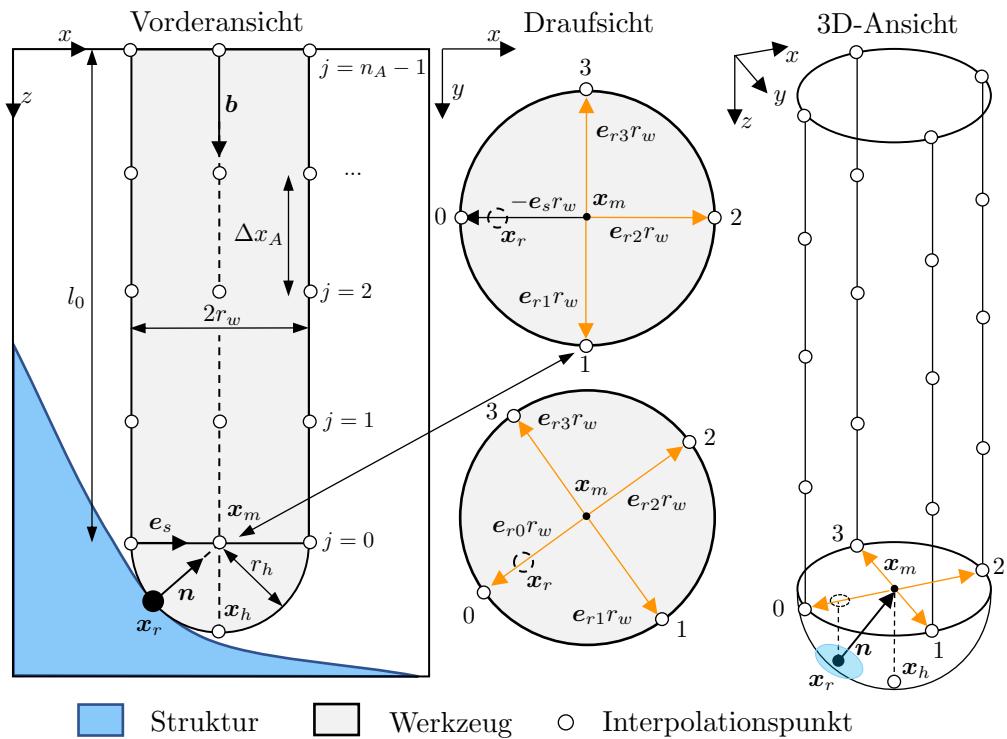


Abbildung 4-5: Verteilung der Interpolationspunkte im Bereich A

4.2.3 Definition der Interpolationswege

In diesem Kapitel wird erläutert, wie die zuvor eingeführten Interpolationswege in den Bereichen A, B, C und D mathematisch beschrieben werden. Die Formulierung der Interpolationswege erfolgt allgemein für den dreidimensionalen Anwendungsfall. Es wird vorausgesetzt, dass eine Bearbeitungsrichtung parallel zu einer Koordinatenachse orientiert ist. Eine Bearbeitungsrichtung wird im weiteren Verlauf als ein in die jeweilige Richtung zeigender Einheitsvektor \mathbf{b} beschrieben.

Bereich A

In Abbildung 4-5 ist dargestellt, wie die Interpolationswege im Bereich A verlaufen. Dazu ist auf der linken Seite ein Fräswerkzeug abgebildet, mit dessen Hilfe ein Randpunkt an den Koordinaten x_r bearbeitet wird. Auf dem Fräswerkzeug sind Interpolationspunkte gekennzeichnet, die in n_A Interpolationsschritten durchlaufen werden. In der mittig oben gezeigten Draufsicht ist zu erkennen, dass die vier Interpolationswege symmetrisch über den Umfang verteilt sind. Jeder der vier Wege besitzt einen Startpunkt. Die Positionen der vier Startpunkte 0-3 sind abhängig von der Orientierung des Strukturrandes am Bearbeitungspunkt. Die

dortige Flächenorientierung wird durch den Normaleneinheitsvektor \mathbf{n} erfasst. Zur Berechnung der unbekannten Startpunkte wird der Normaleneinheitsvektor auf die Unterseite des zylindrischen Teils des Fräswerkzeugs abgebildet. Der resultierende Vektor wird daraufhin auf eins normiert. Für eine vorgegebene Bearbeitungsrichtung ergibt sich der beschriebene Einheitsvektor \mathbf{e}_s dann zu

$$\mathbf{e}_s = \frac{\mathbf{n} - \zeta (\mathbf{n} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{b}}{|\mathbf{n} - \zeta (\mathbf{n} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{b}|} \quad \text{mit} \quad \zeta = 0.99. \quad (4-1)$$

In dieser Gleichung wird der Faktor ζ eingeführt, um eine Division durch null im Fall von $\mathbf{n} \cdot \mathbf{b} = 1$ oder $\mathbf{n} \cdot \mathbf{b} = -1$ zu vermeiden. Mithilfe dieses Einheitsvektors werden nun vier weitere, um jeweils 90° versetzte Einheitsvektoren \mathbf{e}_{ri} definiert. Diese sind ausgehend vom Mittelpunkt der zylindrischen Unterseite des Fräswerkzeugs in Richtung eines Startpunktes orientiert. Dazu wird der Einheitsvektor \mathbf{e}_s mithilfe einer Drehmatrix \mathbf{R}_b um die aktuelle Bearbeitungsrichtung rotiert. Die verwendeten Drehmatrizen sind im Anhang C zu finden. Auf der mittig unten gezeigten Draufsicht in Abbildung 4–5 sind die vier entstehenden Vektoren zu sehen. Die gewählte Darstellung gilt für eine allgemein orientierte Fläche. Berücksichtigt man nun, dass einerseits $\mathbf{e}_{r0} = -\mathbf{e}_s$ und anderseits $\mathbf{e}_{r2} = \mathbf{e}_s$ gilt, können die Koordinaten der vier Startpunkte berechnet werden. Zunächst werden jedoch die Koordinaten des Mittelpunkts der zylindrischen Unterseite des Werkzeugs \mathbf{x}_m benötigt. Diese ergeben sich aus der Beziehung

$$\mathbf{x}_m = \mathbf{x}_r + \mathbf{n} r_h. \quad (4-2)$$

Darin beschreibt r_h den Radius des Werkzeugkopfs. Der erste Interpolationspunkt liegt an der Spitze des Werkzeugkopfs und besitzt die Koordinaten \mathbf{x}_h . Formal ergeben sich diese aus

$$\mathbf{x}_h = \mathbf{x}_m + \mathbf{b} r_h. \quad (4-3)$$

Schließlich ergeben sich für die darauf folgende Interpolation entlang der vier Interpolationswege unter Zuhilfenahme des Radius des Fräswerkzeugs r_w die folgenden Startpunkte zum Interpolationsschritt $j = 0$:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{A,0}^{j=0} &= \mathbf{x}_m - \mathbf{e}_s r_w &= \mathbf{x}_m + \mathbf{e}_{r0} r_w \\ \mathbf{x}_{A,1}^{j=0} &= \mathbf{x}_m + \mathbf{R}_b \left(\frac{\pi}{2} \right) \mathbf{e}_s r_w &= \mathbf{x}_m + \mathbf{e}_{r1} r_w \\ \mathbf{x}_{A,2}^{j=0} &= \mathbf{x}_m + \mathbf{e}_s r_w &= \mathbf{x}_m + \mathbf{e}_{r2} r_w \\ \mathbf{x}_{A,3}^{j=0} &= \mathbf{x}_m - \mathbf{R}_b \left(\frac{\pi}{2} \right) \mathbf{e}_s r_w &= \mathbf{x}_m + \mathbf{e}_{r3} r_w. \end{aligned} \quad (4-4)$$

Werden die Interpolationspunkte in insgesamt n_A Schritten mit $n_A \geq 2$ um die Schrittweite Δx_A in die negative Bearbeitungsrichtung verschoben, ergeben sich die Koordinaten der i Interpolationswege zum Interpolationsschritt j zu

$$\mathbf{x}_{A,i}^j = \mathbf{x}_{A,i}^{j=0} - j\Delta x_A \mathbf{b} \quad \text{mit} \quad j = 0, 1, \dots, n_A - 1 \quad \text{und} \quad \Delta x_A = \frac{l_0}{n_A - 1}. \quad (4-5)$$

Darin beziffert l_0 die Länge der Strecke von der Unterseite des zylindrischen Teils des Fräswerkzeugs bis zur Unterseite der Werkzeughalterung.

Bereich B

Die Verteilung der Interpolationspunkte im Bereich B ist in Abbildung 4-6 dargestellt. Dazu ist eine Werkzeughalterung abgebildet, die einen kegelförmigen sowie einen zylindrischen Teil besitzt. Ersterer wird im Bereich B erfasst.

Nach dem Durchschreiten von Bereich A liegen die Interpolationspunkte gerade auf Höhe der Unterseite der Werkzeughalterung. Zu diesem Zeitpunkt liegen die Punkte noch am Umfang des Fräswerkzeugs an. Die Startpunkte des Bereichs B liegen auf dem Umfang der kreisförmigen Unterseite der Werkzeughalterung (siehe Abbildung 4-6, rechts). Aus diesem Grund werden die vier zuletzt interpolierten Punkte in die Richtungen \mathbf{e}_{ri} um den Betrag a_1 verschoben. Die i Startpunkte lauten dann

$$\mathbf{x}_{B,i}^{j=0} = \mathbf{x}_{A,i}^{j=n_A-1} + \mathbf{e}_{ri} a_1. \quad (4-6)$$

Anschließend erfolgt die Interpolation entlang des kegelförmigen Abschnitts der Werkzeughalterung. Dieser besitzt die Höhe l_1 . Der Radius der Querschnittsfläche erhöht sich von Unter- zu Oberseite um den Betrag a_2 . Bei insgesamt n_B Schritten mit $n_B \geq 2$ und der Schrittweite Δx_B gilt dann für die Interpolationswege

$$\mathbf{x}_{B,i}^j = \mathbf{x}_{B,i}^{j=0} + \frac{(\mathbf{e}_{ri} a_2 - \mathbf{b} l_1)}{|\mathbf{e}_{ri} a_2 - \mathbf{b} l_1|} j \Delta x_B$$

(4-7)

mit $j = 0, 1, \dots, n_B - 1$ und $\Delta x_B = \frac{\sqrt{a_2^2 + l_1^2}}{n_B - 1}$.

Bereich C

Im Bereich C wird der zylindrische Teil der Werkzeughalterung modelliert (Abbildung 4-6). Die Verläufe der Interpolationswege werden über das gleiche Schema

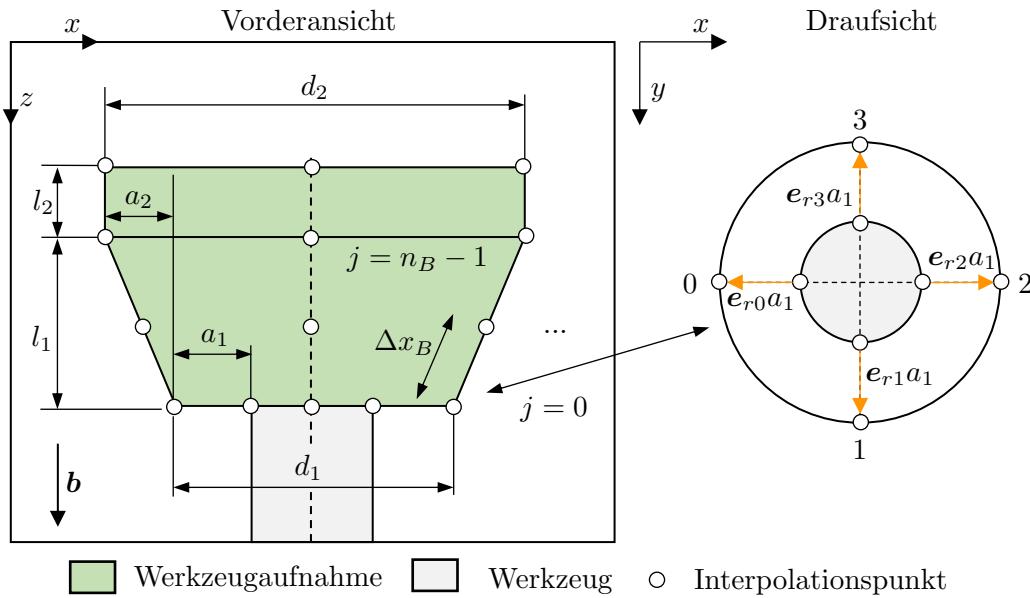


Abbildung 4-6: Verteilung der Interpolationspunkte in den Bereichen B und C. Aus Darstellungsgründen ist die Hauptspindel nicht eingezeichnet

wie in Bereich A erfasst. Die Startpunkte der i Interpolationswege sind die zuletzt interpolierten Punkte aus Bereich B

$$\mathbf{x}_{C,i}^{j=0} = \mathbf{x}_{B,i}^{j=n_B-1}. \quad (4-8)$$

Die Interpolation wird in Richtung der negativen Bearbeitungsrichtung über die Länge l_2 in n_C Schritten durchgeführt. Bei einer Schrittweite Δx_C mit n_C Schritten und $n_C \geq 2$ ergeben sich die Koordinaten der Interpolationspunkte als

$$\mathbf{x}_{C,i}^j = \mathbf{x}_{C,i}^{j=0} - j\Delta x_C \mathbf{b} \quad \text{mit} \quad j = 0, 1, \dots, n_C - 1 \quad \text{und} \quad \Delta x_C = \frac{l_2}{n_C - 1}. \quad (4-9)$$

Bereich D

Zur Modellierung der Hauptspindel werden die zuletzt errechneten Interpolationspunkte aus Bereich C in die Richtungen \mathbf{e}_{ri} um den Betrag a_3 verschoben (siehe Abbildung 4-7, rechts). Daraus ergeben sich die Koordinaten der i Startpunkte im Bereich D als

$$\mathbf{x}_{D,i}^{j=0} = \mathbf{x}_{C,i}^{j=n_C-1} + \mathbf{e}_{ri} a_3. \quad (4-10)$$

Die Interpolation erfolgt entlang der Außenkontur der Hauptspindel über die Höhe l_3 . Das Werkzeug ist entlang der Strecke s_v axial verfahrbar. Für n_D Schritte mit $n_D \geq 2$ und einer Schrittweite Δx_D ergeben sich die Koordinaten der

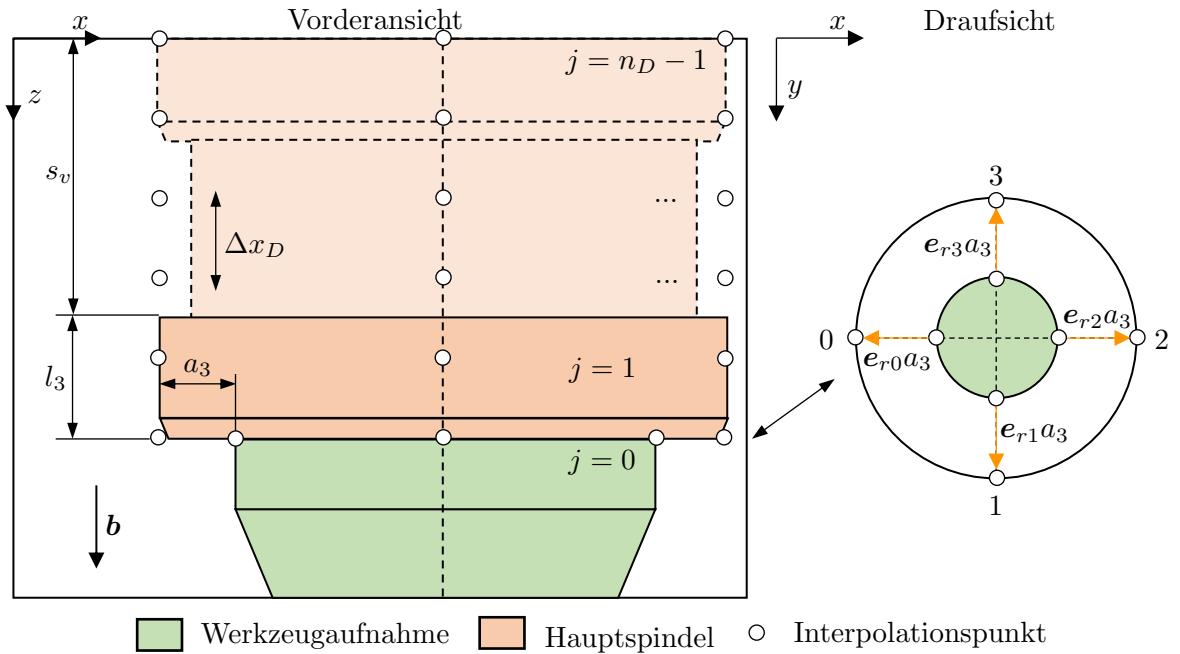


Abbildung 4-7: Verteilung der Interpolationspunkte im Bereich D

Interpolationspunkte zu

$$\mathbf{x}_{D,i}^j = \mathbf{x}_{D,i}^{j=0} - j \Delta x_D \mathbf{b} \quad \text{mit} \quad j = 0, 1, \dots, n_D - 1 \quad \text{und} \quad \Delta x_D = \frac{l_3 + s_v}{n_D - 1}. \quad (4-11)$$

Erfassung dünnwandiger Strukturbereiche

Zur Detektion dünnwandiger Strukturbereiche sei erneut auf Abbildung 4-4 verwiesen. Darin wird verdeutlicht, dass zur Positionierung der Interpolationspunkte die Orientierung des Randes genutzt wird. Über den gesamten Strukturrand werden Interpolationspunkte in negativer Normalenrichtung definiert. Diese werden so positioniert, dass ihr Abstand zu den zugehörigen Randpunkten der Mindestwandstärke entspricht. Oftmals reicht dieses Verfahren nicht zur Erkennung dünnwandiger Strukturen aus. In Abbildung 4-8 ist gezeigt, in welchen Situationen diese Problematik auftritt.

Wie in Abbildung 4-8a zu sehen ist, können Spalten, die dünner als die Mindestwandstärke sind, nicht erkannt werden. Den anliegenden Randpunkten würde das Verfahren dennoch eine ausreichende Wandstärke beziffern. Um diesem Problem entgegenzuwirken, können mehrere Interpolationspunkte eingesetzt werden. Damit steigt die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Punkt im Spalt liegt und dieser daher entdeckt wird. Die Interpolation erfolgt dann in insgesamt n_w Schritten bei

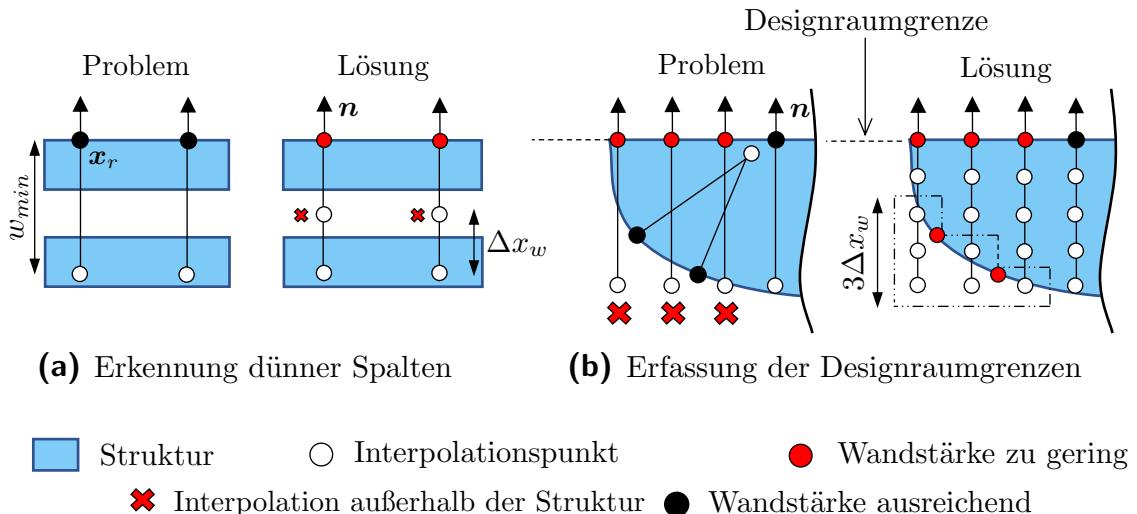


Abbildung 4–8: Einfluss der Anzahl von Interpolationspunkten auf die Erkennung dünner Spalten und die Erfassung der Wandstärke an der Designraumgrenze

einer Schrittweite Δx_w über die Mindestwandstärke w_{min} . Die Koordinaten der Interpolationspunkte \mathbf{x}_w an einem Randpunkt \mathbf{x}_r ergeben sich zu

$$\mathbf{x}_w^j = \mathbf{x}_r - j\Delta x_w \mathbf{n} \quad \text{mit} \quad j = 1, 2, \dots, n_w \quad \text{und} \quad \Delta x_w = \frac{w_{\min}}{n_w}. \quad (4-12)$$

In Abbildung 4–8b ist ein weiteres Problem dargestellt, dass bei gekrümmten Rändern in der Nähe der Designraumgrenze auftritt. Links besitzen die Punkte auf dem gekrümmten Rand eine ausreichende Wandstärke. Darüber liegen Randpunkte, deren Normalen den gekrümmten Bereich durchkreuzen und mit einer unzureichenden Wandstärke markiert werden. Zur Vermeidung dünner Strukturbereiche wird ein Strukturwachstum an den rot markierten Stellen induziert. Da die entsprechenden Punkte jedoch auf den Designraumgrenzen liegen, wird ein Wachstum dort blockiert. Rechts ist gezeigt, wie dieses Problem behoben wird. Liegen Randpunkte auf der Designraumgrenze, werden für diese mehrere Interpolationspunkte eingesetzt. Interpolationspunkte, die außerhalb der Struktur liegen, werden in einer umhüllenden Box zusammengefasst (gestrichelte Box). Daraufhin werden alle Randpunkte, die sich innerhalb der Box befinden, mit einer unzureichenden Wandstärke gekennzeichnet. Die Größe der Box hängt von der Schrittweite Δx_w und dem Abstand benachbarter Randpunkte ab – beispielsweise dem Knotenabstand im FE-Gitter.

4.3 Mathematische Formulierung der Fertigungsrestriktionen

In den folgenden Abschnitten wird konkretisiert, wie ein Strukturwachstum in den restriktionsverletzenden Bereichen induziert wird. Dazu werden die in Kapitel 2 beschriebenen Fertigungsrestriktionen in mathematisch zu beziffernde Ausdrücke bzw. Restriktionsfunktionen überführt. Wie in Kapitel 3 erläutert, können dann Sensitivitäten dieser Restriktionen bezüglich Verschiebungen des Strukturrandes bestimmt und in eine Entwicklung der Level-Set-Funktion überführt werden.

4.3.1 Überführung der Fertigungsrestriktionen in ein Potential

Der entwickelte Ansatz zur Erzeugung des Strukturwachstums beruht auf einer Analogie aus der Mechanik. Setzt man eine frei bewegliche Masse einem Gravitationsfeld aus, wird diese beschleunigt. Die Beschleunigung ist stets so gerichtet, dass deren Gravitationspotential reduziert wird (Gross et al. 2012). In Abbildung 4–9 ist eine Kugel auf einer schiefen Ebene zu zwei verschiedenen Zeitpunkten gezeichnet. Durch die Reduktion des Gravitationspotentials Ψ der Kugel verändert sich ihre x -Koordinate. Überträgt man dieses Prinzip auf die Entwicklung einer Level-Set-Funktion, könnte durch die Reduktion eines Potentials auf dem Nullniveau eine Verschiebung der Strukturgrenze induziert werden. Wie bei der Kugel würde sich die Strukturgrenze in Richtung kleiner werdender Potentialwerte bewegen. Eine Bewegung in die entgegengesetzte Richtung ist nur durch die Zufuhr von Energie möglich. In der Analogie ist diese ‚Energie‘ mit den Sensitivitäten aus der Topologieoptimierung gleichzusetzen.

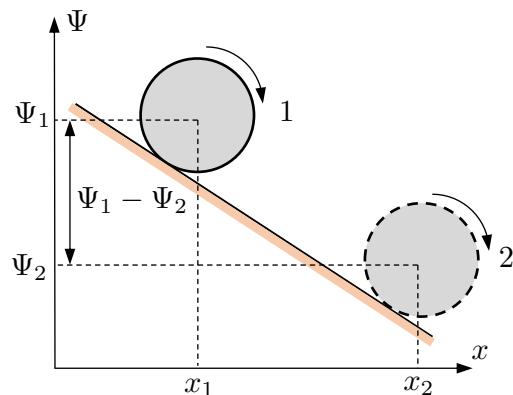


Abbildung 4–9: Verschiebung des Strukturrandes über die Minimierung eines Potentials. In der Analogie beschreibt die x -Koordinate der Kugel die Position des Strukturrandes

Um ein Strukturwachstum in den restriktionsverletzenden Bereichen anzuregen, wird nun eine Potentialfunktion $p(\mathbf{x})$ definiert, die jedem Punkt des Designraums ein Potential zuweist. Folgende Eigenschaften soll das gesuchte Potential erfüllen:

- Zum Zeitpunkt $t = 0$ soll der Strukturrand das Potential $\varepsilon \in \mathbb{R}$ annehmen.
- Das Potential soll sich auf normal zum Strukturrand orientierten Geraden linear ändern.
- Innerhalb der Struktur soll das Potential größere Werte als außerhalb der Struktur annehmen.
- Das Potential soll von der Strukturentwicklung entkoppelt sein.

Zur Definition einer Potentialfunktion mit den genannten Eigenschaften wird die als vorzeichenbehaftete Abstandsfunktion initialisierte Level-Set-Funktion genutzt. Wie in Abschnitt 3.3.4 beschrieben, besitzt diese bereits die Eigenschaft der Linearität. Subtrahiert man die Abstandsfunktion zu einem diskreten Zeitpunkt $\varphi_0(\mathbf{x})$ vom Randpotential ε , können alle geforderten Eigenschaften mathematisch ausgedrückt werden als

$$p(\mathbf{x}) = \varepsilon - \varphi_0(\mathbf{x}) \quad \text{mit} \quad \varphi(\mathbf{x}, t = 0) = \varphi_0. \quad (4-13)$$

Das Ziel ist es nun, eine Verschiebung des Strukturrandes über eine Reduktion des auf dem Strukturrand vorliegenden Potentials zu initiieren. In Abbildung 4-10 ist das Prinzip für den Randbereich eines Stabs dargestellt. Darin ist die Potentialfunktion (blau) des Stabs für drei aufeinanderfolgende Entwicklungsschritte gezeigt. Zum Zeitpunkt t_0 wird die Potentialfunktion initialisiert. Das Randpotential nimmt zu diesem Zeitpunkt den Wert ε an. Um das Randpotential zu reduzieren, muss sich der Randpunkt nach rechts bzw. nach außen bewegen. So besitzt das Potential zum Zeitpunkt t_1 und t_2 jeweils niedrigere Werte als in den vorangegangenen Zeitschritten. Als Eigenschaft für die Potentialfunktion wurde gefordert, dass diese nicht mit der Strukturentwicklung gekoppelt ist. Wäre dies der Fall, würde die Potentialfunktion der Strukturgrenze „folgen“. Dann würde auf der Grenze stets das Potential ε vorliegen. Ein Strukturwachstum durch eine Potentialreduktion wäre dann nicht möglich.

Auf dem Strukturrand Γ wird das Potential nun allgemein mithilfe eines Aktivierungsfaktors η durch ein Randfunktional $U(\Omega)$ beschrieben

$$U(\Omega) = \int_{\Gamma} \eta p(\mathbf{x}) \, d\Gamma = \int_{\Gamma} \eta (\varepsilon - \varphi_0(\mathbf{x})) \, d\Gamma. \quad (4-14)$$

Das Strukturwachstum soll nur auf Randbereichen induziert werden, an denen die Fertigungsrestriktionen verletzt sind. Diese werden im weiteren Verlauf als Γ_S

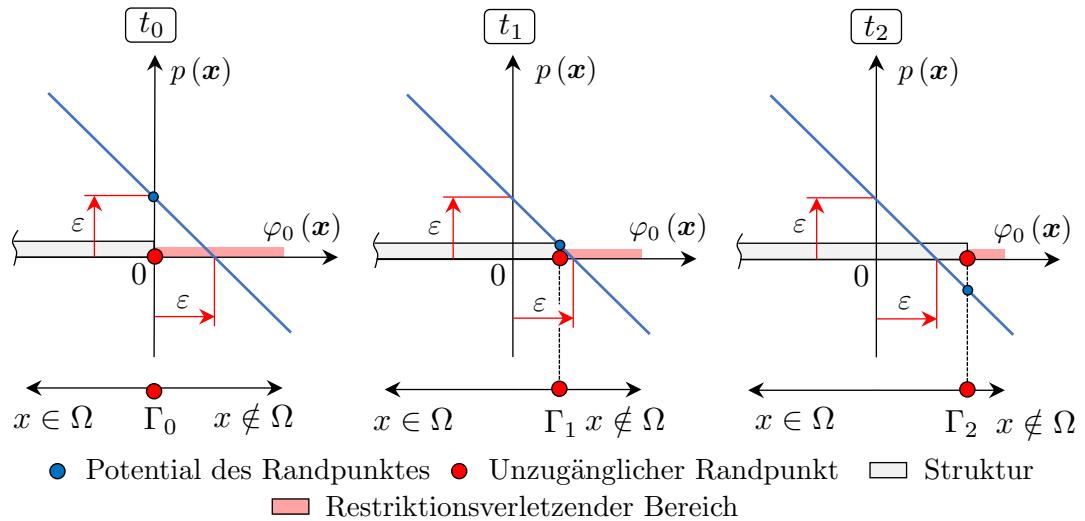


Abbildung 4–10: Darstellung der Potentialfunktion einer eindimensionalen Struktur zu drei verschiedenen Zeitpunkten $t_0 < t_1 < t_2$. Der Randpunkt bewegt sich nach außen

bezeichnet und durch das in Kapitel 4.2 beschriebene Verfahren ermittelt. Um restriktionsverletzende Randbereiche von den übrigen Randbereichen zu trennen, wird der Aktivierungsfaktor definiert als:

$$\eta = \begin{cases} 1 & \text{falls } \Gamma \in \Gamma_S, \\ 0 & \text{falls } \Gamma \notin \Gamma_S. \end{cases} \quad (4-15)$$

Für $\varepsilon = 1$ entspricht der Wert des Randfunktional gerade dem Betrag der Fläche, die nicht zugänglich oder Teil von zu dünnen Strukturbereichen ist. Dadurch sind beide Restriktionen in eine gemeinsame Restriktionsfunktion überführt. Die Fertigungsrestriktionen gelten als erfüllt, sobald das Randfunktional $U(\Omega)$ den Wert null annimmt. Für ein gefundenes Optimum Ω_{opt} gilt dann

$$U(\Omega_{opt}) = \int_{\Gamma} \eta(\varepsilon - \varphi_0(\mathbf{x})) d\Gamma = 0. \quad (4-16)$$

4.3.2 Reinitialisierung des Potentials

Durch das induzierte Wachstum verändert sich während der Optimierung der Anteil der Oberfläche, an der die Fertigungsrestriktionen verletzt sind. Im Rahmen der Strukturentwicklung werden sich solche Randbereiche zu zugänglichen oder ausreichend dicken Bereichen ausbilden. Es kann aber auch vorkommen, dass zunächst zugängliche oder ausreichend dicke Bereiche nach einer Randverschiebung

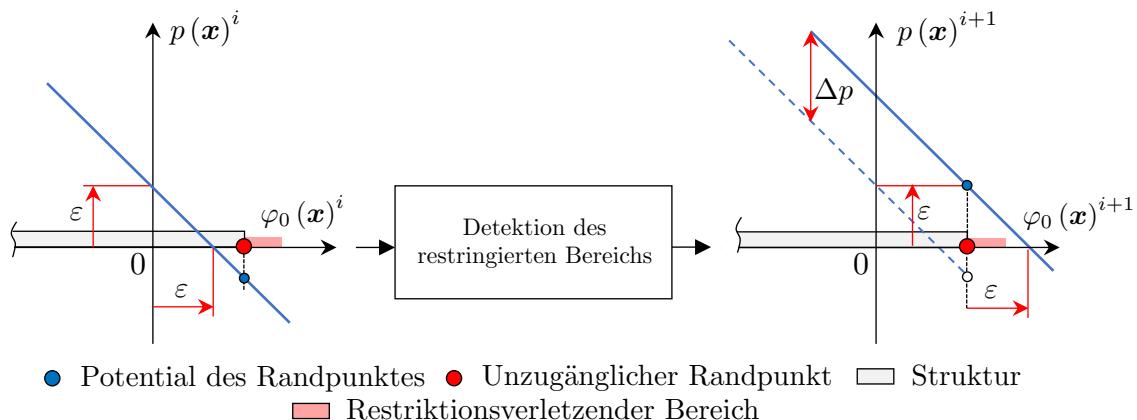


Abbildung 4-11: Reinitialisierung der Potentialfunktion nach erneuter Detektion der Bereiche, an denen eine der Fertigungsrestriktionen verletzt ist

eine der beiden Fertigungsrestriktionen nicht mehr erfüllen. Damit das Strukturwachstum nur in restriktionsverletzenden Bereichen induziert wird, muss in jeder Iteration eine erneute Detektion dieser Bereiche erfolgen.

Auch die ‚konstante‘ Potentialfunktion muss in regelmäßigen Intervallen reinitialisiert werden. Dies gewährleistet, dass einerseits deren Gradient möglichst gut die aktuellste Orientierung des Strukturrandes abbildet und anderseits ein Wachstum auch nach Topologieänderungen korrekt induziert wird. Die Vorgehensweise ist in Abbildung 4–11 dargestellt. Auf der linken Seite ist eine Potentialfunktion zur Iteration i direkt vor ihrer Reinitialisierung gezeigt. Nach der erneuten Detektion von Bereichen, an denen die Fertigungsrestriktionen verletzt sind, wird das Potential der Randpunkte gemäß Gleichung 4–13 wieder auf den Wert ε angehoben. Zur Reinitialisierung wird die zur nächsten Iteration $i + 1$ vorliegende Level-Set-Funktion $\varphi_0(\mathbf{x})^{i+1}$ genutzt. Ein geeigneter Zeitpunkt zur Reinitialisierung der Potentialfunktion liegt vor, wenn die Level-Set-Funktion ebenfalls reinitialisiert wird. Wie in Kapitel 3.3.4 erläutert, erfüllt die Level-Set-Funktion dann bestmöglich die Eigenschaften der vorzeichenbehafteten Abstandsfunktion. Falls der zeitliche Abstand zwischen zwei Reinitialisierungen der Level-Set-Funktion zu groß ist, muss die Potentialfunktion auch zwischen diesen Zeitpunkten neu bestimmt werden.

4.4 Sensitivitätsanalyse

Zur Erfüllung der als Randfunktional (Gleichung 4–16) formulierten Fertigungsrestriktionen werden deren Sensitivitäten bezüglich Änderungen des Strukturrandes

benötigt. Da die Potentialfunktion von der Strukturentwicklung entkoppelt ist, gestaltet sich die Berechnung der Formableitung als vergleichsweise einfach. Die allgemeine Formableitung für ein Randfunktional (Gleichung 3–12) wird in Abschnitt 3.2 eingeführt und näher diskutiert. Mithilfe dieser Formableitung lässt sich wiederum für die Formableitung des Randpotentials schreiben

$$U'(\Omega) \boldsymbol{\theta} = \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \eta p(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} + \kappa \eta p(\mathbf{x}) \right) \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n} d\Gamma + \int_{\Gamma} \eta p'(\mathbf{x}) d\Gamma. \quad (4-17)$$

Der Gradient der Potentialfunktion $\nabla p(\mathbf{x})$ entspricht dem negativen Gradienten der vorzeichenbehafteten Abstandsfunktion. Von daher kann für die Änderung des Potentials in Normalenrichtung

$$\frac{\partial p(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} = \nabla p(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = -1 \quad (4-18)$$

geschrieben werden. Wie im Abschnitt 3.2 allgemein erläutert, erfasst der krümmungsbehaftete Term $\kappa \eta p(\mathbf{x})$, welcher Anteil der Potentialänderung bei Gebietstransformationen unter einem Verschiebungsfeld $\boldsymbol{\theta}$ auf die betragsmäßige Veränderung der Strukturoberfläche zurückzuführen ist.

Da die Potentialfunktion unabhängig von der Level-Set-Entwicklung und damit unabhängig von einer Verschiebung der Strukturgrenzen ist, kann die Formableitung mit

$$p'(\mathbf{x}) = 0 \quad (4-19)$$

weiter vereinfacht werden. Schließlich ergibt sich die Formableitung des Randpotentials als

$$U'(\Omega) \boldsymbol{\theta} = \int_{\Gamma} \eta(\kappa p(\mathbf{x}) - 1) \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \int_{\Gamma} \eta(\kappa(\varepsilon - \varphi_0(\mathbf{x})) - 1) \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n} d\Gamma. \quad (4-20)$$

Darin ist die Potentialfunktion durch Gleichung 4–13 ausgedrückt.

4.5 Berücksichtigung der Fertigungsrestriktionen in der Optimierung

4.5.1 Erweiterung des Optimierungsproblems

Zur Integration der Fertigungsrestriktionen in die Topologieoptimierung wird ein neues Optimierungsproblem definiert. Im Rahmen dieser Arbeit wird dazu das

in Kapitel 3.1 eingeführte Optimierungsproblem erweitert. Die Zielfunktion ist weiterhin die Minimierung der mittleren Nachgiebigkeit. Neben der Erfüllung einer Volumenrestriktion wird gefordert, dass das Randpotential verschwindet. Das Optimierungsproblem lässt sich dann wie folgt definieren:

$$\begin{aligned} \min J(\Omega) &= C(\Omega) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \, d\Omega \\ \text{sodass } R_1(\Omega) &= V(\Omega) - V_z = \int_{\Omega} d\Omega - V_z = 0 \\ \text{und } R_2(\Omega) &= U(\Omega) = \int_{\Gamma} \eta(\varepsilon - \varphi_0(\mathbf{x})) \, d\Gamma = 0. \end{aligned} \quad (4-21)$$

4.5.2 Bildung der neuen Entwicklungsgeschwindigkeit

Zur Lösung des neuen Optimierungsproblems werden nun geeignete Entwicklungsgeschwindigkeiten ermittelt. Wie in Kapitel 3.4.1 gezeigt, kann das Optimierungsproblem mithilfe einer erweiterten Lagrange-Funktion in eine unrestringierte Optimierungsaufgabenstellung überführt werden. Die Entwicklungsgeschwindigkeiten werden anschließend aus dessen Formableitung ermittelt. Für die beiden Gleichheitsrestriktionen lässt sich die erweiterte Lagrange-Funktion gemäß Gleichung 3-35 formulieren als

$$\mathcal{L}(\Omega, \lambda, \Lambda) = J(\Omega) + \lambda_1 R_1(\Omega) + \frac{1}{2\Lambda_1} R_1^2(\Omega) + \lambda_2 R_2(\Omega) + \frac{1}{2\Lambda_2} R_2^2(\Omega). \quad (4-22)$$

Daraufhin wird die Formableitung der erweiterten Lagrange-Funktion gebildet. Nach Gleichung 3-37 lässt sich diese allgemein formulieren als

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}(\Omega, \lambda, \Lambda)}{\partial \Omega} \boldsymbol{\theta} &= J'(\Omega) \boldsymbol{\theta} + \left[\lambda_1 + \frac{R_1(\Omega)}{\Lambda_1} \right] R_1'(\Omega) \boldsymbol{\theta} + \\ &\quad \left[\lambda_2 + \frac{R_2(\Omega)}{\Lambda_2} \right] R_2'(\Omega) \boldsymbol{\theta}. \end{aligned} \quad (4-23)$$

Werden keine Volumenkräfte berücksichtigt, entspricht die Formableitung der mittleren Nachgiebigkeit über den veränderbaren Rand Γ_0 dem Ausdruck in Gleichung 3-15. Die Formableitung des Volumens ist mit Gleichung 3-17 beschrieben. Aus Gründen der Übersichtlichkeit sind beide Gleichungen hier noch einmal wiederholt. Für die Formableitung der Zielfunktion gilt

$$J'(\Omega) \boldsymbol{\theta} = C'(\Omega) \boldsymbol{\theta} = - \int_{\Gamma_0} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma \quad (4-24)$$

und für die Formableitung des Volumens gilt

$$R_1'(\Omega) \boldsymbol{\theta} = V'(\Omega) \boldsymbol{\theta} = \int_{\Gamma_0} \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma. \quad (4-25)$$

Mithilfe dieser Resultate und der Formableitung des Randpotentials aus Gleichung 4–20 wird die Formableitung der erweiterten Lagrange-Funktion spezifiziert

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\Omega, \lambda, \Lambda)}{\partial \Omega} \boldsymbol{\theta} = \int_{\Gamma_0} \left(-\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \lambda_1 + \frac{1}{\Lambda_1} \left[\int_{\Omega} d\Omega - V_z \right] + \left[\lambda_2 + \frac{1}{\Lambda_2} \int_{\Gamma} \eta(\varepsilon - \varphi_0(\mathbf{x})) d\Gamma \right] (\kappa(\varepsilon - \varphi_0(\mathbf{x})) - 1) \right) \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \int_{\Gamma_0} \omega \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n} d\Gamma. \quad (4-26)$$

Darin werden die Sensitivitäten durch das Skalarfeld ω zusammengefasst. Bei einer Minimierung nach der Methode des steilsten Abstiegs wird das Verschiebungsfeld $\boldsymbol{\theta}$ so gewählt, dass eine Bewegung des Randes in Normalenrichtung zu einer Minimierung der Lagrange-Funktion führt. Wie in Kapitel 3.4.2 beschrieben, wird dazu das Verschiebungsfeld als $\boldsymbol{\theta} = -\omega \mathbf{n}$ ausgedrückt. Das Skalarfeld ω bzw. die Formsensitivität der Lagrange-Funktion ergibt sich aus obiger Gleichung zu

$$\begin{aligned} \omega = -\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \lambda_1 + \frac{1}{\Lambda_1} \left[\int_{\Omega} d\Omega - V_z \right] + \\ \left[\lambda_2 + \frac{1}{\Lambda_2} \int_{\Gamma} \eta(\varepsilon - \varphi_0(\mathbf{x})) d\Gamma \right] \eta(\kappa(\varepsilon - \varphi_0(\mathbf{x})) - 1). \end{aligned} \quad (4-27)$$

Zur Ableitung einer Entwicklungsgeschwindigkeit v_n wird die Normalkomponente des Verschiebungsfelds gewählt $v_n = \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n} = -\omega \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = -\omega$. Diese entspricht den negativen Formsensitivitäten der erweiterten Lagrange-Funktion. Damit lautet die Level-Set-Entwicklungsgeschwindigkeit

$$\begin{aligned} v_n = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \lambda_1 - \frac{1}{\Lambda_1} \left[\int_{\Omega} d\Omega - V_z \right] - \\ \left[\lambda_2 + \frac{1}{\Lambda_2} \int_{\Gamma} \eta(\varepsilon - \varphi_0(\mathbf{x})) d\Gamma \right] \eta(\kappa(\varepsilon - \varphi_0(\mathbf{x})) - 1). \end{aligned} \quad (4-28)$$

In dem Geschwindigkeitsfeld ist der zu den Fertigungsrestriktionen gehörende Teil nur auf dem Strukturrand definiert. Zur Lösung der Entwicklungsgleichung muss das Geschwindigkeitsfeld im gesamten Designraum definiert sein. Aus diesem Grund werden die Geschwindigkeiten ausgehend vom Rand in den übrigen Designraum extrapoliert. Dazu wird eine Velocity Extension nach dem in Kapitel 3.3.5 beschriebenen Verfahren durchgeführt.

4.5.3 Maßnahmen zur Verbesserung des Konvergenzverhaltens

Lokale Oszillationen des Strukturrandes

Wird das Geschwindigkeitsfeld in Form von Gleichung 4–28 für Optimierungen eingesetzt, kann sich das Konvergenzverhalten im Vergleich zu Optimierungen ohne

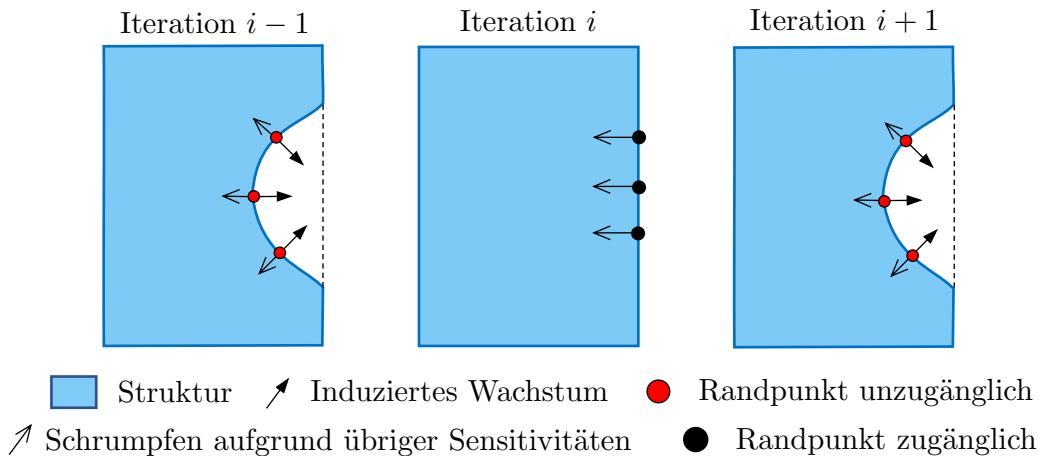


Abbildung 4-12: Oszillation des Randes um eine zugängliche und unzugängliche Lage im Verlauf der Optimierung

Fertigungsrestriktionen signifikant verschlechtern. Ein Grund dafür ist, dass im Verlauf der Optimierung Oszillationen einzelner Randbereiche um eine zugängliche und eine unzugängliche Lage auftreten können. Bereiche, die durch das induzierte Wachstum zugänglich werden, können in einer darauffolgenden Iteration wieder unzugänglich werden. Die Problematik ist in Abbildung 4-12 gezeigt. Dort ist eine Struktur zu sehen, die in der Iteration $i - 1$ unzugängliche Randpunkte besitzt. Es wird angenommen, dass die Struktur bei einer Optimierung ohne Fertigungsrestriktionen in diesem Bereich schrumpfen würde. Überwiegt der Geschwindigkeitsanteil aus dem induzierten Strukturwachstum den des restlichen Geschwindigkeitsfelds, bewegt sich der Rand nach außen. In Iteration i sind alle Randpunkte zugänglich. Dies führt dazu, dass nun kein Wachstum mehr induziert wird. In dieser Situation führen die übrigen vorliegenden Sensitivitäten wieder zu einem Schrumpfen im entsprechenden Bereich. Es tritt eine Oszillation zwischen einer zugänglichen und unzugänglichen Lage auf. Dieser Effekt tritt in gleicher Weise in Bereichen auf, in denen eine vorgegebene Mindestwandstärke unterschritten wird.

Um diesem Problem entgegenzuwirken, werden die Sensitivitäten des Potentials zur aktuellen Iteration anteilig aus denen vorangegangener Iterationen zusammengesetzt. Mit den Informationen vorheriger Iterationen wird in den Bereichen, die gerade zugänglich geworden sind, weiterhin ein Wachstumsdruck erzeugt. Das ‚Merken‘ der Sensitivitäten verhindert ein direktes Schrumpfen in den entsprechenden Bereichen. Von daher wird das berechnete Feld aus vergangenen und aktuellen Sensitivitäten als *Memory-Feld* bezeichnet. Zu dessen Bildung werden jedoch nur die Sensitivitäten des Potentials bzw. nur der Anteil der Fertigungsrestriktionen genutzt. Werden die Sensitivitäten aus der Formableitung des Randpotentials

(Gleichung 4–20) notiert als

$$U'(\Omega) \boldsymbol{\theta} = \int_{\Gamma} \eta(\kappa(\varepsilon - \varphi_0(\mathbf{x})) - 1) \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \int_{\Gamma} \frac{\delta U(\mathbf{x})}{\delta \Omega} \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n} d\Gamma, \quad (4-29)$$

werden die Sensitivitäten des Memory-Felds in der Iteration i definiert als

$$\left(\frac{\delta U(\mathbf{x})}{\delta \Omega} \right)_{Mem}^i = m \left(\frac{\delta U(\mathbf{x})}{\delta \Omega} \right)^i + (1 - m) \left(\frac{\delta U(\mathbf{x})}{\delta \Omega} \right)_{Mem}^{i-1} \quad 0 < m \leq 1. \quad (4-30)$$

Der darin enthaltene Faktor m beeinflusst, wie stark der Einfluss zurückliegender Iterationen auf die aktuelle Iteration ist. Das Geschwindigkeitsfeld 4–28 wird daraus wie folgt umformuliert:

$$v_{n,Mem} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \lambda_1 - \frac{1}{\Lambda_1} \left[\int_{\Omega} d\Omega - V_z \right] - \left[\lambda_2 + \frac{1}{\Lambda_2} \int_{\Gamma} \eta(\varepsilon - \varphi_0(\mathbf{x})) d\Gamma \right] (\eta(\kappa(\varepsilon - \varphi_0(\mathbf{x})) - 1))_{Mem}. \quad (4-31)$$

Ausbildung von Kanten

Auch die Notwendigkeit zur Ausbildung von Kanten kann zu einer Verschlechterung des Konvergenzverhaltens führen. Dazu sei auf die Abbildung 4–13 verwiesen. Darin kennzeichnet der gelb markierte Bereich einen exemplarischen zugänglichen Bereich. Damit die rot markierten Randpunkte zugänglich werden, müsste sich eine Kante ausbilden. Die Notwendigkeit zur Ausbildung dieser Kante führt jedoch zu einer deutlichen Verschlechterung des Konvergenzverhaltens. Eine verfeinerte Diskretisierung solcher Bereiche trägt zu einer Minderung dieses Problems bei. Um dieses Problem vollständig zu umgehen, wird der Abstand der unzugänglichen Randpunkte zum zugänglichen Bereich ermittelt. Ähnlich wie bei der Wandstärkenerkennung geschieht dies in Normalenrichtung über die Interpolation an mehreren Interpolationspunkten. An jedem Interpolationspunkt wird die Zugänglichkeit geprüft. Sobald ein Interpolationspunkt als zugänglich detektiert wurde, ist der gesuchte Abstand aus der gewählten Schrittweite bekannt. Anschließend werden die Level-Set-Funktionswerte an den dazugehörigen Randpunkten um die jeweiligen Abstände $\Delta\varphi$ verringert. Dadurch wird die Strukturgrenze lokal auf den Kantenverlauf verschoben. Dies wird jedoch nur bis zu einem maximalen Wert von $\Delta\varphi_{max}$ durchgeführt. Dieser Wert entspricht in den folgenden numerischen Versuchen einem Drittel der kleinsten vorkommenden Elementgröße. Außerdem wird diese Methodik erst genutzt, sobald mindestens 99.5 % der Strukturoberfläche zugänglich sind.

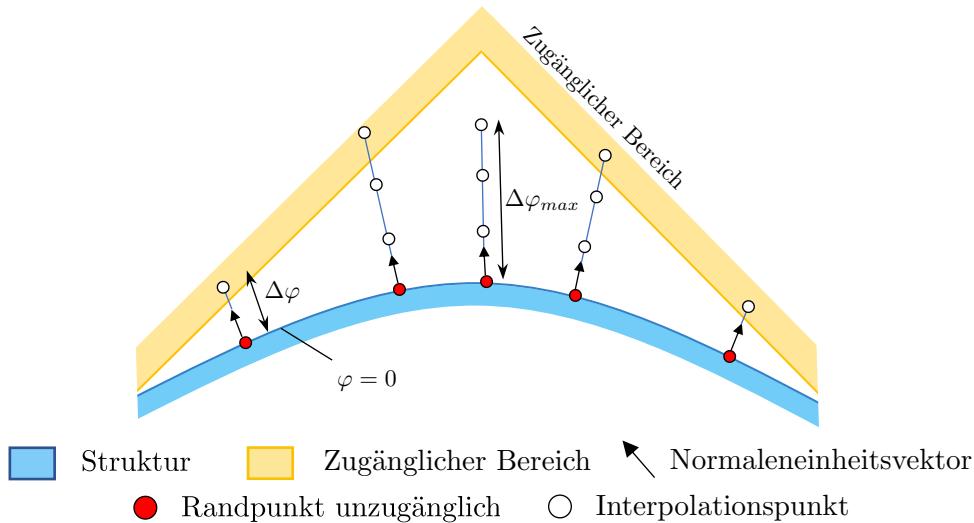


Abbildung 4-13: Zur Ausbildung von Kanten wird der Abstand unzugänglicher Randpunkte zum zugänglichen Bereich ermittelt

4.6 Eingliederung der Fertigungsrestriktionen in den Optimierungsablauf

Durch die Integration der Fertigungsrestriktionen ändert sich der in Kapitel 3.5 vorgestellte Optimierungsablauf. Wie im Vorfeld erwähnt, wird in dieser Arbeit der in Abbildung 3-11 verdeutlichte Ablauf angewandt. Von daher beziehen sich die folgenden Erläuterungen explizit auf diesen Ablauf. Eine Integration der Fertigungsrestriktionen in die klassische Level-Set-Optimierung (Abbildung 3-10) ist aber auch uneingeschränkt möglich.

Der neue Optimierungsablauf unter Berücksichtigung der Fertigungsrestriktionen ist in Abbildung 4-14 gezeigt. Zu Beginn einer Optimierung müssen nun neben der Optimierungsaufgabe die Fertigungsparameter eingelesen werden. Dazu zählen die Geometrien der nutzbaren Werkzeuge, der Halterungen sowie der Hauptspindel. Für eine Darstellung der benötigten Maße sei auf die Abbildungen in Kapitel 4.2.3 verwiesen. Zusätzlich müssen nutzbare Bearbeitungsrichtungen sowie eine einzuhaltende Mindestwandstärke definiert werden. Die Schritte zur Berücksichtigung der Fertigungsrestriktionen reihen sich zwischen der Reinitialisierung der Level-Set-Funktion und der Sensitivitätsanalyse von Zielfunktion und Volumen ein. Nachdem die Bereiche identifiziert wurden, in denen eine Fertigungsrestriktion verletzt ist, wird die Potentialfunktion initialisiert bzw. reinitialisiert. Daraufhin werden die Sensitivitäten des Randpotentials berechnet. Nachdem diese im Rahmen einer Velocity Extension vom Strukturrand in den gesamten Designraum extrapoliert

wurden, wird das Memory-Feld bestimmt. Daraufhin entspricht der Optimierungsablauf wieder dem, der ohne Berücksichtigung der Fertigungsrestriktionen genutzt wird.

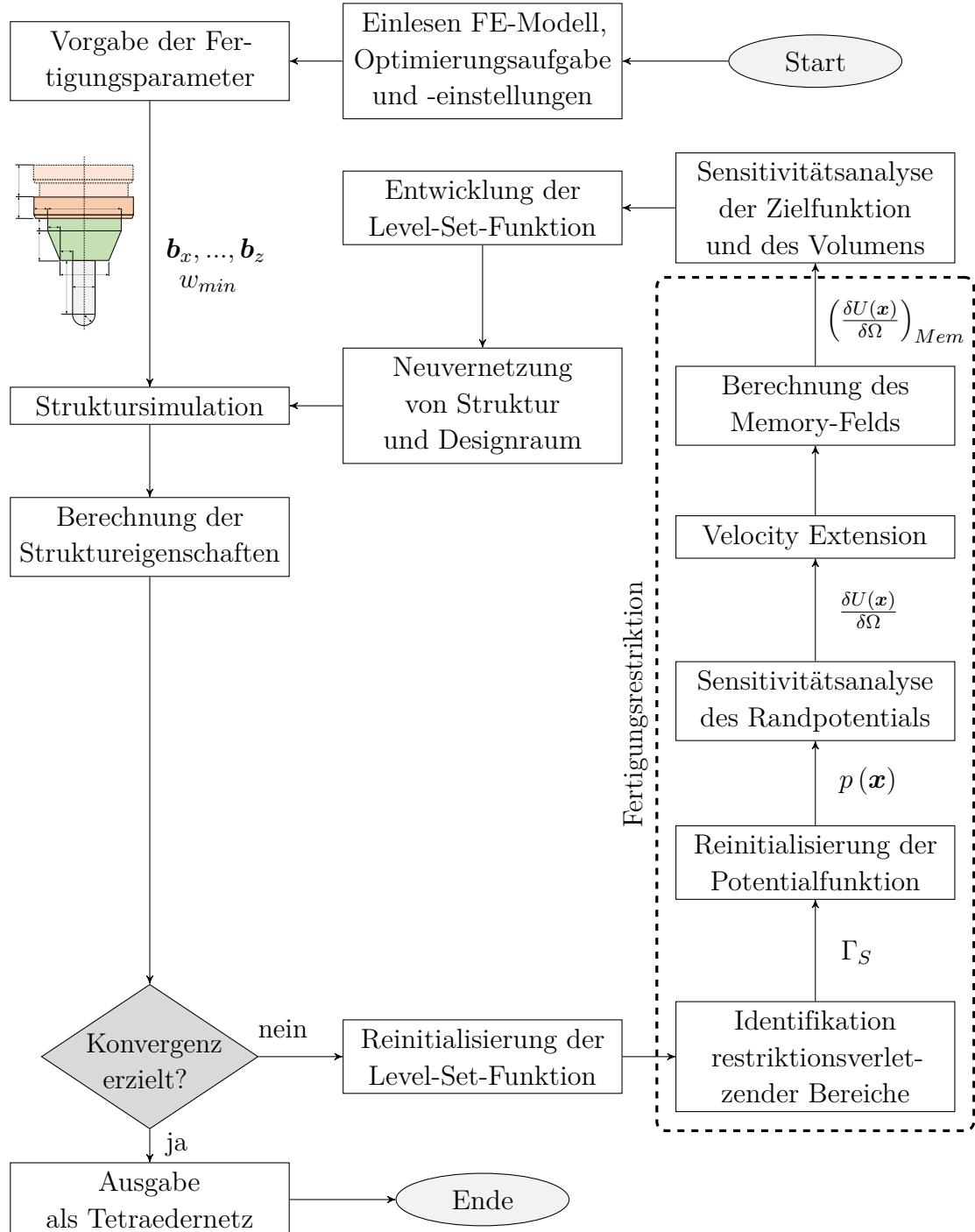


Abbildung 4–14: Eingliederung der Fertigungsrestriktionen in den Optimierungsablauf von Topologieoptimierungen mit der Level-Set-Methode

5 Numerische Anwendungen

In diesem Kapitel werden verschiedene numerische Experimente unter Berücksichtigung der Fertigungsrestriktionen durchgeführt. Das Ziel besteht darin, zu beurteilen, ob die Minimierung eines Randpotentials zur Erfüllung der Fertigungsrestriktionen führt. Dies beinhaltet eine Bewertung des Konvergenzverhaltens und die Interpretation der mechanischen Eigenschaften der optimierten Strukturen. Außerdem werden Vergleiche mit kongruierenden Anwendungsbeispielen ohne Einfluss der Fertigungsrestriktionen durchgeführt. Zu den numerischen Versuchen gehören zwei akademische Beispiele, in denen eine Würfelstruktur (siehe auch Colling et al. (2024)) und ein Kragträger optimiert werden sowie ein industrielles Beispiel, in dem eine Lagerhalterung optimiert wird.

5.1 Details zur numerischen Umsetzung

Die numerische Umsetzung des Optimierungsverfahrens ist bereits in Kapitel 3.6 beschrieben worden und bildet die Grundlage für die folgenden Anwendungsbeispiele. Zunächst werden Informationen über die verwendeten Werkzeug- und Maschinendaten angegeben. Daraufhin erfolgt eine Auflistung aller gewählten Optimierungsparameter. Im Anschluss werden numerische Details zum Interpolationsverfahren konkretisiert und die verwendete Hardware spezifiziert.

Werkzeug- und Maschinendaten

Eine Darstellung der definierbaren Werkzeug- und Maschinenmaße ist in Abbildung 5–1 gezeigt. Diese beziehen sich auf die Abbildungen 4–5 bis 4–7 aus Kapitel 4.2.3. In den numerischen Beispielen werden fünf unterschiedliche Werkzeuge eingesetzt. Deren Abmessungen sind in Tabelle 5–1 aufgeführt. Die Werkzeugauswahl erfolgt zum Teil so, dass die Zugänglichkeit in einigen Beispielen ‚künstlich‘ erschwert wird. Dies entspricht nicht immer einer praxisgerechten Werkzeugwahl, dient jedoch der

Demonstration des Verfahrens. Der axiale Verfahrweg der Hauptspindel wird in allen Beispielen auf den gleichen Wert begrenzt.

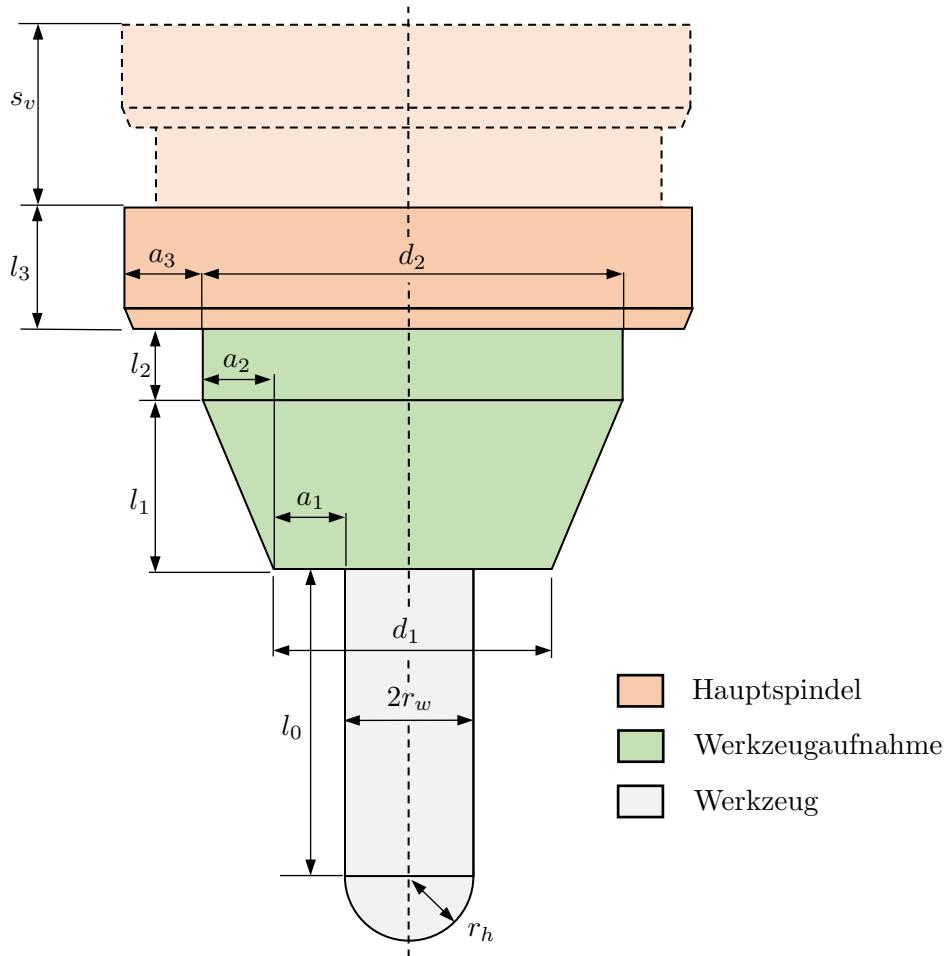


Abbildung 5–1: Darstellung der definierbaren Werkzeug- und Maschinenmaße. Die Maße beziehen sich auf das in Kapitel 4.2.3 eingeführte Interpolationsverfahren

Werkzeug	l_0	l_1	l_2	l_3	a_1	a_2	a_3	r_w	r_h	s_v
a)	60	50	50	20	40	0	5	10	10	100
b)	85	50	55	20	8	10	30	7	7	100
c)	50	50	50	40	40	0	20	10	10	100
d)	70	40	30	40	10	5	45	10	10	100
e)	50	30	25	25	6	10	30	4	4	100

Tabelle 5–1: Verwendete Werkzeug- und Maschinenmaße. Alle Maße sind in mm angegeben

Optimierungs- und Simulationsparameter

In Tabelle 5–2 sind die gewählten Optimierungsparameter sowie benötigte Werkstoffkennwerte aller Beispiele des Kapitels aufgelistet.

Parameter	Symbol	Würfel	Kragträger	Lagerhalterung
Elastizitätsmodul	E	1 N/mm ²	1 N/mm ²	200000 N/mm ²
Poisson-Zahl	ν	0.3	0.3	0.27
Konvergenz-Schwellwert	ε_{konv}	0.0015	0.0015	0.01
Verstärkungsfaktor	α	0.92	0.92	0.92
CFL-Zahl	CFL	0.3	0.3	0.3
Entwicklungsschritte	n_{LS}	20	40	20
Volumenrestriktion				
Lagrange-Multiplikator	λ_1^0	0.075	0.025	0.01
Strafparameter	Λ_1^0	1000	1000	1000
Fertigungsrestriktion				
Lagrange-Multiplikator	λ_2^0	0.01	0.01	0.01
Strafparameter	Λ_2^0	50	50	5
Memory-Feld				
Memoryfaktor	m	0.65	0.65	0.65

Tabelle 5–2: Verwendete Optimierungs- und Simulationsparameter. Die angegebenen Parameter des Lagrange-Verfahrens sind die Werte zu Beginn der Optimierung

Das Maß der Bestrafung einer Restriktionsverletzung wird nach Gleichung 3–39 in jeder Iteration mithilfe des Verstärkungsfaktors α erhöht. Sobald eine Restriktion erfüllt ist, wird das dazugehörige Bestrafungsmaß konstant gehalten. Andernfalls könnte der Einfluss einer möglichen erneuten Restriktionsverletzung auf die Entwicklungsgeschwindigkeiten so groß werden, dass das Verfahren instabil wird. Zur Anregung von Topologieänderungen wird das Kragträgerbeispiel mit einer höheren Anzahl von Entwicklungsschritten durchgeführt. Ist diese zu gering, bildet sich das im zweiten Beispiel von Kapitel 3.6.2 gezeigte Loch nicht aus und die Optimierung konvergiert in einem schwachen lokalen Minimum.

Interpolation

Die Interpolation der Level-Set-Funktion wird mit einem baryzentrischen Interpolationsverfahren durchgeführt. Dazu wird die Open Source Bibliothek „Scipy“ eingesetzt. Zur Reduktion der Rechenzeit wird dazu lediglich eine dünne Elementschicht entlang des Strukturrandes berücksichtigt. Diese Schicht muss positive sowie negative Level-Set-Funktionswerte beinhalten. In Tabelle 5–3 ist aufgeführt, wie viele Interpolationspunkte in den Bereichen A–D (siehe Abbildungen 4–5 bis 4–7) sowie in der Wandstärkenüberprüfung genutzt werden. Die daraus resultierenden Schrittweiten sollten bei strukturierten Gittern höchstens so groß wie eine Elementgröße sein. Bei unstrukturierten Gittern sollten diese höchstens ein Drittel der Elementgröße betragen. Daher wird die Anzahl der Punkte so gewählt, dass sich in den Interpolationsbereichen A–C Schrittweiten von ca. 2.5 mm und im Bereich D von ca. 5 mm einstellen. Aufgrund der gewählten Werkzeugdimensionen liegt Bereich D überwiegend außerhalb des Designraums. Aus Effizienzgründen ist die dortige Schrittweite daher doppelt so groß gewählt. Werden zu große Schrittweiten gewählt, ist die Erkennung unzugänglicher Bereiche ungenau. Unzugängliche Bereiche werden dann vereinzelt nicht als solche erkannt.

Werkzeug	n_A	n_B	n_C	n_D	n_W
a)	24	20	20	20	10
b)	36	20	22	24	10
c)	20	20	20	28	10
d)	28	16	12	28	10
e)	20	12	10	25	10

Tabelle 5–3: Anzahl der genutzten Interpolationspunkte für alle gewählten Werkzeuge und für die Wandstärkenerkennung. Zum Vergleich siehe Kapitel 4.2.3

Hardware

Für alle Beispiele wird die gleiche Hardware eingesetzt. Zu den Hauptkomponenten zählen eine 8-Kern-Intel®-Core™ i7-8700 CPU, 16 GB Hauptspeicher und eine NVIDIA® GeForce® GTX 1080 GPU.

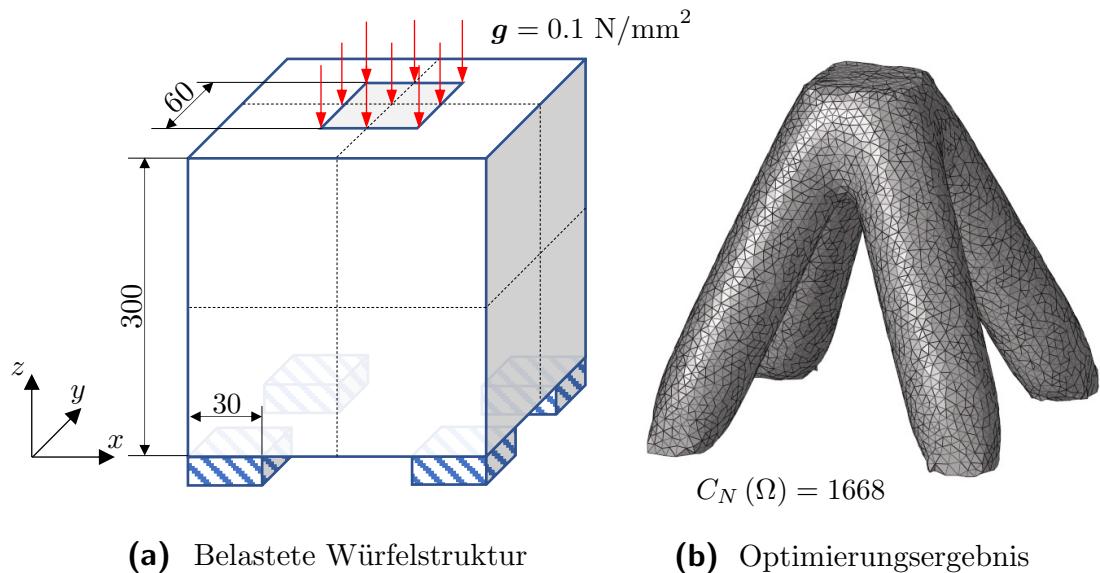


Abbildung 5–2: Minimierung der mittleren Nachgiebigkeit einer belasteten Würfelstruktur unter einer Volumenrestriktion. Alle Maße sind in mm angegeben

5.2 Würfel

Als einführendes Anwendungsbeispiel wird die in Abbildung 5–2a gezeigte belastete Würfelstruktur optimiert. Die Auswahl dieser Struktur ist durch das Beispiel ‚SupportStruct‘ aus der Arbeit von Morris et al. (2020) inspiriert. Die Optimierung erfolgt zunächst ohne Fertigungsrestriktionen. Anschließend wird in diesem Beispiel die Erfüllung einer Zugänglichkeitsrestriktion gefordert.

Der Würfel besitzt eine Kantenlänge von 300 mm. Dessen Oberfläche kennzeichnet die Grenzen des verfügbaren Designraums. An den vier schraffierten quadratischen Flächen ist der Würfel fest fixiert. Auf der grau markierten Fläche der Oberseite wird eine Flächenlast von 0.1 N/mm^2 aufgebracht. Der Startentwurf füllt den gesamten Designraum mit Strukturmaterial aus, wobei im Schwerpunkt des Würfels eine kugelförmige Aussparung vorgegeben wird. Diese besitzt einen Durchmesser von 100 mm. Die mittlere Nachgiebigkeit wird wie in den Beispielen aus Kapitel 3.6.2 so normiert, dass diese bei einem vollständig mit Strukturmaterial ausgefüllten Designraum einen Wert von $C_N = 1000$ annimmt. Da im Startentwurf eine kugelförmige Aussparung vorgegeben wird, besitzt dieser eine normierte mittlere Nachgiebigkeit von $C_N = 1042$. Als Restriktion wird das Erreichen eines Volumenfüllgrads von $V_F = 0.20$ vorgegeben.

5.2.1 Optimierung ohne Fertigungsrestriktionen

Die Optimierung konvergiert nach 86 Iterationen, wobei die optimierte Struktur im gefundenen Optimum eine normierte mittlere Nachgiebigkeit von $C_N = 1668$ aufweist. In Abbildung 5–2b ist die resultierende Struktur dargestellt. Diese nimmt die Form von vier ineinanderlaufenden Stäben an. Dadurch wird die äußere Belastung weitestgehend als Druckbeanspruchung von der Struktur aufgenommen. Die numerischen Ergebnisse sind in Tabelle 5–4 in der linken Spalte zusammengefasst. In der ersten Iteration wird die Struktur durch ca. 60.000 Elemente diskretisiert. Dies führt zu einer durchschnittlichen Iterationsdauer von 36 s.

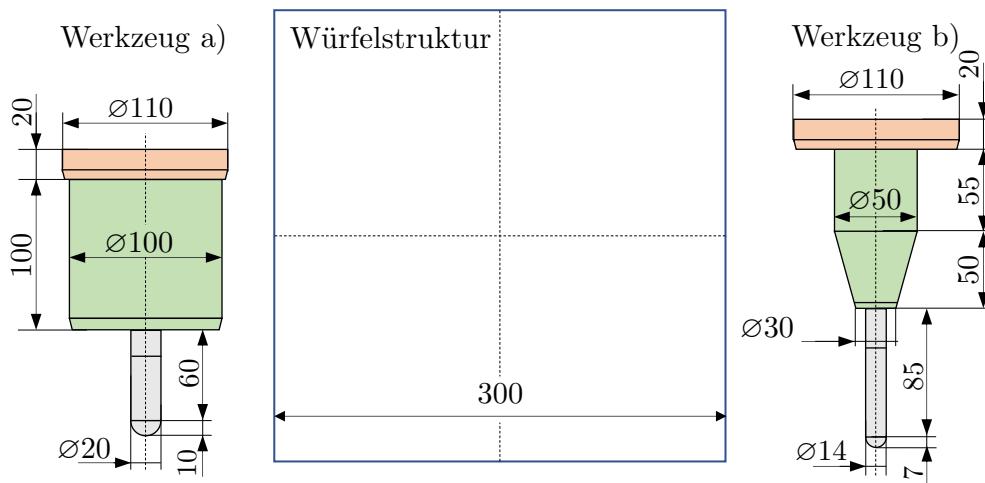


Abbildung 5–3: Vergleich der Dimensionierung der Werkzeuge a) und b) mit den Abmessungen der Würfelstruktur. Für eine Auflistung aller Maße siehe Tabelle 5–1. Alle Maße sind in mm angegeben.

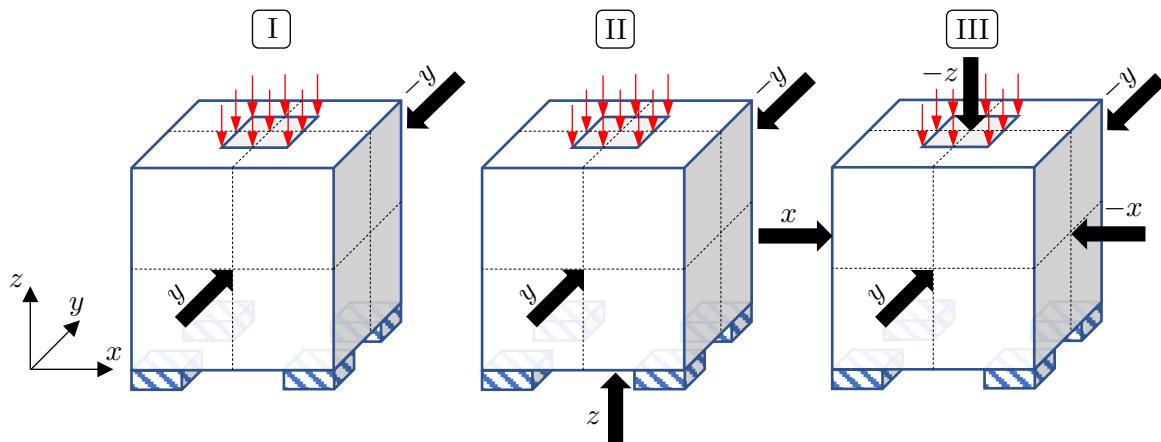


Abbildung 5–4: Darstellung der drei gewählten Bearbeitungskonfigurationen I, II und III. Jeder schwarze Pfeil kennzeichnet eine Bearbeitungsrichtung

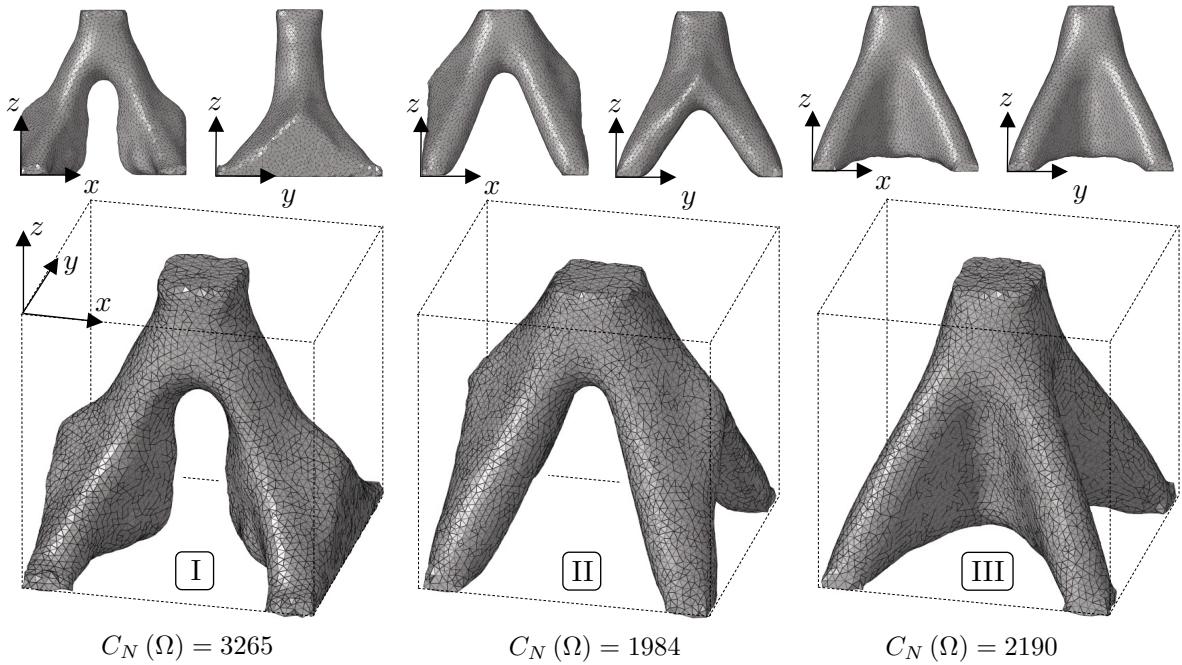
5.2.2 Optimierung mit Zugänglichkeitsrestriktion

Nun wird die Lösung der Optimierungsaufgabe unter dem Einfluss einer Zugänglichkeitsrestriktion vorgestellt. Die Optimierungsbeispiele werden mit zwei verschiedenen Werkzeuggeometrien durchgeführt. Dazu werden die in Tabelle 5–1 eingeführten Werkzeuge a) und b) ausgewählt. In Abbildung 5–3 ist die Dimensionierung der Werkzeuge im Vergleich zur Würfelstruktur gezeigt. Während Werkzeug a) eine vergleichsweise ‚sperrige‘ Geometrie aufweist, besitzt das Werkzeug b) eine ‚kompaktere‘ Form. Außerdem werden für jedes Werkzeug unterschiedliche Bearbeitungsrichtungen untersucht. Die Menge aller Bearbeitungsrichtungen pro Topologieoptimierung wird im weiteren Verlauf als *Bearbeitungskonfiguration* bezeichnet. Für dieses Optimierungsbeispiel werden drei unterschiedliche Konfigurationen eingeführt, die in Abbildung 5–4 gekennzeichnet sind.

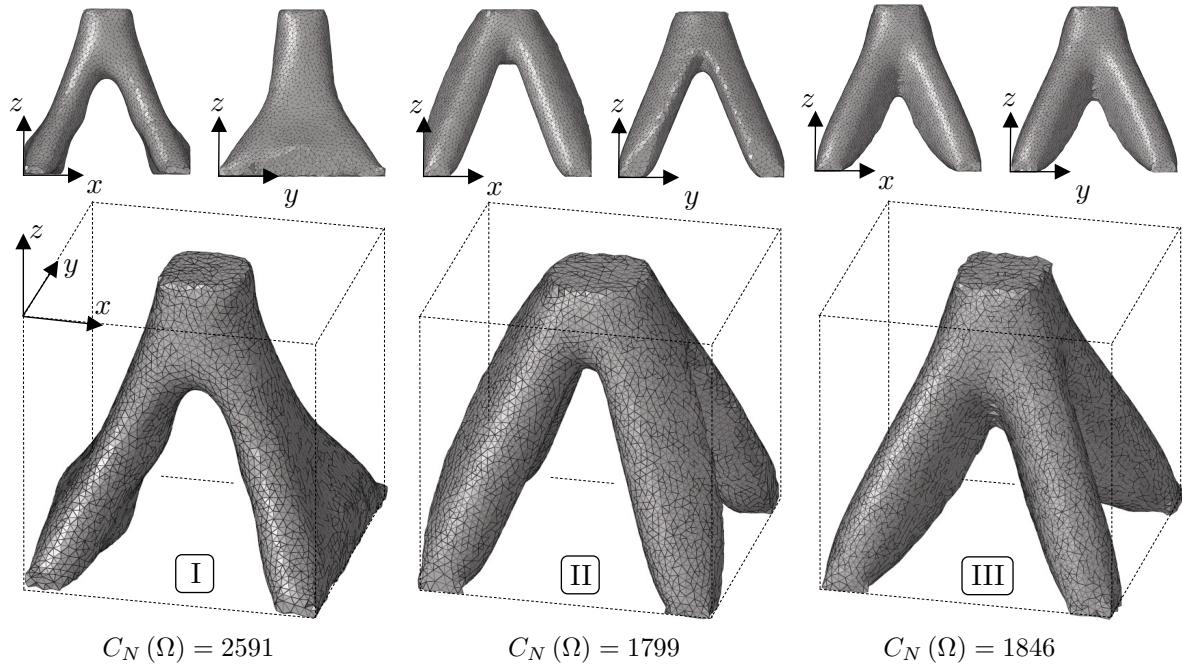
Die optimierten Strukturen unter Berücksichtigung beider Werkzeuge für sämtliche Bearbeitungskonfigurationen sind in Abbildung 5–5 dargestellt. Alle Strukturen erfüllen die vorgegebenen Restriktionen. Das beste Optimierungsergebnis aller Anwendungsbeispiele wird mit Werkzeug b) unter Bearbeitungskonfiguration II erzielt. Dabei wird nach insgesamt 91 Iterationen eine normierte mittlere Nachgiebigkeit von $C_N = 1799$ erreicht. Dieser Wert ist um 7.9 % höher als im Beispiel ohne Berücksichtigung der Fertigungsrestriktion.

Das schlechteste Optimierungsergebnis wird mit Werkzeug a) unter Konfiguration I erzielt. Nach insgesamt 110 Iterationen beträgt die normierte mittlere Nachgiebigkeit $C_N = 3265$. Dieser Wert ist um 95.7 % größer als bei der Optimierung ohne Berücksichtigung der Fertigungsrestriktion.

In Abbildung 5–6 ist exemplarisch das Konvergenzverhalten beider Restriktionen sowie der Zielfunktion für Konfiguration I unter Verwendung von Werkzeug a) gezeigt. Zu Beginn der Optimierung sind 6.7 % der Strukturoberfläche unzugänglich. Dieser Bereich ist der kugelförmigen Aussparung im Startentwurf zuzuordnen. Auffällig ist der sprunghafte Anstieg der unzugänglichen Fläche von 6.7 % auf 41 % in der dritten Iteration. Der Grund dafür ist, dass die Strukturoberfläche zu Beginn auf den Designraumgrenzen liegt. Diese sind in diesem Beispiel als Rohteilgrenzen und damit als zugänglich definiert. Erst ab der dritten Iteration entstehen neben der kugelförmigen Aussparung erste Bereiche, an denen keine Werkzeugzugänglichkeit mehr gegeben ist. Der Verlauf der unzugänglichen Fläche verdeutlicht, dass die Minimierung des Randpotentials in kontinuierlichen Schritten zu einer Erfüllung der Fertigungsrestriktion führt. Zwischen der 30. und der 65. Iteration steigt das Strukturvolumen an, nachdem es bis auf einen Wert von $V_F = 0.17$ gesunken ist. Dies führt dazu, dass der Anteil unzugänglicher Fläche temporär auf einem Wert von ca. 16 % stagniert, bevor er bis zur 69. Iteration



(a) Optimierungsergebnisse unter Verwendung von Werkzeug a)



(b) Optimierungsergebnisse unter Verwendung von Werkzeug b)

Abbildung 5–5: Topologieoptimierung der Würfelstruktur unter dem Einfluss einer Zugänglichkeitsrestriktion bei drei unterschiedlichen Bearbeitungskonfigurationen und zwei verschiedenen Werkzeuggeometrien

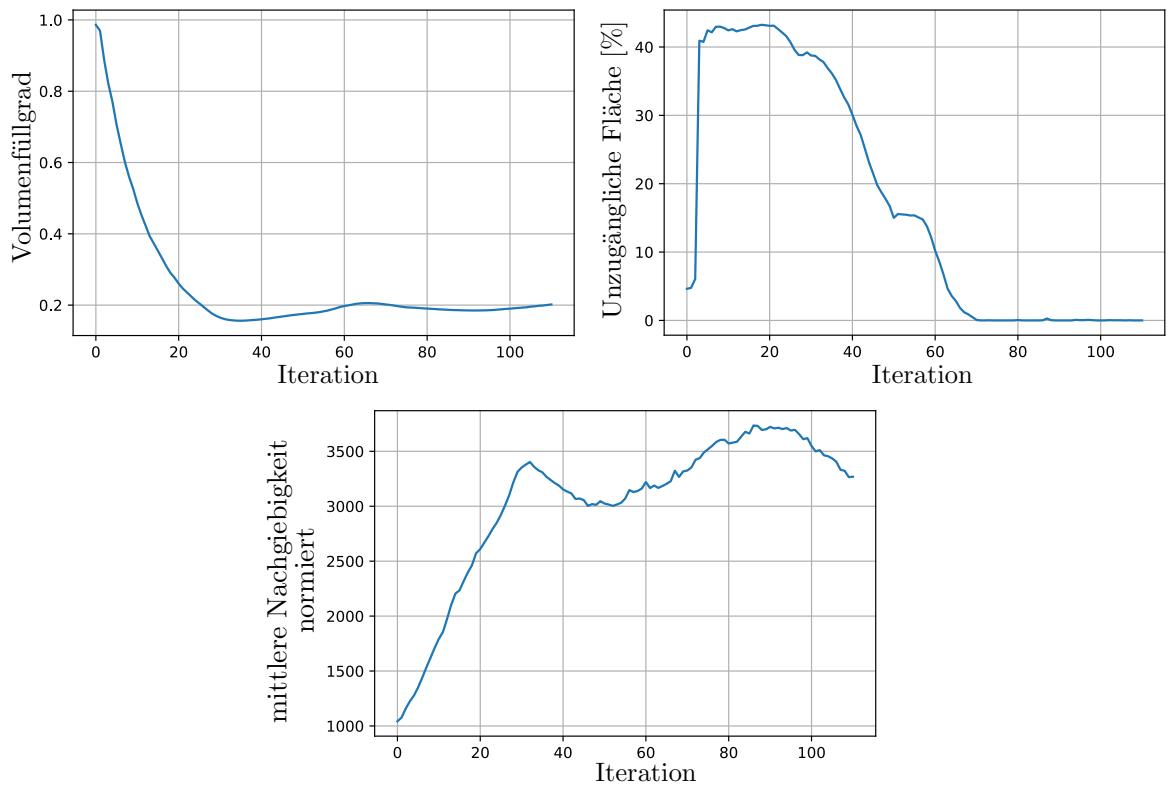


Abbildung 5–6: Konvergenzverhalten der Volumen- und Zugänglichkeitsrestriktion sowie der mittleren Nachgiebigkeit bei Verwendung von Werkzeug a) unter Bearbeitungskonfiguration I

auf einen Wert von 0 % fällt. Bis zur Erfüllung der Volumenrestriktion und des Konvergenzkriteriums bleibt der Anteil unzugänglicher Fläche bei nahezu 0 %. Obwohl in Konfiguration III die meisten Bearbeitungsrichtungen zur Verfügung stehen, werden damit bei beiden Werkzeugen nicht die besten Optimierungsergebnisse erzielt. Zu deuten ist dieses Verhalten folgendermaßen. In Bearbeitungskonfiguration III werden viele Oberflächenbereiche redundant durch die fünf vorhandenen Bearbeitungsrichtungen abgedeckt. Im Gegensatz dazu wird durch die z -Richtung in Konfiguration II insgesamt ein größerer Oberflächenbereich zugänglich. Trotz der nur drei verfügbaren Bearbeitungsrichtungen kann sich eine Struktur ausbilden, die stärker der Struktur ähnelt, die ohne Berücksichtigung der Fertigungsrestriktion entsteht. Damit einhergehend ist, dass eine kompaktere Werkzeugform tendenziell zu besseren Optimierungsergebnissen führt. Solche Werkzeuge können im Vergleich zu sperrigen Werkzeugen mehr Oberflächenbereiche erreichen. Aus diesem Grund werden mit Werkzeug b) in jedem Optimierungsbeispiel die besten Ergebnisse erzielt.

Auf Basis dieser Beobachtungen könnte eine Strategie zur Auswahl der Bearbeitungsrichtungen darauf basieren, zunächst eine Optimierung ohne Fertigungsre-

striktion durchzuführen. Anhand der optimierten Struktur können die Bearbeitungsrichtungen anschließend ausgewählt werden. Diese müssen so gewählt werden, dass ein größtmöglicher Anteil der Oberfläche der optimierten Struktur zugänglich wird. Bei zwei möglichen Bearbeitungsrichtungen bzw. Maschinenspannvorgängen wären das in diesem Beispiel die z -Richtung und die $-z$ -Richtung. Unter den definierten Bearbeitungskonfigurationen wird mit Konfiguration II der größte Oberflächenanteil der optimierten Struktur aus Abbildung 5–2b zugänglich. Diese Methodik lässt sich auch automatisiert umsetzen. Vor der Optimierung wird dann nur noch die Anzahl der Bearbeitungsrichtungen vorgegeben. In jeder Iteration werden die Bearbeitungsrichtungen ausgewählt, die zu einer maximalen Zugänglichkeit der Strukturoberfläche führen. Eine im Vorfeld stattfindende Optimierung ohne Fertigungsrestriktion ist dann nicht nötig.

	Ohne	Werkzeug a)			Werkzeug b)		
Bearbeitungskonfiguration	–	I	II	III	I	II	III
Normierte mittlere Nachgiebigkeit	1668	3265	1984	2190	2591	1799	1846
Änderung Zielfunktion [%]	–	95.7	18.9	31.2	55.3	7.9	10.7
Maximal entstandener Anteil unzugänglicher Oberfläche [%]	–	43.2	31.9	25.2	33.8	25.0	24.8
Anzahl Iterationen	86	110	103	118	106	91	121
Änderung Anzahl Iterationen [%]	–	27.9	19.8	37.2	23.3	5.8	40.7
Iterationsdauer [s]	36	42	42	42	42	42	42

Tabelle 5–4: Resultate der Optimierungen der Würfelstruktur. In der grau markierten Spalte stehen die Ergebnisse ohne Berücksichtigung der Fertigungsrestriktion. Auf dieses Beispiel beziehen sich Angaben zu prozentualen Änderungen

In Tabelle 5–4 sind ergänzend die Iterationsdauern angegeben. Im Vergleich zur Optimierung ohne Fertigungsrestriktion verlängert sich die durchschnittliche Iterationsdauer um ca. 17 %. Außerdem ist festzuhalten, dass sich mit Nutzung der Fertigungsrestriktion die Anzahl benötigter Iterationen erhöht.

5.3 Kragträger

Als nächstes Anwendungsbeispiel wird die Topologieoptimierung des in Kapitel 3.6.2 behandelten Kragträgers unter dem Einfluss von Fertigungsrestriktionen untersucht. Die Zielfunktion und Volumenrestriktion des Einführungsbeispiels werden für die folgenden numerischen Experimente übernommen. Von daher erfolgt die Minimierung der mittleren Nachgiebigkeit ebenfalls unter der Restriktion, einen Volumenfüllgrad von $V_F = 0.15$ zu erreichen. Im Rahmen mehrerer numerischer Beispiele wird zunächst explizit der Einfluss von Wandstärkenrestriktionen auf die Optimierungsergebnisse analysiert. Anschließend wird eine kombinierte Anwendung beider Fertigungsrestriktionen untersucht. In den Beispielen werden keine Löcher im Startentwurf vorgegeben.

5.3.1 Optimierung ohne Fertigungsrestriktion

Die Optimierungsergebnisse ohne den Einfluss von Fertigungsrestriktionen sind bereits in Kapitel 3.6.2 diskutiert worden. In Abbildung 3–17 ist die optimierte Struktur gezeigt. Zum Vergleich mit den nachfolgenden Beispielen dieses Kapitels sind die numerischen Ergebnisse in der linken Spalte von Tabelle 5–5 angegeben.

5.3.2 Optimierung unter verschiedenen Mindestwandstärken

Um den Einfluss von einzuhaltenden Mindestwandstärken auf die Optimierungsergebnisse zu untersuchen, wird eine Reihe von numerischen Beispielen durchgeführt. Diese umschließt die Vorgabe sechs unterschiedlicher Mindestwandstärken. Beginnend bei einer Mindestwandstärke von 30 mm wird diese in jedem weiteren Beispiel um 10 mm erhöht. Im letzten Beispiel beträgt die einzuhaltende Mindestwandstärke 80 mm. Wie Allaire et al. (2016) betonen, kann eine Wandstärkenrestriktion Topologieänderungen hemmen. Eine solche Hemmung entsteht immer dann, wenn dünne Strukturbereiche kurz vor einer Verschmelzung ihrer dortigen Strukturränder stehen. Zur Einhaltung der Mindestwandstärke werden entsprechende Bereiche „verdickt“, bevor die Verschmelzung der Strukturgrenzen stattfinden kann. Aus diesem Grund sollte die Wandstärkenrestriktion nicht von Beginn der Optimierung an aktiv sein. In den folgenden Beispielen wird diese ab der 45. Iteration aktiviert, sobald für den Volumenfüllgrad $0.13 < V_F < 0.17$ gilt.

In Abbildung 5–7 sind die optimierten Strukturen für Mindestwandstärken von 30 mm bis 50 mm dargestellt. Die optimierten Strukturen für Mindestwandstärken

von 60 mm bis 80 mm sind in Abbildung 5–8 zu sehen. Alle numerischen Ergebnisse sind der Tabelle 5–5 zu entnehmen.

Bei einer Gegenüberstellung der Optimierungsergebnisse fällt auf, dass die Mindestwandstärke mit dem erreichten Wert der Zielfunktion korreliert. Je höher die einzuhaltende Wandstärke ist, desto größer wird die mittlere Nachgiebigkeit der optimierten Strukturen. Bei der geringsten Mindestwandstärke liegt die normierte mittlere Nachgiebigkeit bei $C_N = 3196$. Dagegen liegt diese bei der höchsten Mindestwandstärke bereits bei $C_N = 12850$, was einem Anstieg um 311.5 % entspricht. Damit einhergehend ist ein Anstieg der benötigten Iterationen. Zur Deutung dieses Verhaltens sei zunächst auf die Struktur mit einer Mindestwandstärke von 30 mm verwiesen. Zur Aufnahme der Biegespannungen wird vergleichsweise viel Strukturmaterial auf der Ober- und Unterseite des Kragträgers verteilt. In den dazwischen liegenden Bereichen ist die Biegebelastung geringer. Aus diesem Grund wird in diesen Bereichen weniger Strukturmaterial ausgebildet und zusätzlich ein Loch erzeugt. Wird nun die Mindestwandstärke erhöht, muss zur Erfüllung der Wandstärkenrestriktion mehr Strukturmaterial in den weniger biegebeanspruchten Bereich zwischen Ober- und Unterseite des Kragträgers gelegt werden. (Vorausgesetzt, die Mindestwandstärke ist höher als die Wandstärke im entsprechenden Bereich.) Aufgrund der Volumenrestriktion muss daraufhin Strukturmaterial von der stärker belasteten Ober- und Unterseite entfernt werden. Dies führt letztendlich zu einer Erhöhung der mittleren Nachgiebigkeit. Ab einer Wandstärke von 70 mm muss zur Erfüllung der Volumenrestriktion zusätzlich der Abstand zwischen den oberen und unteren Strukturbereichen reduziert werden. Dies führt wiederum zu erhöhten Verschiebungen an der Krafteinleitungsstelle. Bei einer Mindestwandstärke von 80 mm wird kein Loch mehr erzeugt. Ober- und Unterseite verschmelzen im vorderen Bereich des Trägers zu einer zylindrischen Struktur. Zur Erfüllung beider Restriktionen ist es nicht mehr möglich, Material in die stark biegebeanspruchten Bereiche zu verlagern. Daraus resultiert zwangsläufig ein sprunghafter Anstieg der mittleren Nachgiebigkeit.

5.3.3 Optimierung unter Zugänglichkeits- und Wandstärkenrestriktion

Als Nächstes wird die Topologieoptimierung des Kragträgers unter dem Einfluss einer Zugänglichkeits- und Wandstärkenrestriktion untersucht. Wie bei der Optimierung der Würfelstruktur werden unterschiedliche Bearbeitungskonfigurationen zugrunde gelegt. Die zwei für dieses Beispiel gewählten Konfigurationen sind in

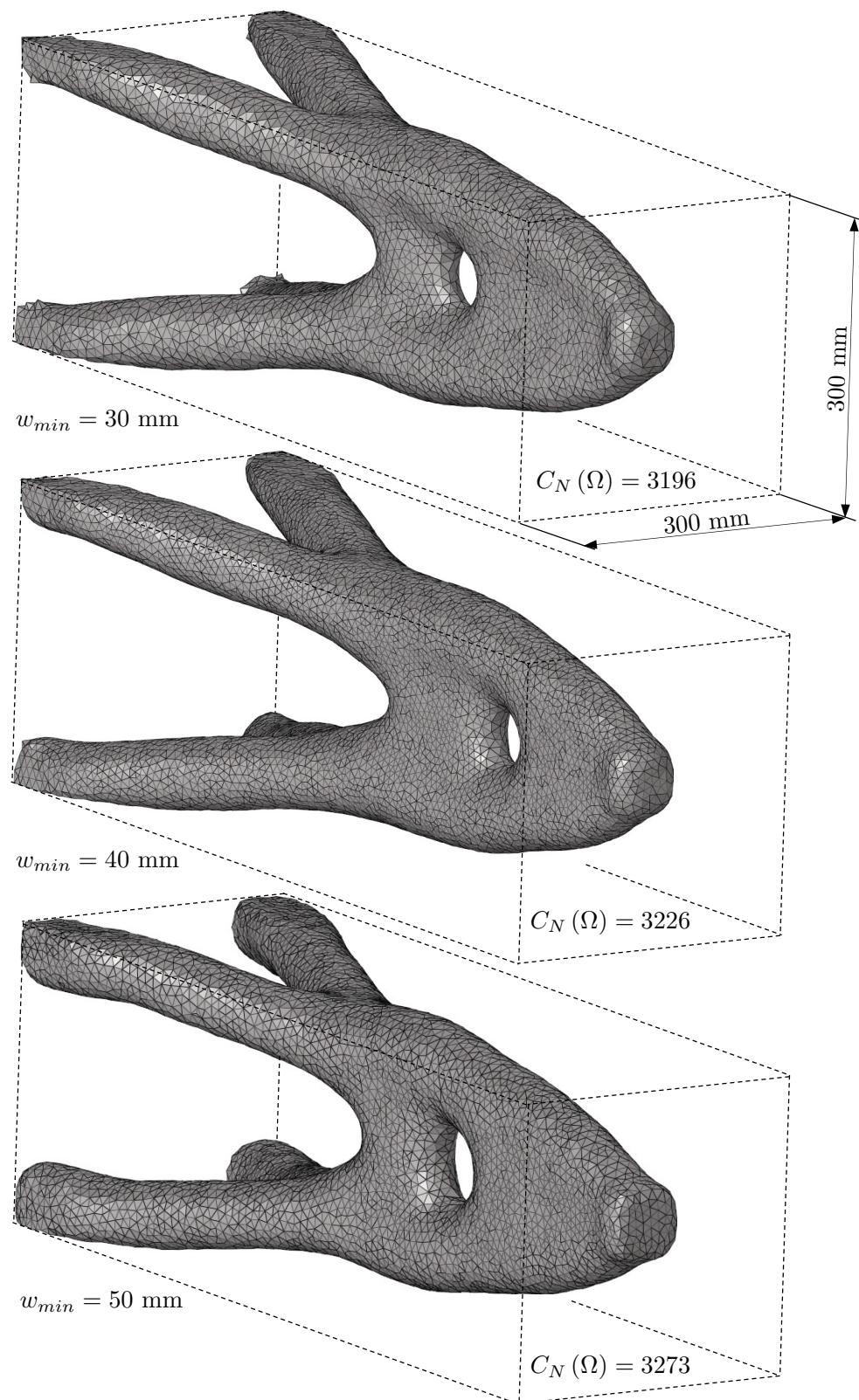


Abbildung 5–7: Topologieoptimierung des Kragträgers unter dem Einfluss einer Volumen- und Wandstärkenrestriktion. Gezeigt sind die optimierten Strukturen bei Mindestwandstärken von 30 mm bis 50 mm

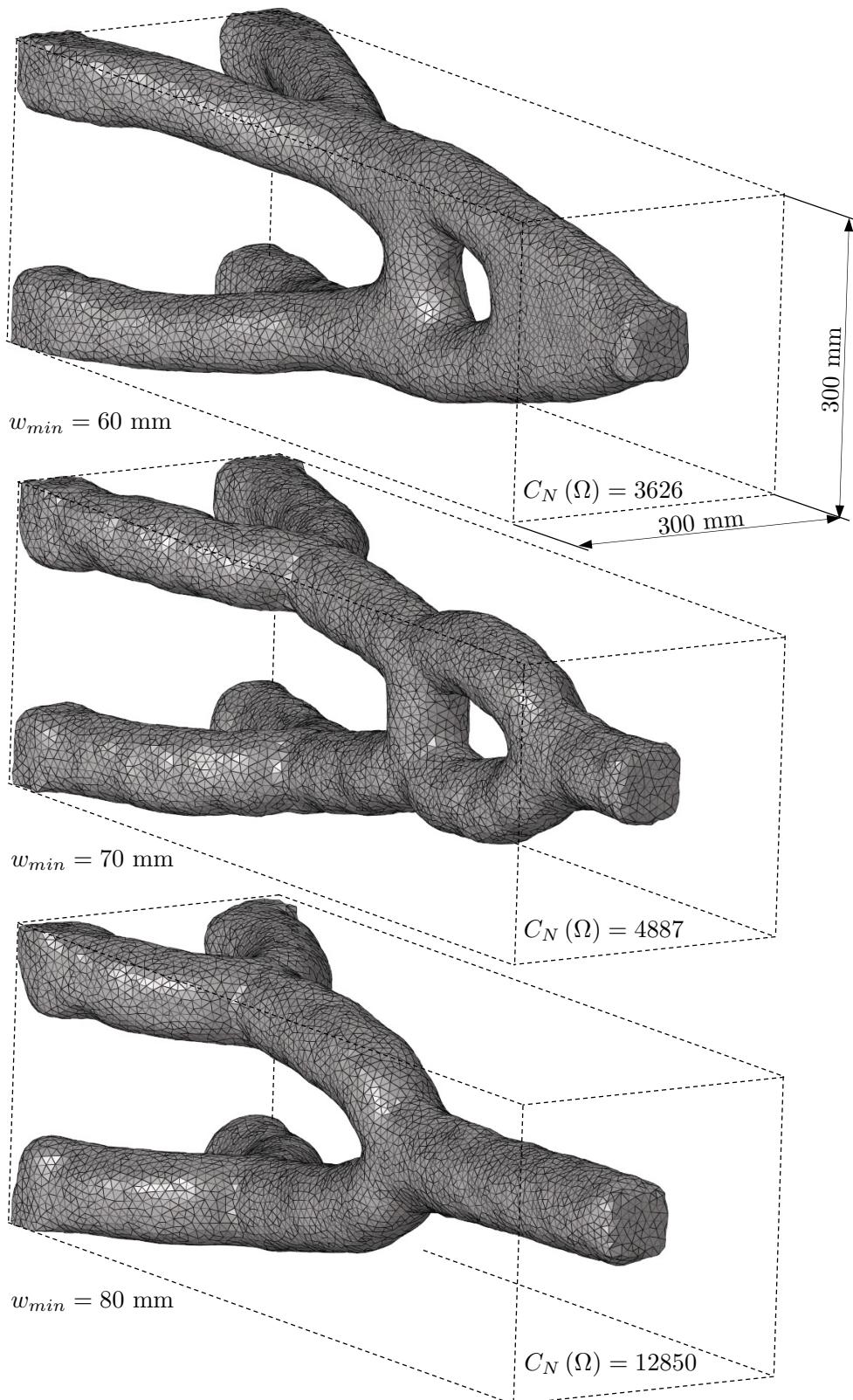


Abbildung 5–8: Topologieoptimierung des Kragträgers unter dem Einfluss einer Volumen- und Wandstärkenrestriktion. Gezeigt sind die optimierten Strukturen bei Mindestwandstärken von 60 mm bis 80 mm

	Ohne	Mit Wandstärkenrestriktion					
	–	30	40	50	60	70	80
Mindestwandstärke [mm]	–	30	40	50	60	70	80
Normierte mittlere Nachgiebigkeit	3123	3196	3226	3273	3626	4887	12850
Änderung Zielfunktion [%]	–	2.3	3.3	4.8	16.1	56.5	311.5
Maximal entstandener Anteil dünnwandiger Oberfläche [%]	–	1.8	3.7	12.4	20.8	32.6	69.0
Anzahl Iterationen	68	72	77	95	98	101	156
Änderung Anzahl Iterationen [%]	–	5.9	13.2	39.7	44.1	48.5	129.4
Iterationsdauer [s]	45	55	55	55	55	55	55

Tabelle 5–5: Resultate der Optimierungen des Kragträgers mit verschiedenen Mindestwandstärken. In der grau markierten Spalte stehen die Ergebnisse ohne Berücksichtigung der Wandstärkenrestriktion. Darauf beziehen sich Angaben zu prozentualen Änderungen

Abbildung 5–9 dargestellt. Für die Optimierungen werden Werkzeug c) und Werkzeug d) verwendet (siehe auch Tabelle 5–1). Ein Vergleich der Dimensionierung der Werkzeuge mit den Abmessungen der Kragträgervorderseite ist in Abbildung 5–10 gezeigt. Als einzuhaltende Mindestwandstärke wird exemplarisch $w_{min} = 50$ mm gewählt.

Die optimierten Strukturen sind für beide Bearbeitungskonfigurationen unter

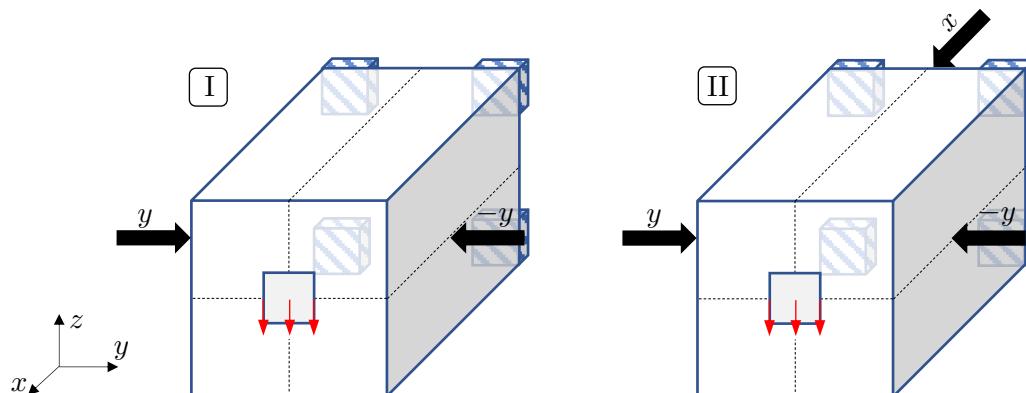


Abbildung 5–9: Bearbeitungskonfigurationen I und II des Kragträgers. Jeder schwarze Pfeil kennzeichnet eine Bearbeitungsrichtung

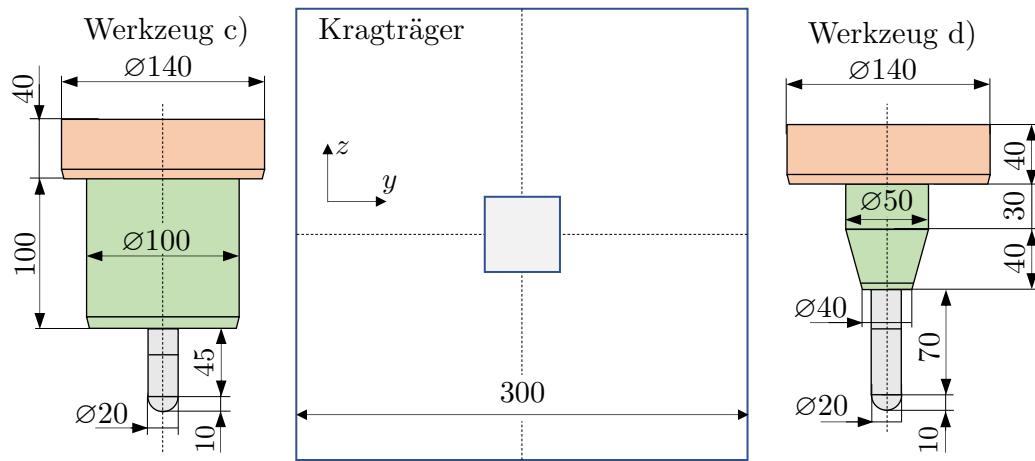
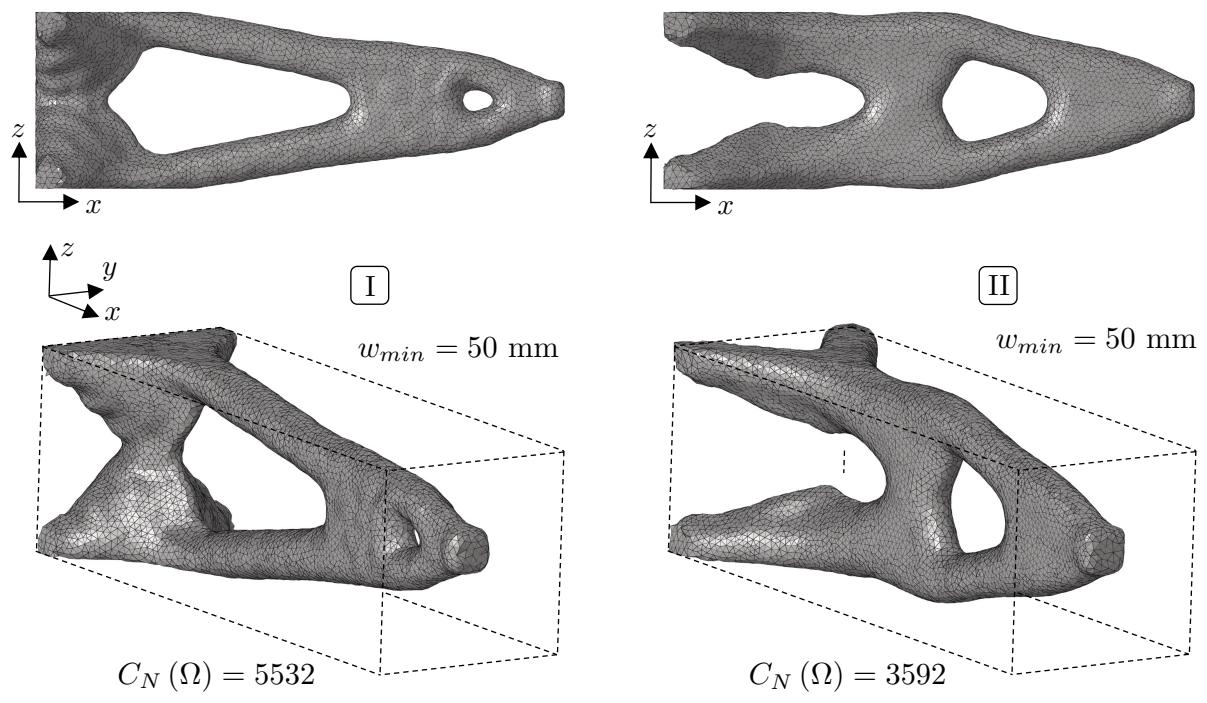


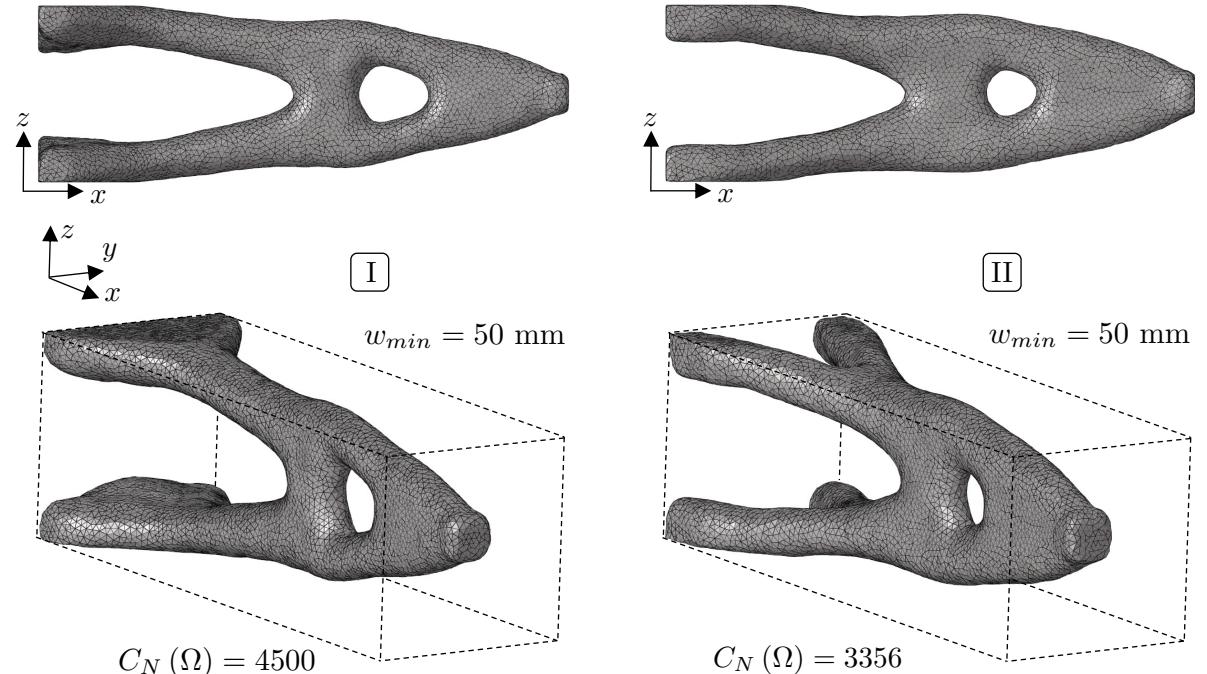
Abbildung 5–10: Vergleich der Dimensionierung der Werkzeuge c) und d) mit der des Kragträgers. Für eine Auflistung aller Maße siehe Tabelle 5–1. Alle Maße sind in mm angegeben

Verwendung von Werkzeug c) in Abbildung 5–11a dargestellt. Darunter sind in Abbildung 5–11b die jeweiligen Strukturen bei Verwendung von Werkzeug d) zu sehen. Das beste Design entsteht bei Verwendung von Werkzeug d) mit Bearbeitungskonfiguration II. Dessen normierte mittlere Nachgiebigkeit beträgt $C_N = 3356$ und ist damit um weitere 2.5 % höher als bei ausschließlicher Berücksichtigung der Wandstärkenrestriktion. Im Gegensatz dazu wird das schlechteste Design mit Werkzeug c) unter Konfiguration I erzielt. Die Zielfunktion nimmt dabei einen Wert von $C_N = 5532$ an. Im Vergleich zur exklusiven Berücksichtigung der Mindestwandstärke ergibt sich durch die Zuschaltung der Zugänglichkeitsrestriktion ein Anstieg der mittleren Nachgiebigkeit um 70.2 %.

Auffällig sind die Materialansammlungen auf der fixierten Rückseite des Kragträgers. Bis auf den Versuch unter Konfiguration II mit Werkzeug d) treten diese Ansammlungen in verschiedenen Ausprägungsgraden immer auf. Der Grund für deren Entstehung ist die dort eingeschränkte Werkzeugzugänglichkeit. Das dortige Strukturmaterial kann nicht auf mechanisch wichtigere Stellen verlagert werden. Erst bei Verwendung von Werkzeug d) unter Konfiguration II kann dieser Bereich nahezu gänzlich erreicht werden. Die damit optimierte Struktur ähnelt daher in Form und mechanischen Eigenschaften stark derjenigen, die bei ausschließlicher Berücksichtigung der Wandstärkenrestriktion resultiert. Dies unterstreicht erneut, dass sowohl die Bearbeitungsrichtungen als auch die Werkzeuggeometrie entscheidend das Optimierungsergebnis beeinflussen. Sind die Bearbeitungsrichtungen identisch, werden die besseren Ergebnisse mit dem kompakteren Werkzeug erzielt. An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass die beschriebenen Materialansammlungen auch bei einer Reduktion des Zielvolumenfüllgrades weiter bestehen bleiben



(a) Optimierte Strukturen unter Verwendung von Werkzeug c)



(b) Optimierte Strukturen unter Verwendung von Werkzeug d)

Abbildung 5–11: Topologieoptimierung des Kragträgers unter dem Einfluss einer Volumenrestriktion, Zugänglichkeitsrestriktion sowie einer Wandstärkenrestriktion mit zwei unterschiedlichen Bearbeitungskonfigurationen und zwei verschiedenen Werkzeuggeometrien

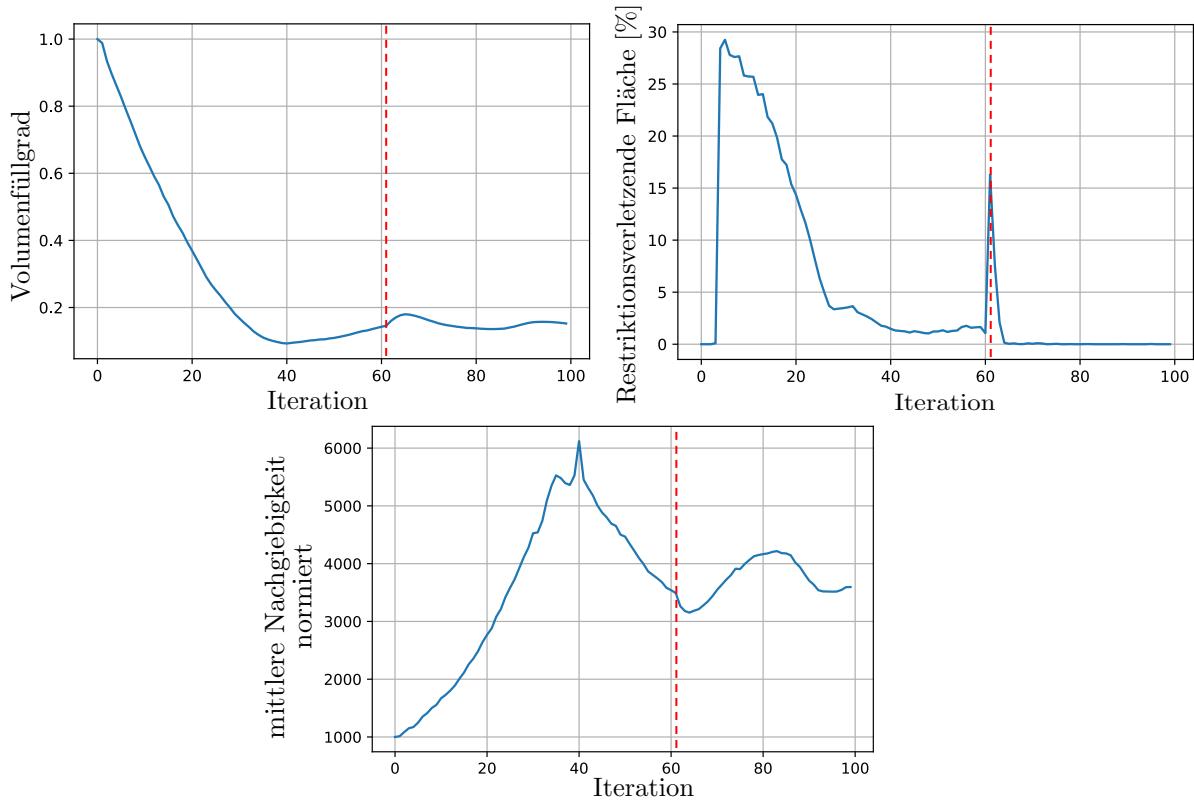


Abbildung 5–12: Konvergenzverhalten der Volumenrestriktion, beider Fertigungsrestriktionen und der Zielfunktion für Werkzeug c) mit Bearbeitungskonfiguration II. In der rot markierten Iteration 61 wird die Wandstärkenrestriktion aktiviert

würden. Da die genutzten Werkzeuge diese Bereiche aufgrund der Lagerstellen nicht erreichen können, müsste an anderen Stellen der Struktur das Volumen weiter reduziert werden. Ist das gewünschte Zielvolumen jedoch zu niedrig, kann nicht mehr genügend Strukturmaterial zur Verbindung der Lager- und Belastungsstellen verwendet werden. In diesem Fall würde die Optimierung abbrechen.

In Abbildung 5–12 ist exemplarisch das Konvergenzverhalten für die Optimierung unter Bearbeitungskonfiguration II mit Werkzeug c) gezeigt. Wie im vorherigen Beispiel ist der schlagartige Anstieg restriktionsverletzender Bereiche zu Beginn der Optimierung darauf zurückzuführen, dass der Startentwurf als vollständig herstellbar definiert ist bzw. als Rohteil vorausgesetzt wird. Auffällig ist der sprunghafte Anstieg entsprechender Bereiche ab der 61. Iteration. Dieser entsteht durch die Aktivierung der Wandstärkenrestriktion. Zum Zeitpunkt der Aktivierung gehören ca. 16 % der Oberfläche Strukturbereichen an, welche die Mindestwandstärke unterschreiten. Durch die Minimierung des Randpotentials an den entsprechenden Bereichen werden die Wandstärken innerhalb von drei Iterationen auf den

geforderten Mindestwert erhöht. Wie anhand des Volumenfüllgrades zu sehen ist, führt das induzierte Strukturwachstum zwangsläufig zu einem beschleunigten Anstieg des Strukturvolumens. Dies führt wiederum zu einer beschleunigten Reduktion der mittleren Nachgiebigkeit ab der 61. Iteration. In den folgenden Iterationen muss das Strukturvolumen wieder auf den Zielwert reduziert werden, was zu einem erneuten Anstieg der mittleren Nachgiebigkeit führt. In der 99. Iteration ist das Konvergenzkriterium schließlich erfüllt. Die Aktivierung der Wandstärkenrestriktion beeinflusst die Anzahl benötigter Iterationen. Je stärker der schlagartige Anstieg restriktionsverletzender Bereiche bei der Aktivierung der Wandstärkenrestriktion ist, desto stärker prägt sich die zuvor beschriebene Schwankung der Zielfunktion und des Strukturvolumens aus. Dementsprechend werden mehr Iterationen benötigt, um das Konvergenzkriterium zu erfüllen.

Weiterhin ist zu beobachten, dass die Optimierung mit Werkzeug d) unter Konfiguration II nahezu die gleiche Anzahl Iterationen benötigt wie die Optimierung bei reiner Berücksichtigung der Wandstärkenrestriktion. Dies liegt daran, dass in dem entsprechenden Beispiel bereits ab der 36. Iteration alle Oberflächenbereiche zugänglich sind. Zum Zeitpunkt der Aktivierung der Wandstärkenrestriktion – auch hier in der 61. Iteration – beeinflusst das induzierte Strukturwachstum an den zu dünnen Bereichen nahezu kaum die Zugänglichkeit der Strukturoberfläche. Es stellt sich von da an ein ähnlicher Optimierungsverlauf wie im Beispiel bei reiner Berücksichtigung der Wandstärkenrestriktion ein.

Abschließend sind in Tabelle 5–6 die numerischen Ergebnisse zusammengefasst. Je höher die fertigungsbezogenen geometrischen Anforderungen aufgrund vorliegender Werkzeuggeometrien und verfügbarer Bearbeitungsrichtungen an die Struktur sind, desto schlechter werden deren mechanischen Eigenschaften. Bei zusätzlicher Berücksichtigung der Zugänglichkeitsrestriktion ist die erzielte mittlere Nachgiebigkeit in allen Fällen höher als bei ausschließlicher Nutzung der Wandstärkenrestriktion. Die Iterationsdauern erwecken bei einem Vergleich mit Tabelle 5–5 den Anschein, dass die Zugänglichkeitsrestriktion deutlich weniger Rechenzeit in Anspruch nähme als die Wandstärkenrestriktion. Den größten Anteil der Rechenzeit nimmt jedoch die gemeinsame Velocity Extension in Anspruch (siehe auch Kapitel 4.6). Von daher verursacht die Zuschaltung der Zugänglichkeitsrestriktion in diesem Beispiel lediglich einen Anstieg der Iterationsdauern um weitere 2 s.

	Ohne	Werkzeug c)	Werkzeug d)		
Bearbeitungskonfiguration	–	–	I	II	I
Mindestwandstärke [mm]	–	50	50	50	50
Normierte mittlere Nachgiebigkeit	3123	3273	5532	3592	4500
Änderung Zielfunktion [%]	–	4.8	77.1	15.0	44.1
Maximal entstandener Anteil restriktionsverletzender Oberfläche [%]	–	12.4	35.1	29.3	24.4
Anzahl Iterationen	68	95	109	99	99
Änderung Anzahl Iterationen [%]	–	39.7	60.3	45.6	45.6
Iterationsdauer [s]	45	55	57	57	57

Tabelle 5–6: Resultate der Optimierungen des Kragträgers. In der ersten Spalte stehen die Ergebnisse ohne Berücksichtigung der Fertigungsrestriktionen. Auf dieses Beispiel beziehen sich die Angaben zu prozentualen Änderungen

5.4 Lagerhalterung aus der Luftfahrtindustrie

Als abschließendes Beispiel wird ein in der Luftfahrtindustrie eingesetztes Bauteil optimiert. Es handelt sich dabei um die in Abbildung 5–13 gezeigte Lagerhalterung, die in Flugzeugtriebwerken zur Lagerung der Wartungsluken benötigt wird. Die Optimierungsaufgabenstellung lehnt sich an einen Wettbewerb (*Airplane Bearing Bracket Challenge*) der Firma GrabCAD® aus dem Jahr 2016 an, in dem eine solche Lagerhalterung für eine anschließende additive Fertigung optimiert wurde. Eine Referenz zur Wettbewerbsspezifikation ist im Literaturverzeichnis unter GradCAD zu finden.

Während des Betriebs wird die Lagerhalterung durch zwei verschiedene Lastfälle beansprucht. Diese sind in Abbildung 5–14 gekennzeichnet. Dazu zählen die in Abbildung 5–14a gekennzeichnete Belastung von $F_x = 5$ kN in x -Richtung und die in Abbildung 5–14b gezeigte Belastung von $F_z = 10$ kN in $-z$ -Richtung. Die Belastung wird im Schwerpunkt des Lagersitzes aufgebracht. (In der ursprünglichen Wettbewerbsspezifikation wird ein dritter Lastfall mit einer Kraft, die um 45° zwischen F_x und F_z geneigt angreift, berücksichtigt. Da der Fokus dieses Kapitels auf der Demonstration der Topologieoptimierung unter Einfluss der Fräsestruktions

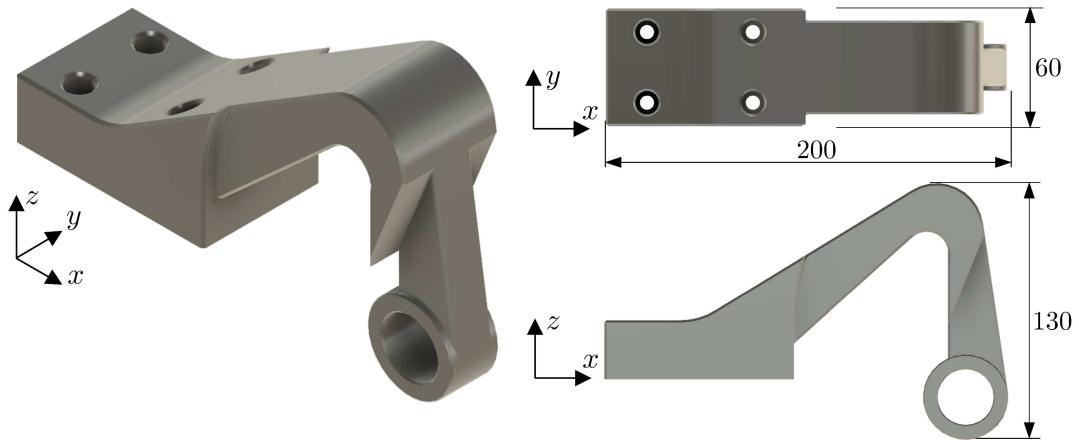


Abbildung 5–13: Lagerhalterung einer Triebwerk-Wartungsluke als CAD-Modell. Alle Maße sind in mm angegeben

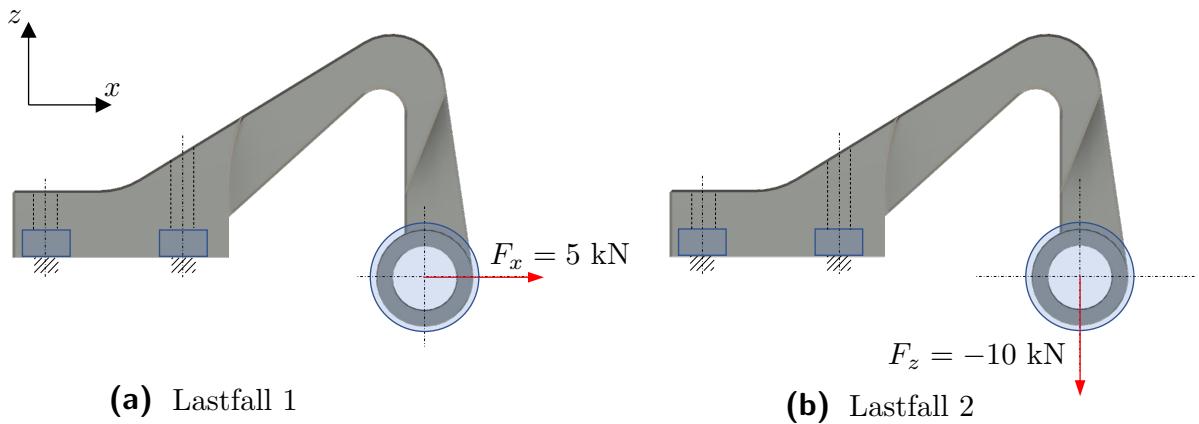
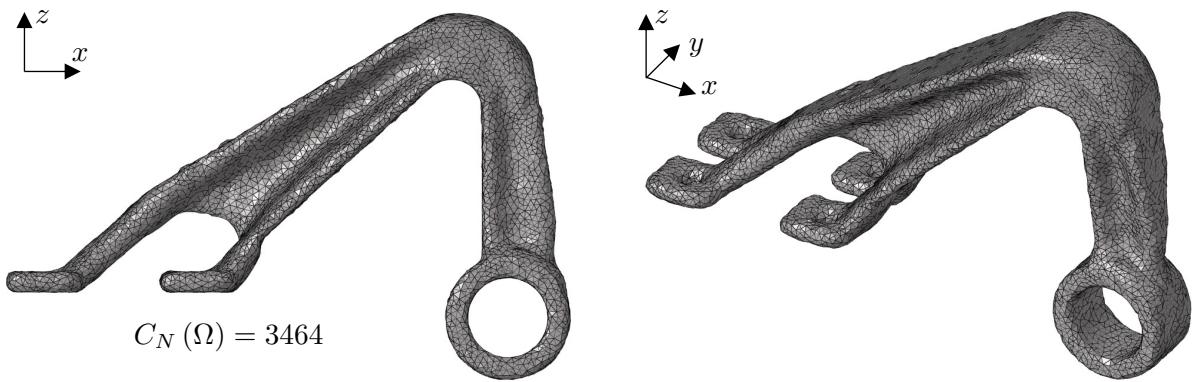
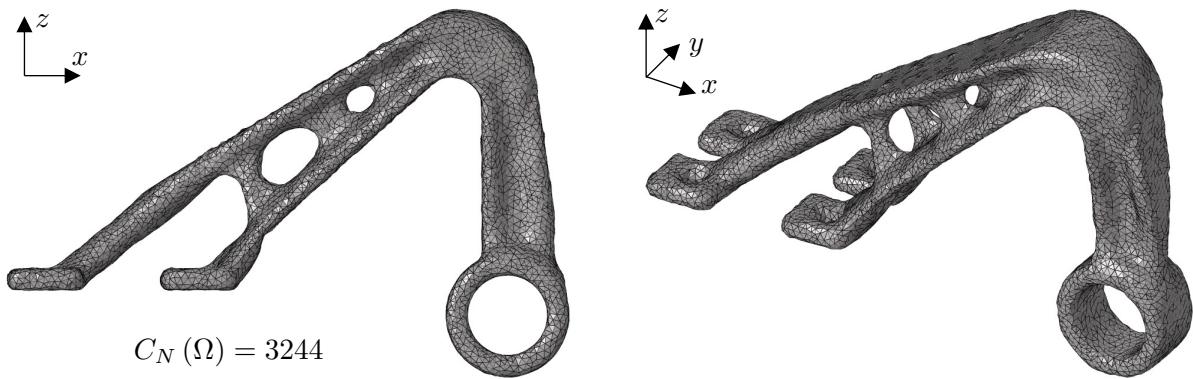


Abbildung 5–14: Belastung der Lagerhalterung durch zwei Lastfälle. Die Nicht-Design-Bereiche sind blau markiert

liegt, wird dieser Lastfall zur Vereinfachung im Folgenden vernachlässigt.) Zur Montage der Lagerhalterung sind vier Schraubverbindungen vorgesehen. In der Struktursimulation werden diese Verbindungen als feste Fixierungen mit einem starren Untergrund modelliert. Das Optimierungsziel besteht darin, die mittlere Nachgiebigkeit zu minimieren und dabei einen Volumenfüllgrad von $V_z = 0.4$ zu erreichen. Wie in den vorherigen Beispielen wird die mittlere Nachgiebigkeit so normiert, dass der vollständig mit Strukturmaterial ausgefüllte Entwurfsraum den Wert $C_N = 1000$ annimmt. Während der Optimierung werden die Sensitivitäten der Zielfunktion jeweils für beide Lastfälle bestimmt. Die Summe der Sensitivitäten beider Lastfälle wird zur Bildung der Entwicklungsgeschwindigkeiten genutzt. Als Werkstoff wird ein Chrom-Edelstahl (Werkstoffnummer 1.4545) vorausgesetzt. Die für die Struktursimulation benötigten Werkstoffkennwerte sind in Tabelle 5–2 zu finden.



(a) Topologieoptimierung der Lagerhalterung ohne die Vorgabe von Löchern



(b) Topologieoptimierung der Lagerhalterung mit der Vorgabe von Löchern

Abbildung 5–15: Topologieoptimierung der Lagerhalterung ohne Berücksichtigung von Fertigungsrestriktionen

Einige Bereiche des Bauteils, auch *Nicht-Design-Bereiche* genannt, dürfen während der Optimierung nicht verändert werden. Diese Bereiche sind in Abbildung 5–14 als blaue Flächen gekennzeichnet. Darunter fallen die vier Bohrungen für die Schraubverbindungen und der Lagersitz. Außerdem muss gewährleistet sein, dass die optimierte Lagerhalterung kollisionsfrei montiert werden kann. Von daher wird die Oberfläche der montierbaren Lagerhalterung aus Abbildung 5–13 als Designraumgrenze definiert. So ist gewährleistet, dass im Optimierungsverlauf kein Strukturmaterial über die maximalen Abmessungen der Lagerhalterung hinaus ausgebildet wird. Es werden zwei verschiedene Startentwürfe untersucht. Als erster Startentwurf wird der zur Verfügung stehende Designraum vollständig mit Strukturmaterial ausgefüllt. Im zweiten Startentwurf wird der mit Strukturmaterial aufgefüllte Designraum zusätzlich mit drei kugelförmigen Aussparungen versehen.

5.4.1 Optimierung ohne Fertigungsrestriktionen

Die Optimierung ohne Berücksichtigung der Fertigungsrestriktionen konvergiert nach 28 Iterationen. Im gefundenen Optimum nimmt die normierte mittlere Nachgiebigkeit den Wert $C_N = 3464$ an. In Abbildung 5–15a ist die optimierte Struktur dargestellt. Ein geringfügig besseres Ergebnis wird mit dem zweiten Startentwurf erzielt, der mit Löchern versehen ist. In Abbildung 5–15b ist die resultierende Struktur zu sehen. Die dazugehörige Optimierung konvergiert nach 30 Iterationen und die normierte mittlere Nachgiebigkeit beträgt im gefundenen Optimum $C_N = 3244$. Da mit der Vorgabe von Löchern im Startentwurf ein besseres Ergebnis erzielt wurde, wird dieser auch für die folgenden Optimierungen verwendet.

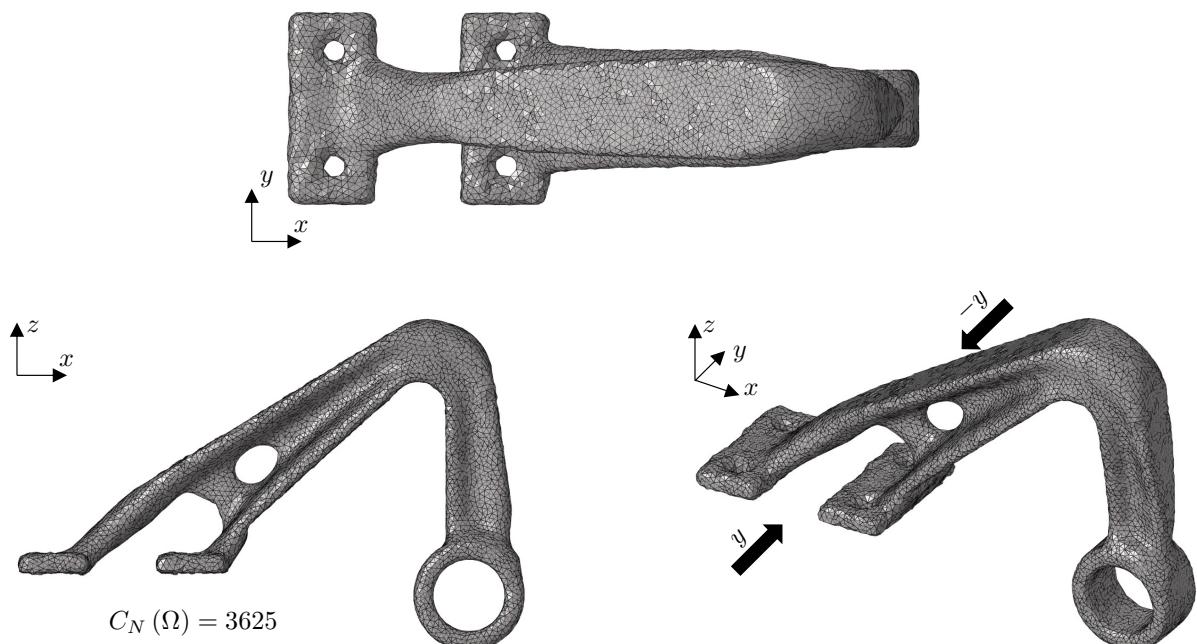


Abbildung 5–16: Topologieoptimierung der Lagerhalterung unter Berücksichtigung der Zugänglichkeitsrestriktion. Die schwarzen Pfeile markieren die Bearbeitungsrichtungen

5.4.2 Optimierung mit Fertigungsrestriktionen

Für die Topologieoptimierung der Lagerhalterung unter Berücksichtigung der Fertigungsrestriktionen wird zunächst nur die Gewährleistung der Werkzeugzugänglichkeit beachtet. Für die Fertigung wird das Werkzeug e) verwendet (siehe Tabelle 5–1). Gefertigt werden soll aus den zwei in Abbildung 5–16 gekennzeichneten Bearbeitungsrichtungen. Dazu zählen die $+y$ -Richtung sowie die $-y$ -Richtung.

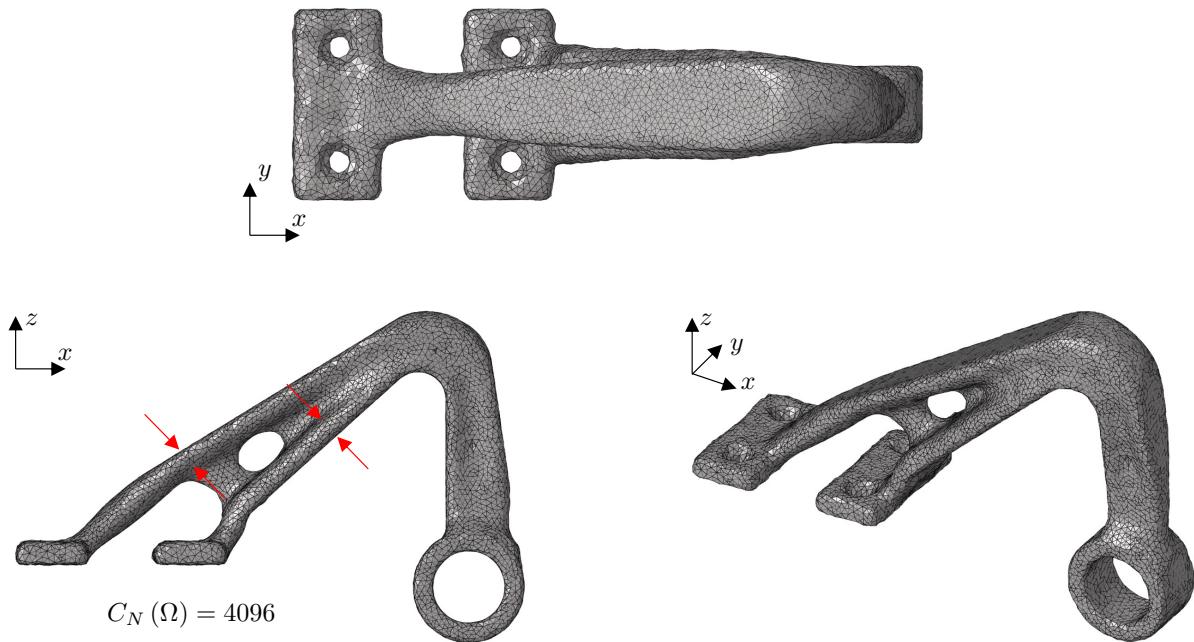


Abbildung 5–17: Topologieoptimierung der Lagerhalterung unter Berücksichtigung der Zugänglichkeits- und Wandstärkenrestriktion. Die roten Pfeile kennzeichnen Stellen, an denen die Wandstärke erhöht wurde

In dieser Kombination aus Bearbeitungsrichtungen und Werkzeuggeometrie sind mehrere Oberflächenbereiche der zuvor in Abschnitt 5.4.1 optimierten Strukturen unzugänglich. Insgesamt sind 4.5 % der Oberfläche der in Abbildung 5–15a gezeigten Struktur unzugänglich. Für die Struktur in Abbildung 5–15b beträgt der Anteil 6.9 %. In letzterer Struktur ist der Wert aufgrund von Hinterschneidungen im Bereich der ausgebildeten Löcher erhöht. In diesem Beispiel wird vorausgesetzt, dass die vier Montagebohrungen durch separate Bohrverfahren gefertigt werden. Dazugehörige Oberflächenbereiche werden demnach als zugänglich klassifiziert. Nach 59 Iterationen konvergiert das Optimierungsverfahren. Im gefundenen Optimum besitzt die Struktur eine normierte mittlere Nachgiebigkeit von $C_N = 3625$. Diese ist um 11.7 % höher als im vorherigen Beispiel ohne Berücksichtigung der Zugänglichkeitsrestriktion. In Abbildung 5–16 ist die optimierte Struktur gezeigt. Zur Gewährleistung der Werkzeugzugänglichkeit wird zwischen den Bohrungen Strukturmaterial ausgebildet. Die vorgegebenen Aussparungen wachsen im Verlauf der Optimierung aufgrund der dort eingeschränkten Werkzeugzugänglichkeit in sich zusammen.

Nun wird die Topologieoptimierung der Lagerhalterung um eine zusätzliche Wandstärkenrestriktion ergänzt. Im ursprünglichen Wettbewerb betrug die einzuhaltende Mindestwandstärke 1.2 mm. Diese Anforderung erfüllt die zuletzt optimierte Struktur bereits. Zu Demonstrationszwecken wird daher für dieses Beispiel eine erhöhte

Mindestwandstärke von 8 mm gewählt. Um potenzielle Topologieänderungen nicht zu hemmen, wird die Wandstärkenrestriktion nicht von Beginn an aktiviert. Ähnlich wie bei der Optimierung des Kragträgers wird diese ab der 45. Iteration aktiviert, sobald für den Volumenfüllgrad $0.38 < V_F < 0.42$ gilt.

Das Optimierungsverfahren konvergiert nach 67 Iterationen. Im gefundenen Optimum besitzt die Lagerhalterung eine normierte mittlere Nachgiebigkeit von $C_N = 4096$. Die Hinzunahme der Wandstärkenrestriktion führt demnach zu einem weiteren Anstieg der mittleren Nachgiebigkeit um 13.0 %. In Abbildung 5–17 ist die optimierte Struktur dargestellt. Zur Erfüllung der Wandstärkenrestriktion muss Strukturmateriale an die in der Abbildung rot markierten Stellen verlagert werden. Dabei werden die konkav gekrümmten Ränder auf der Ober- und Unterseite der Halterung verdickt. Zur Erfassung der dortigen Wandstärken wird das in Abbildung 4–8b verdeutlichte Prinzip eingesetzt. Zusammenfassend sind alle numerischen Ergebnisse dieses Kapitels in Tabelle 5–7 aufgelistet. Für die Optimierungen dieses Beispiels werden aufgrund der zwei zugrunde liegenden Lastfälle zwei FE-Simulationen pro Iteration durchgeführt. Dadurch steigen die Iterationsdauern im Vergleich zu den anderen Optimierungsbeispielen dieser Arbeit vergleichsweise stark an.

Löcher im Startentwurf	Ohne Werkzeug e)			
	Nein	Ja	Ja	Ja
Mindestwandstärke [mm]	–	–	–	8
Normierte mittlere Nachgiebigkeit	3464	3244	3625	4096
Änderung Zielfunktion [%]	–	–6.3	4.6	18.24
Maximal entstandener Anteil restriktionsverletzender Oberfläche [%]	–	–	2.3	3.4
Anzahl Iterationen	28	30	59	64
Änderung Anzahl Iterationen [%]	–	7.1	111.0	128.6
Iterationsdauer [s]	73	74	98	98

Tabelle 5–7: Resultate der Optimierungen der Lagerhalterung. In der ersten Spalte stehen die Ergebnisse ohne Berücksichtigung der Fertigungsrestriktionen und ohne Vorgabe von Löchern im Startentwurf. Auf dieses Beispiel beziehen sich die Angaben zu prozentualen Änderungen

5.4.3 Spannungsanalyse der optimierten Lagerhalterung

Für alle Optimierungsbeispiele dieser Arbeit wird als Zielfunktion die Minimierung der mittleren Nachgiebigkeit gewählt. Deren Minimierung führt jedoch nicht gleichzeitig zu einer Minimierung der mechanischen Spannungen. In der Folge können örtliche Spannungsspitzen entstehen, die die Streckgrenze des Werkstoffs überschreiten. Um zu beurteilen, ob die optimierten Lagerhalterungen unter Belastung lediglich elastisch verformt werden, folgt eine Analyse der Von-Mises-Vergleichsspannungen.

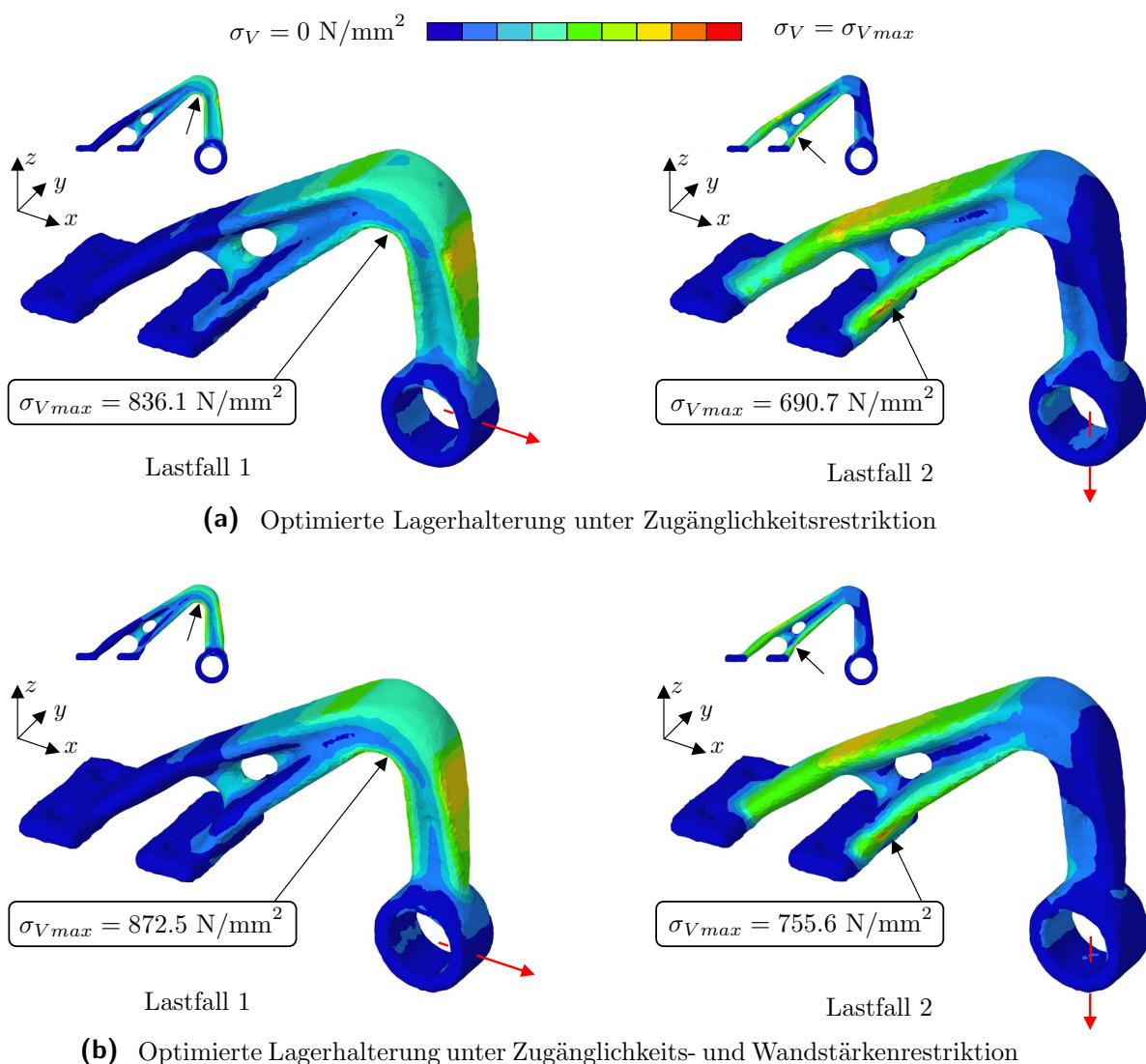


Abbildung 5–18: Darstellung der Von-Mises-Vergleichsspannungen der optimierten Lagerhalterungen für jeweils beide Lastfälle

Bei der ursprünglichen Lagerhalterung aus Abbildung 5–13 entsteht die größte Von-Mises-Vergleichsspannung unter Lastfall 1 und beträgt $\sigma_{Vmax} = 662.1 \text{ N/mm}^2$.

Unter Lastfall 2 nimmt diese einen Wert von $\sigma_{Vmax} = 496.2 \text{ N/mm}^2$ an. Diese liegen damit unter der Streckgrenze des Werkstoffs. Laut Wettbewerbsspezifikation beträgt die Streckgrenze $R_{p0,2} = 1000 \text{ N/mm}^2$. Für die unter Berücksichtigung der Fertigungsrestriktionen optimierten Lagerhalterungen sind die entstehenden Von-Mises-Vergleichsspannungen in Abbildung 5–18 gezeigt.

In der Abbildung markieren die schwarzen Pfeile die Stellen, an denen die maximalen Vergleichsspannungen auftreten. Die größten Spannungen treten auch bei den optimierten Strukturen unter Lastfall 1 auf. Mit einem Wert von $\sigma_{Vmax} = 872.5 \text{ N/mm}^2$ ist diese für die mit beiden Fertigungsrestriktionen optimierte Struktur am größten (Abbildung 5–18b, links). Beim Lastfall 2 tritt die maximale Spannung ebenfalls in der unter beiden Fertigungsrestriktionen optimierten Struktur auf (Abbildung 5–18b, rechts). Der Bereich maximaler Spannung liegt auf der Unterseite der Lagerhalterung, nahe der Bohrungen. Im gekennzeichneten Bereich beträgt die vorliegende Spannung $\sigma_{Vmax} = 755.6 \text{ N/mm}^2$. Auch in diesem Beispiel führt die einzuhaltende Mindestwandstärke dazu, dass Strukturmaterial aus mechanisch wichtigen Stellen entfernt und in zu dünne Bereiche verlagert werden muss. Dies führt dazu, dass die mittlere Nachgiebigkeit ansteigt. Daraus resultiert eine erhöhte Verformung in den markierten Bereichen und damit eine erhöhte mechanische Spannung.

In allen optimierten Lagerhalterungen treten unter Belastung keine plastischen Verformungen auf. Wäre dieser Fall eingetreten, müssten die Spannungsspitzen durch manuelle Strukturveränderungen reduziert werden. Auch eine erneute Optimierung mit angepasster Optimierungsaufgabe ist denkbar. Falls konstruktiv möglich, könnte der Volumenfüllgrad erhöht werden. Alternativ könnten die mechanischen Spannungen in Form einer Zielfunktion – anstatt der mittleren Nachgiebigkeit – oder einer zusätzlichen Restriktion berücksichtigt werden. Im Gegensatz zur mittleren Nachgiebigkeit sind mechanische Spannungen jedoch lokale Struktureigenschaften. Diese reagieren hochgradig nichtlinear auf Form- und Topologieänderungen. Eine Berücksichtigung der mechanischen Spannungen im Optimierungsverfahren kann je nach dazu verwendeter Methodik zu instabilen Optimierungsverläufen führen. Die Integration der mechanischen Spannungen in die Topologieoptimierung ist weiterhin Bestandteil zahlreicher Forschungsarbeiten.

6 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Dissertation wird ein Verfahren zur Topologieoptimierung fräsbbarer Strukturen unter Anwendung der Level-Set-Methode entwickelt. Als fräsbbar wird eine Struktur klassifiziert, wenn deren zu bearbeitende Oberfläche für ein vordefiniertes Fräswerkzeug vollständig zugänglich ist. Dazu werden realistische Geometrien des Werkzeugs, dessen Halterung sowie der Hauptspindel berücksichtigt. Exemplarisch wird für alle Ausführungen der Arbeit die 3-Achs-Bearbeitung gewählt. Zum Einbezug der Umspannvorgänge werden Bearbeitungsrichtungen eingeführt. Als weitere Fertigungsrestriktion wird die Einhaltung einer vorgegebenen Mindestwandstärke untersucht. Die Wandstärkenrestriktion soll bei Optimierungen fräsbbarer Strukturen zur Vermeidung dünnwandiger Strukturbereiche und damit gleichzeitig zu einer wirtschaftlicheren Fertigung beitragen.

Die Grundlage des entwickelten Verfahrens besteht darin, während einer Optimierung an nicht zugänglichen oder zu dünnen Stellen ein Strukturwachstum zu induzieren. Um diese Stellen zu identifizieren, wird ein Interpolationsverfahren eingeführt. Dabei wird die Level-Set-Funktion ausgehend von Randpunkten der Struktur entlang der Außenkonturen des verwendeten Fräswerkzeugs in mehreren Schritten interpoliert. Die in diesem Zuge abgetasteten Interpolationswege sind abhängig von den verfügbaren Bearbeitungsrichtungen und der Geometrie von Werkzeug, Werkzeughalterung und Hauptspindel. Falls ein dabei interpolierter Funktionswert negativ ist, wird der dazugehörige Randpunkt als unzugänglich markiert. Zur Erkennung dünnwandiger Bereiche wird ausgehend von den Randpunkten der Struktur eine Interpolation normal zum Strukturrand durchgeführt. Dabei sind die Interpolationswege in die Struktur hinein gerichtet und besitzen die Länge der Mindestwandstärke. Die Wandstärke an einem Randpunkt ist ausreichend, wenn entlang des Interpolationsweges nur negative Level-Set-Funktionswerte auftreten.

Für die Induktion des Strukturwachstums wird ein Potentialfeld im Entwurfsraum mithilfe der vorzeichenbehafteten Abstandsfunktion erzeugt. Dieses Feld besitzt innerhalb der Struktur höhere Werte als außerhalb der Struktur. Eine nach außen gerichtete Bewegung des Strukturrandes verringert demnach das Potential auf dem Rand. Durch eine Sensitivitätsanalyse wird die Reduktion des Randpotentials

in die Entwicklungsgeschwindigkeiten der Level-Set-Funktion integriert. Beide Fertigungsrestriktionen werden schließlich in die Reduktion eines gemeinsamen Randfunktionalen überführt.

In numerischen Beispielen wird demonstriert, dass das induzierte Strukturwachstum im Rahmen von Topologieoptimierungen zu fräsbaren Strukturen führt. Die Optimierungsergebnisse zeigen, dass die mechanischen Eigenschaften der optimierten Strukturen maßgeblich von den zugrunde liegenden Werkzeuggeometrien und zulässigen Bearbeitungsrichtungen abhängig sind. Eine dünne und kompakte Werkzeuggeometrie führt tendenziell zu besseren Optimierungsergebnissen als vergleichsweise sperrige Werkzeuge. Die Ergebnisse der numerischen Beispiele zeigen, dass die Wahl der Bearbeitungsrichtungen maßgeblich beeinflusst, wie viel Strukturmaterial in mechanisch wichtigen Bereichen ausgebildet werden kann bzw. wie viel Strukturmaterial in mechanisch wenig beanspruchten Bereichen zur Erfüllung der Fertigungsrestriktion verlagert werden muss. Letzterer Anteil reduziert sich tendenziell, wenn durch die Wahl der Bearbeitungsrichtungen ein möglichst großer Anteil der Strukturoberfläche zugänglich wird. Dieser Anteil verringert sich ebenfalls mit abnehmender Mindestwandstärke. Außerdem ist festzuhalten, dass sich unter dem Einfluss der Fertigungsrestriktionen zwar die Anzahl benötigter Iterationen erhöht, aber dennoch ein gutes Konvergenzverhalten zu beobachten ist. In der gewählten numerischen Umsetzung des Verfahrens steigen durch die Nutzung der Zugänglichkeitsrestriktion die Iterationsdauern um bis zu 17 % an. In Kombination mit der Wandstärkenrestriktion kann dieser Anstieg bis zu 26 % betragen.

Im Rahmen von weiterführenden Forschungsarbeiten sind Erweiterungen des Verfahrens zu untersuchen. Ein erster Forschungsschwerpunkt ist die Ausweitung des Verfahrens auf die 4-Achs- und 5-Achs-Bearbeitung. Durch die komplexere Werkzeugkinematik können potenziell bessere Designs erzielt werden. Im gleichen Zuge sinkt tendenziell die benötigte Anzahl durchzuführender Umspannvorgänge, um vergleichbare mechanische Eigenschaften zu erzielen. Ein Ansatz dazu kann die Erweiterung des Interpolationsverfahrens auf Bearbeitungsrichtungen sein, die nicht in Richtung der Linearachsen des verwendeten Bearbeitungszentrums orientiert sind.

Außerdem ist ein weiterer offener Forschungspunkt die Optimierung der Fertigungszeit. Die in dieser Arbeit optimierten Strukturen sind nur unter vergleichsweise hohen Fertigungszeiten und damit einhergehenden hohen Fertigungskosten herstellbar. Hier ist die Entwicklung einer Restriktion denkbar, die z. B. die Ausbildung senkrecht aufeinander orientierter Strukturflächen bevorzugt. Auch eine Optimierung der Bearbeitungsrichtungen unter der Vorgabe einer maximal zulässigen

Anzahl von Umspannvorgängen könnte in eine Optimierung der Fertigungszeiten einbezogen werden.

Schließlich bleibt zu untersuchen, wie sich der Maschinenspannvorgang in die Optimierung integrieren lässt. Abhängig von der jeweiligen Struktur müssen aktuell zu deren Einspannung in einem Bearbeitungszentrum spezielle Vorrichtungen gebaut werden. Könnten Spannvorrichtungen direkt während der Optimierung berücksichtigt werden, würden sich geeignete Spannflächen ausbilden. Die Ausbildung solcher Flächen sollte zielgerichtet unter Berücksichtigung der vorliegenden Zielfunktion erfolgen.

Weiter ist eine Kombination der entwickelten Methodik mit alternativen – insbesondere numerisch aufwendigeren – Zielfunktionen oder Restriktionen zu untersuchen. Mit Bezug auf das zuletzt durchgeführte Optimierungsbeispiel ist eine naheliegende Wahl die Minimierung der Von-Mises-Vergleichsspannungen. Weiterführende Forschungsarbeiten könnten Aufschlüsse darüber liefern, inwieweit solche Zielfunktionen, aber auch alternative Restriktionen, das Konvergenzverhalten und die resultierenden mechanischen Eigenschaften von Topologieoptimierungen unter Berücksichtigung der Frässtriktionen beeinflussen.

Literaturverzeichnis

- Allaire G, Jouve F, Michailidis G (2016) Thickness control in structural optimization via a level set method. *Struct Multidisc Optim* 53: 1349–1382
- Allaire G, Dapogny C, Frey P (2013) A mesh evolution algorithm based on the level set method for geometry and topology optimization. *Struct Multidisc Optim* 48: 711–715
- Allaire G, Dapogny C, Jouve F (2021) Chapter 1 - Shape and topology optimization. Hrsg. von A Bonito, RH Nochetto. *Geometric Partial Differential Equations - Part II*. Bd. 22. Handbook of Numerical Analysis: 1–132. Elsevier
- Allaire G, Jouve F, Toader AM (2004) Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method. *Journal of Computational Physics* 194: 363–393
- Bolar G, Joshi SN (2021) Experimental investigation and optimization of wall deflection and material removal rate in milling thin-wall parts. *Manufacturing Rev.* 8: 17
- Burg K, Haf H, Wille F, Meister A (2012) *Höhere Mathematik für Ingenieure Band II*. Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden.
- Challis VJ (2010) A discrete level-set topology optimization code written in Matlab. *Structural and Multidisciplinary Optimization* 41: 453–464
- Chen S, Wang MY, Liu AQ (2008) Shape feature control in structural topology optimization. *Computer-Aided Design* 40: 951–962
- Chen Y, Lu J, Wei Y (2016) Topology optimization for manufacturability based on the visibility map. *Computer-Aided Design and Applications* 13: 86–94
- Cheng G, Mei Y, Wang X (2006) A Feature-Based Structural Topology Optimization Method. Hrsg. von MP Bendsøe, N Olhoff, O Sigmund. *IUTAM Symposium on Topological Design Optimization of Structures, Machines and*

- Materials*. Bd. 137. Series Title: Solid Mechanics and Its Applications: 505–514. Springer Netherlands
- Choi BK (2001) C-space approach to tool-path generation for sculptured surface machining. Hrsg. von F Kimura. *Geometric Modelling*: 85–97. Springer US, Boston, MA
- Colling C, Schumacher A, Mecking K (2024) Level-set-based topology optimization of threedimensional structures considering the manufacturing process with realistic milling tools. *Structural and Multidisciplinary Optimization* 67: 204
- Dangel R (2020) *Spritzgießwerkzeuge für Einsteiger*. Carl Hanser Verlag GmbH Co KG, M.
- Deng H, Vulimiri PS, To AC (2022) CAD-integrated topology optimization method with dynamic extrusion feature evolution for multi-axis machining. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 390: 114456
- Dienemann R (2018) Entwicklung einer Optimierungsmethodik für die Form- und Topologieoptimierung von tiefziehbaren Blechstrukturen. Diss. Bergische Universität Wuppertal, Shaker Verlag.
- Dietrich J (2016) *Praxis der Zerspanetechnik*. Springer Fachmedien Wiesbaden, Wiesbaden.
- Dijk NP van, Maute K, Langelaar M, Keulen F van (2013) Level-set methods for structural topology optimization: a review. *Structural and Multidisciplinary Optimization* 48: 437–472
- DIN 8580 (2003) *Fertigungsverfahren - Begriffe, Einteilung*. Deutsches Institut für Normung: 13.
- DIN 8589-3 (2003) *Fertigungsverfahren Spanen - Teil 3: Fräsen; Einordnung, Unterteilung, Begriffe*. Deutsches Institut für Normung: 12.
- Eschenauer HA, Kobelev VV, Schumacher A (1994) Bubble method for topology and shape optimization of structures: 10
- Garreau S, Guillaume P, Masmoudi M (2001) The Topological Asymptotic for PDE Systems: The Elasticity Case. *SIAM J. Control Optim.* 39: 1756–1778
- Gibou F, Fedkiw R, Osher S (2018) A review of level-set methods and some recent applications. *Journal of Computational Physics* 353: 82–109

GrabCAD *Airplane Bearing Bracket Challenge*. URL: <https://grabcad.com/challenges/airplane-bearing-bracket-challenge> (besucht am 02.08.2022).

Gross D, Hauger W, Schröder J, Wall WA (2012) *Technische Mechanik 3*. Springer-Lehrbuch. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg.

Guest JK, Prévost JH, Belytschko T (2004) Achieving minimum length scale in topology optimization using nodal design variables and projection functions. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 61: 238–254

Guest JK, Zhu M (2012) Casting and Milling Restrictions in Topology Optimization via Projection-Based Algorithms. In: Bd. Volume 3: 38th Design Automation Conference, Parts A and B. International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference: 913–920.

Harzheim L (2008) *Strukturoptimierung - Grundlagen und Anwendungen*. 1. Aufl. Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main.

Heisel U, Klocke F, Uhlmann E, Spur G (2014) *Handbuch Spanen*. Carl Hanser Verlag GmbH Co. KG.

Ito K, Kunisch K, Peichl GH (2008) Variational approach to shape derivatives. *ESAIM: COCV* 14: 517–539

Kief HB, Roschiwal HA, Schwarz K (2020) *CNC-Handbuch - CNC, DNC, CAD, CAM, FFS, SPS, RPD, LAN, CNC-Maschinen, CNC-Roboter, Antriebe, Energieeffizienz, Werkzeuge, Industrie 4.0, Fertigungstechnik, Richtlinien, Normen, Simulation, Fachwortverzeichnis*. Carl Hanser Verlag GmbH Co KG, M.

Klein B (2013) *Leichtbau-Konstruktion*. Springer Fachmedien Wiesbaden, Wiesbaden.

Klocke F (2018) *Fertigungsverfahren 1 - Zerspanung mit geometrisch bestimmter Schneide*. OCLC: 1184992491. Springer Vieweg.

Langelaar M (2019) Topology optimization for multi-axis machining. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 351: 226–252

Lee HY, Zhu M, Guest JK (2022) Topology optimization considering multi-axis machining constraints using projection methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 390: 114464

Liu J, Ma YS (2015) 3D level-set topology optimization: a machining feature-based approach. *Struct Multidisc Optim* 52: 563–582

- Mecking K (2000) Godunov-Typ Verfahren zur Analyse dynamischer Rißspitzenfelder in elastisch-plastischen Festkörpern mit Materialgrenzen. Diss. RWTH Aachen, Shaker Verlag.
- Michell A (1904) LVIII. *The limits of economy of material in frame-structures. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 8: 589–597
- Mirzendehdel AM, Behandish M, Nelaturi S (2020) Topology optimization with accessibility constraint for multi-axis machining. *Computer-Aided Design* 122: 102825
- Monastyrsky M (1987) *Riemann, Topology, and Physics*. Hrsg. von RO Wells. Birkhäuser Boston, Boston, MA.
- Morris N, Butscher A, Iorio F (2020) A subtractive manufacturing constraint for level set topology optimization. *Struct Multidisc Optim* 61
- Nocedal J, Wright SJ (1999) *Numerical optimization*. Springer series in operations research. Springer, New York. 636 S.
- Oertel H, Böhle M, Reviol T (2011) *Strömungsmechanik: Grundlagen - Grundgleichungen - Lösungsmethoden - Softwarebeispiele*. 6., überarb. und erw. Aufl. Studium. Vieweg + Teubner, Wiesbaden. 470 S.
- Osher S, Fedkiw R (2003) *Level set methods and dynamic implicit surfaces*. Applied mathematical sciences 153. Springer, New York Berlin Heidelberg. 273 S.
- Osher S, Sethian JA (1988) Fronts propagating with curvature-dependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. *Journal of Computational Physics* 79: 12–49
- Osher S, Shu CW (1991) High-Order Essentially Nonoscillatory Schemes for Hamilton–Jacobi Equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis* 28: 907–922
- Osher S, Tsai R (2003) Level Set Methods and Their Applications in Image Science. *Communications in Mathematical Sciences* 1: 1–20
- Ottoni F, Blasi C (2016) Hooping as an Ancient Remedy for Conservation of Large Masonry Domes. *International Journal of Architectural Heritage* 10: 164–181
- Petersson J, Sigmund O (1998) Slope constrained topology optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 41: 1417–1434

- Poulsen TA (2003) A new scheme for imposing a minimum length scale in topology optimization. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 57: 741–760
- Ramsaier M (2021) Integration der Topologie- und Formoptimierung in den automatisierten digitalen Entwurf von Fachwerkstrukturen. Diss. Bergische Universität Wuppertal, Shaker Verlag.
- Reddy JN (2013) *An Introduction to Continuum Mechanics*. 2. Aufl. Cambridge University Press.
- Rozvany GIN (1997) Aims, Scope, Basic Concepts and Methods of Topology Optimization. In: *Topology Optimization in Structural Mechanics*. Hrsg. von GIN Rozvany. Springer Vienna, Vienna: 1–55.
- Schumacher A (2020) *Optimierung mechanischer Strukturen - Grundlagen und industrielle Anwendungen*. 3. Aufl. Springer Vieweg Berlin, Heidelberg.
- Sethian J, Wiegmann A (2000) Structural Boundary Design via Level Set and Immersed Interface Methods. *Journal of Computational Physics* 163: 489–528
- Sethian JA (1999) *Level set methods and fast marching methods: evolving interfaces in computational geometry, fluid mechanics, computer vision, and materials science*. 2nd ed. Cambridge monographs on applied and computational mathematics 3. Cambridge University Press, Cambridge, U.K. ; New York. 378 S.
- Sigmund O, Petersson J (1998) Numerical instabilities in topology optimization: A survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima. *Structural Optimization* 16: 68–75
- Sigmund O (1997) On the Design of Compliant Mechanisms Using Topology Optimization. *Mechanics of Structures and Machines* 25: 493–524
- Smid P (2003) *CNC Programming Handbook: A Comprehensive Guide to Practical CNC Programming*. EngineeringPro collection. Industrial Press.
- Sokolowski J, Zolesio JP (1992) *Introduction to Shape Optimization - Shape Sensitivity Analysis*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Berlin Heidelberg.
- Sridhar G, Ramesh Babu P (2015) Effect of a milling cutter diameter on distortion due to the machining of thin wall thin floor components. *Adv produc engineer manag* 10: 140–152
- Sussman M, Smereka P, Osher S (1994) A Level Set Approach for Computing Solutions for Incompressible Two-Phase Flow. *J. Comput. Phys.* 114: 146–159

- Vatanabe SL, Lippi TN, Lima CRd, Paulino GH, Silva EC (2016) Topology optimization with manufacturing constraints: A unified projection-based approach. *Advances in Engineering Software* 100: 97–112
- Walker SW (2015) *The Shape of Things - A Practical Guide to Differential Geometry and the Shape Derivative*. SIAM, Philadelphia.
- Wang MY, Wang X, Guo D (2003) A level set method for structural topology optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 192: 227–246
- Wang S, Wang MY (2006) Radial basis functions and level set method for structural topology optimization. *Int. J. Numer. Meth. Engng* 65: 2060–2090
- Zawada-Michałowska M, Kuczmaszewski J, Legutko S, Pieśko P (2020) Techniques for Thin-Walled Element Milling with Respect to Minimising Post-Machining Deformations. *Materials* 13: 4723
- Zhang S, Ding TC, Li JF (2012) Determination of surface and in-depth residual stress distributions induced by hard milling of H13 steel. *Prod. Eng. Res. Devel.* 6: 375–383
- Zhang X, Zhu B (2018) *Topology Optimization of Compliant Mechanisms*. Springer Singapore, Singapore.
- Zhou M, Rozvany G (1991) The COC algorithm, Part II: Topological, geometrical and generalized shape optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 89: 309–336

Anhang A

Herleitung der Formableitung eines Gebietsfunktional

Nach den Ausführungen von Walker (2015) wird zunächst das über das transformierte Gebiet $\Omega_t \subseteq \mathbb{R}^n$ erfasste Funktional $J(\Omega_t)$ mithilfe des Transformationssatzes für Integrale umgeformt zu

$$J(\Omega_t) = \int_{\Omega_t} f(\Omega_t) d\Omega = \int_{\Omega} f(\Phi(\mathbf{x})) \det(\nabla\Phi(\mathbf{x})) d\Omega, \quad (\text{A-1})$$

wobei die Variation eines Gebietes $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $n = 2$ oder $n = 3$ unter einem Verschiebungsfeld $\boldsymbol{\theta} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch die Abbildung $\Phi(\mathbf{x})$ mit

$$\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_t = \mathbf{x} + t\boldsymbol{\theta} : \text{Für alle } \mathbf{x} \in \Omega \wedge t \in \mathbb{R}^+ \quad (\text{A-2})$$

beschrieben wird. Differenziert man Ausdruck A-1 folgt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} J(\Omega_t) &= \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega_t} f(\Omega_t) d\Omega \right) = \int_{\Omega} \frac{d}{dt} (f(\Phi(\mathbf{x}))) \det(\nabla\Phi(\mathbf{x})) d\Omega \\ &\quad + \int_{\Omega} f(\Phi(\mathbf{x})) \frac{d}{dt} \det(\nabla\Phi(\mathbf{x})) d\Omega. \end{aligned} \quad (\text{A-3})$$

Die Änderung der Funktion f über t (materielle Ableitung) leitet Walker zu

$$\frac{d}{dt} f(\Phi(\mathbf{x})) = f'(\Omega) + (\boldsymbol{\theta} \cdot \nabla) f(\Omega) \quad (\text{A-4})$$

her. Mithilfe des in seiner Arbeit formulierten Lemmas 5.1

$$\frac{d}{dt} \det(\nabla\Phi(\mathbf{x})) \Big|_{t=0} = \nabla \cdot \boldsymbol{\theta} \quad \text{und} \quad \nabla\Phi(\mathbf{x}) \Big|_{t=0} = \mathbf{I} \quad (\text{A-5})$$

kann unter Verwendung der Einheitsmatrix \mathbf{I} sowie des Divergenz-Theorems für die Formableitung geschrieben werden:

$$\begin{aligned} J'(\Omega) \boldsymbol{\theta} &= \frac{d}{dt} J(\Omega_t) \Big|_{t=0} = \int_{\Omega} (f'(\Omega) + (\boldsymbol{\theta} \cdot \nabla) f(\Omega) + (\nabla \cdot \boldsymbol{\theta}) f(\Omega)) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} f'(\Omega) d\Omega + \int_{\Gamma} f(\Omega) \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n} d\Gamma. \end{aligned} \quad (\text{A-6})$$

Anhang B

Lösung der Entwicklungsgleichung

B.1 Differenzenquotienten

Die Ortsableitung der Level-Set-Funktion φ wird in Kapitel 3.3.3 durch Differenzenquotienten diskretisiert. Zu deren Bildung wird vorausgesetzt, dass ein Knoten i in Richtung x einen linken Nachbarknoten $i - 1$ und einen rechten Nachbarknoten $i + 1$ mit $x_{i-1} < x_i < x_{i+1}$ besitzt. Beträgt der Abstand zwischen zwei Knoten Δx , gilt für den rechtsseitigen Differenzenquotienten $D_i^{+x}\varphi$

$$D_i^{+x}\varphi = \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{\Delta x}. \quad (\text{B-1})$$

Für den linksseitigen Differenzenquotienten $D_i^{-x}\varphi$ gilt entsprechend

$$D_i^{-x}\varphi = \frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{\Delta x}. \quad (\text{B-2})$$

B.2 Eindimensionales Lösungsschema

Liegt am Knoten i eine Entwicklungsgeschwindigkeit v_{n_i} vor, ergibt sich im Eindimensionalen nach Sethian (1999) die entwickelte Level-Set-Funktion φ_i^{k+1} zum Zeitpunkt $k + 1$ und dem Zeitschritt Δt über das Lösungsschema

$$\varphi_i^{k+1} = \varphi_i^k - \Delta t \left(\max(v_{n_i}, 0) \nabla^+ + \min(v_{n_i}, 0) \nabla^- \right) \quad (\text{B-3})$$

$$\text{mit } \nabla^+ = - \left(\max(D_i^{-x}\varphi, 0)^2 + \min(D_i^{+x}\varphi, 0)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{B-4})$$

$$\text{und } \nabla^- = - \left(\max(D_i^{+x}\varphi, 0)^2 + \min(D_i^{-x}\varphi, 0)^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{B-5})$$

Anhang C

Eulersche Drehmatrizen

Soll ein Vektor \mathbf{a} in einem kartesischen x, y, z -Koordinatensystem um einen Winkel γ um eine der Koordinatenachsen rotiert werden, kann dazu eine auf Euler zurückgehende Drehmatrix $\mathbf{R}(\gamma)$ verwendet werden. Diese ergeben sich nach Burg et al. (2012) für die drei Koordinatenachsen wie folgt:

Rotation um die x -Achse:

$$\mathbf{R}_x(\gamma) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \quad (\text{C-1})$$

Rotation um die y -Achse:

$$\mathbf{R}_y(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos \gamma & 0 & -\sin \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \gamma & 0 & \cos \gamma \end{bmatrix} \quad (\text{C-2})$$

Rotation um die z -Achse:

$$\mathbf{R}_z(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{C-3})$$

Der rotierte Vektor \mathbf{a}_{rot} ergibt sich mithilfe der Drehmatrizen aus der Gleichung

$$\mathbf{a}_{rot} = \mathbf{R}(\gamma) \cdot \mathbf{a} . \quad (\text{C-4})$$

**Dissertationen vom Lehrstuhl für Optimierung mechanischer Strukturen
Fakultät 7, Bergische Universität Wuppertal**

1. Dr.-Ing. Christopher Ortmann (2015): *Entwicklung eines graphen- und heuristikbasierten Verfahrens zur Topologieoptimierung von Profilquerschnitten für Crashlastfälle*, Shaker Verlag, ISBN: 978-3-8440-3746-3
2. Dr.-Ing. Robert Dienemann (2018): *Entwicklung einer Optimierungsmethodik für die Form- und Topologieoptimierung von tiefziehbaren Blechstrukturen*, Shaker Verlag, ISBN: 978-3-8440-6196-3
3. Dr.-Ing. Constantin Diez (2018): *Process for Extraction of Knowledge from Crash Simulations by means of Dimensionality Reduction and Rule Mining* [<https://d-nb.info/1182555063/34>]
4. Dr.-Ing. Manuel Ramsaier (2021): *Integration der Topologie- und Formoptimierung in den automatisierten digitalen Entwurf von Fachwerkstrukturen*, Shaker Verlag, ISBN: 978-3-8440-7788-9
5. Dr.-Ing. Niklas Klinke (2021): *Strategien zur Optimierung von flexibel gewalzten Bauteilen in Karosseriestrukturen*, Shaker Verlag, ISBN: 978-3-8440-7936-4
6. Dr.-Ing. Saad Eddine Hafsa (2021): *Topology optimization method for the adaptation of mechanical structures*, Shaker Verlag, ISBN: 978-3-8440-8306-4
7. Dr.-Ing. Katrin Weider (2021): *Topologische Ableitung zur Optimierung crashbelasteter Strukturen*, Shaker Verlag, ISBN: 978-3-8440-8248-7
8. Dr.-Ing. Jana Büttner (2022): *Effiziente Lösungsansätze zur Reduktion des numerischen Ressourcenbedarfs für den operativen Einsatz der Multidisziplinären Optimierung von Fahrzeugstrukturen*, Shaker Verlag, ISBN: 978-3-8440-8560-0
9. Dr.-Ing. Johannes Sperber (2022): *Graphen- und Heuristikbasierte Topologieoptimierung axial belasteter Crashstrukturen*, Shaker Verlag, ISBN: 978-3-8440-8634-8
10. Dr.-Ing. Stefan Mertler (2022): *Comparative Analysis of Crash Simulation Results using Generative Nonlinear Dimensionality Reduction*, Shaker Verlag, ISBN: 978-3-8440-8761-1

11. Dr.-Ing. Sven Wielens (2022): *Automatische Erstellung von Submodellen für die Crashoptimierung von Fahrzeugkarosserien*, Shaker Verlag, ISBN: 978-3-8440-8717-8
12. Dr.-Ing. Dominik Schneider (2023): *Graphen- und heuristikbasierte Topologieoptimierung von Profilstrukturen aus Faser-Kunststoff-Verbunden in Crashanwendungen*, Shaker Verlag, ISBN: 978-3-8440-8884-7
13. Dr.-Ing. David Kracker (2024): *Automatisierte Auswertung von Crashsimulationen unterschiedlicher Fahrzeug-Entwicklungsständen mit Methoden des maschinellen Lernens*, Shaker Verlag, ISBN: 978-3-8440-9424-4
14. Dr.-Ing. Florian Beyer (2024): *Entwicklung eines Optimierungsverfahrens für crashbelastete 3D-Rahmenstrukturen mit der Graphen- und Heuristikbasierten Topologieoptimierung*, Shaker Verlag, ISBN: 978-3-8440-9475-6
15. Dr.-Ing. Michail Schlosser (2024): *Optimierungsverfahren zur Erhöhung der Versagenslasten von Bolzenverbindungen in faserverstärkten Strukturen*, Shaker Verlag, ISBN: 978-3-8440-9411-4
16. Dr.-Ing. Jens Trilling (2024): *Unterstützung der Graphen- und Heuristikbasierten Topologieoptimierung crashbelasteter Strukturen durch Reinforcement Learning*, Shaker Verlag, ISBN: 978-3-8440-9554-8
17. Dr.-Ing. Philipp Clemens (2024): *Topologie- und Formoptimierung crashbeanspruchter Tiefziehblech-Bauteile*, Shaker Verlag, ISBN: 978-3-8440-9962-1
18. Dr.-Ing. Simon Link (2024): *Graphen- und heuristikbasierte Topologieoptimierung von crashbelasteten Profilstrukturen aus verbundenen Blechen*, Shaker Verlag, ISBN: 978-3-8440-9989-8

Lebenslauf

Persönliche Daten

Christopher Colling

Geburtsdatum 08.03.1993

Geburtsort Gelsenkirchen

Schulausbildung

1999 bis 2003 Grundschule an der Velsenstraße in Gelsenkirchen

2003 bis 2009 Realschule an der Sankt Michaelstraße in Gelsenkirchen

2009 bis 2012 Gesamtschule Buer-Mitte in Gelsenkirchen

Studium

09/2012 bis 11/2015 Studium des Maschinenbaus (B. Eng.) mit dem Schwerpunkt der Automatisierungstechnik an der *Westfälischen Hochschule* in Gelsenkirchen

in dieser Zeit: Tutor für Physik und Elektrotechnik für Studierende des Maschinenbaus, Praxissemester bei E.ON Kraftwerke GmbH

09/2015 bis 06/2018 Studium des Maschinenbaus (M. Eng.) an der *Westfälischen Hochschule* in Gelsenkirchen,

in dieser Zeit: Studentische Hilfskraft im Mikrocontroller-Labor des *Instituts für Maschinenbau* zur Weiterentwicklung eines selbst-balancierenden Elektrorollers

Berufstätigkeit

seit 10/2016 Wissenschaftlicher Mitarbeiter am *Institut für Maschinenbau* an der *Westfälischen Hochschule* in Gelsenkirchen